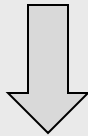


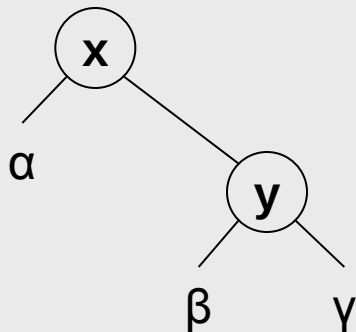
Ισορροπημένα Δένδρα

Μπορούμε να επιτύχουμε $O(\log N)$ χρόνο εκτέλεσης για κάθε λειτουργία;

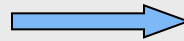


Ισορροπημένο δένδρο : Διατηρεί ύψος $O(\log N)$ μετά από κάθε εισαγωγή ή διαγραφή

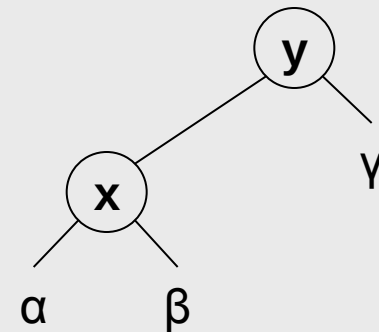
Περιστροφές



αριστερή περιστροφή
από το x



δεξιά περιστροφή
από το y



```
Node rotateLeft(Node x)
{
    Node y = x.right;
    x.right = y.left;
    y.left = x;
    return y;
}
```

