

Υπολογίστε τον ελάχιστο και το μέγιστο δυνατό αριθμό κλειδιών σε ένα (a, b) -δένδρο ύψους h .

Απάντηση

Έστω n_{min} και N_{min} ο ελάχιστος αριθμός κόμβων και ο ελάχιστος αριθμός κλειδιών, αντίστοιχα, σε ένα (a, b) -δένδρο ύψους h . Ομοίως, έστω n_{max} και N_{max} ο μέγιστος αριθμός κόμβων και ο μέγιστος αριθμός κλειδιών, αντίστοιχα, σε ένα (a, b) -δένδρο ύψους h .

Για τον υπολογισμό του n_{min} θεωρούμε ότι η ρίζα έχει 2 παιδιά και κάθε άλλος κόμβος έχει a παιδιά. Επομένως έχουμε $2a$ κόμβους στο επίπεδο 2, $2a^2$ κόμβους στο επίπεδο 3, $2a^3$ κόμβους στο επίπεδο 4, κοκ.

Συνολικά έχουμε

$$n_{min} = 1 + 2 \sum_{i=1}^{h-1} a^{i-1} = 1 + 2 \frac{a^{h-1} - 1}{a - 1}$$

Κάθε κόμβος εκτός της ρίζας αποθηκεύει $a - 1$ κλειδιά και η ρίζα αποθηκεύει 1 κλειδί, άρα

$$N_{min} = 1 + (a - 1) 2 \frac{a^{h-1} - 1}{a - 1} = 2a^{h-1} - 1$$

Για τον υπολογισμό του n_{max} θεωρούμε ότι κάθε κόμβος έχει b παιδιά. Επομένως έχουμε b κόμβους στο επίπεδο 1, b^2 κόμβους στο επίπεδο 2, b^3 κόμβους στο επίπεδο 3, κοκ. Συνολικά έχουμε

$$n_{max} = \sum_{i=0}^{h-1} b^i = \frac{b^h - 1}{b - 1}$$

Κάθε κόμβος αποθηκεύει $b - 1$ κλειδιά, άρα

$$N_{max} = (b - 1) \frac{b^h - 1}{b - 1} = b^h - 1$$