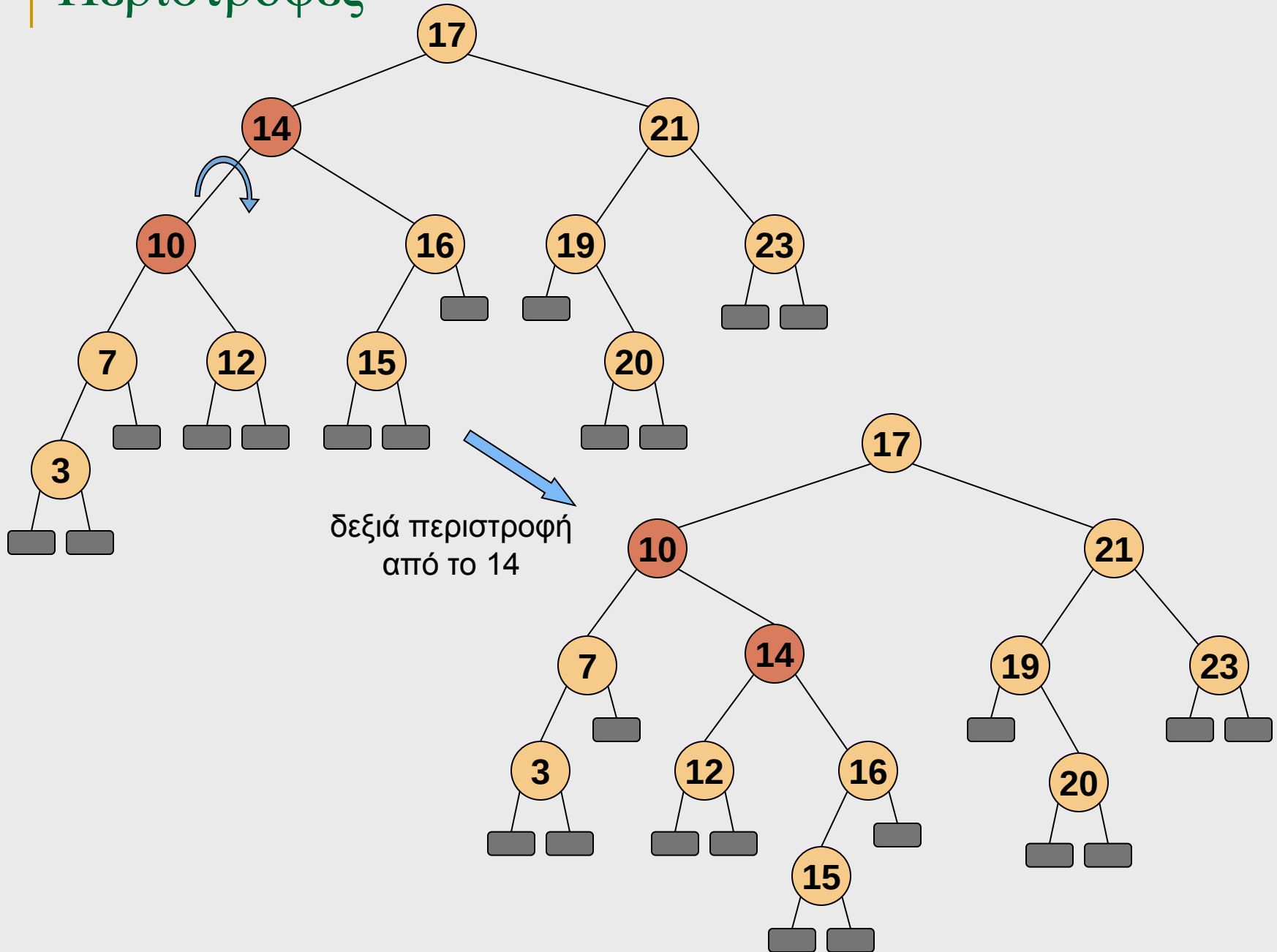
αριστερή περιστροφή

Η περιστροφή παίρνει
χρόνο $O(1)$

```
Node rotateRight(Node y)
{
    Node x = y.left;
    y.left = x.right;
    x.right = y;
    return x;
}
```

δεξιά περιστροφή

Περιστροφές



Ισορροπημένα Δένδρα

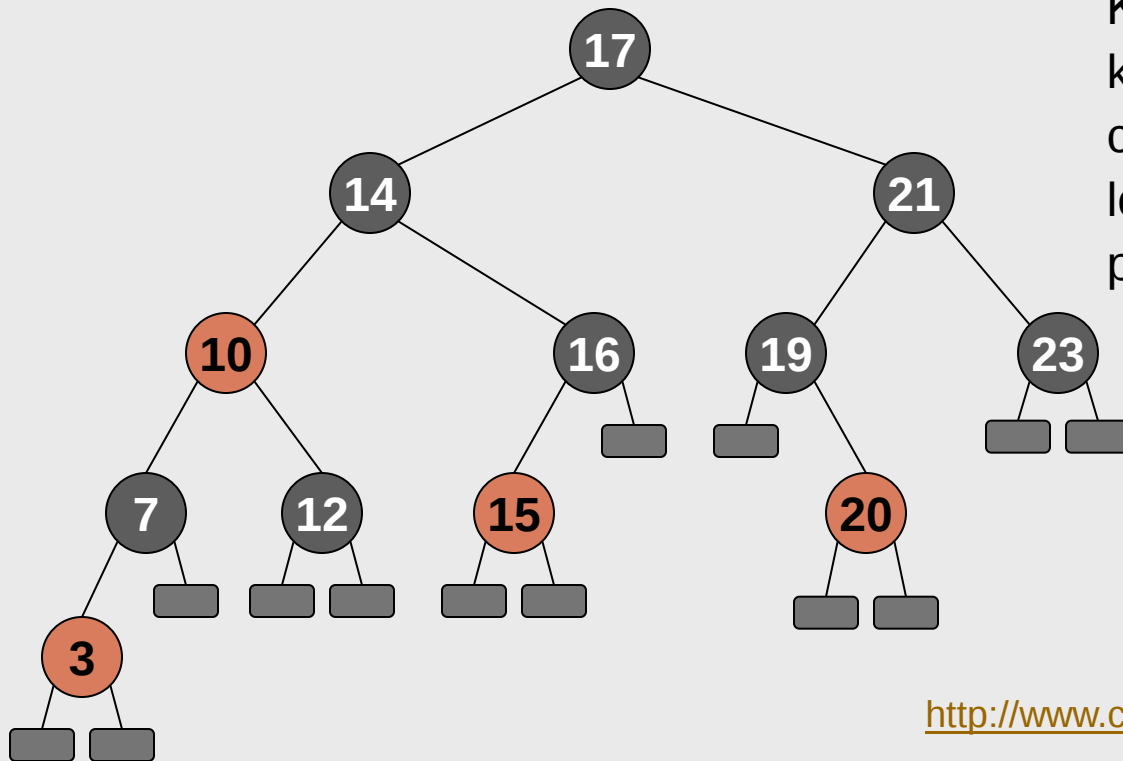
Μερικοί τύποι ισορροπημένων δένδρων

- Τυχαιοποιημένα δένδρα
- Αρθρωτά δένδρα (splay trees)
- Δένδρα AVL
- Κοκκινόμαυρα δένδρα
- (a,b) δένδρα

Όλα τα παραπάνω χρησιμοποιούν περιστροφές για να παραμείνουν ισορροπημένα

Κοκκινόμαυρα Δένδρα (red-black trees)

Κάθε κόμβος έχει τα ακόλουθα πεδία
key : κλειδί
color : χρώμα (boolean)
left, right: αναφορά στα παιδιά
p : αναφορά στο γονέα (*)

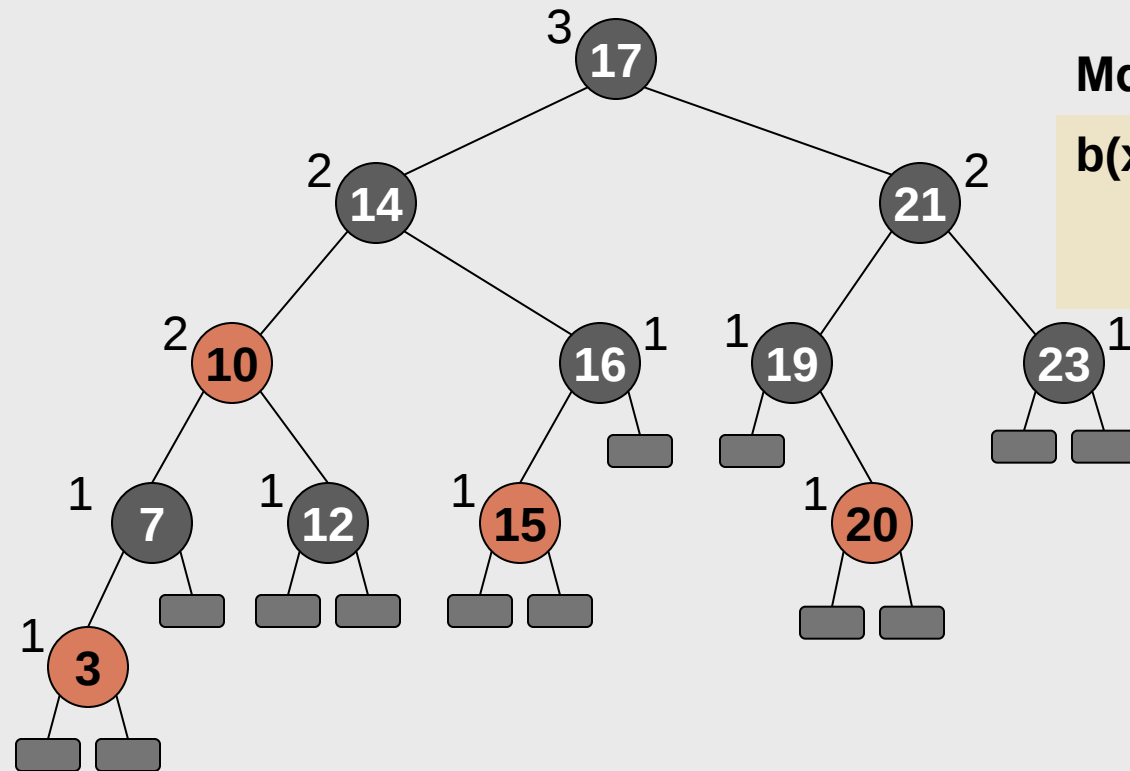


(*) δεν είναι απαραίτητος, αλλά απλοποιεί την περιγραφή και υλοποίηση των αλγορίθμων

<http://www.cse.yorku.ca/~aaw/Sotirios/RedBlackTree.html>

- Κάθε κόμβος είναι κόκκινος ή μαύρος
- Ο ριζικός κόμβος είναι μαύρος
- Οι καταληκτικοί κόμβοι είναι μαύροι
- Οι θυγατρικοί κόμβοι ενός κόκκινου κόμβου είναι μαύροι
- Οι διαδρομές από έναν κόμβο προς τους καταληκτικούς κόμβους-απογόνους του περιέχουν τον ίδιο αριθμό μαύρων κόμβων

Κοκκινόμαυρα Δένδρα (red-black trees)

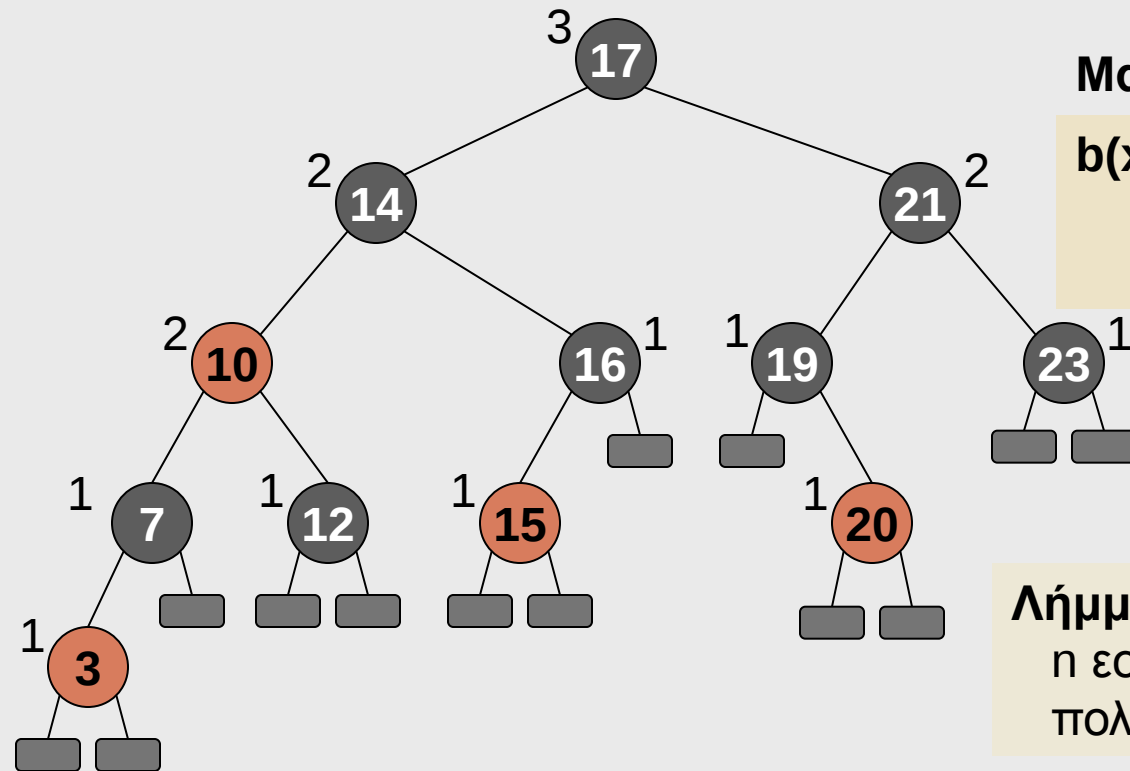


Μαύρο ύψος κόμβου x

$b(x)$ = πλήθος μαύρων κόμβων εκτός του x μέχρι κάποιο καταληκτικό κόμβο (null)

- Κάθε κόμβος είναι κόκκινος ή μαύρος
- Ο ριζικός κόμβος είναι μαύρος
- Οι καταληκτικοί κόμβοι είναι μαύροι
- Οι θυγατρικοί κόμβοι ενός κόκκινου κόμβου είναι μαύροι
- Οι διαδρομές από έναν κόμβο προς τους καταληκτικούς κόμβους-απογόνους του περιέχουν τον ίδιο αριθμό μαύρων κόμβων

Κοκκινόμαυρα Δένδρα (red-black trees)



Μαύρο ύψος κόμβου x

$b(x)$ = πλήθος μαύρων κόμβων εκτός του x μέχρι κάποιο καταληκτικό κόμβο (null)

Λήμμα Ένα κοκκινόμαυρο δένδρο με n εσωτερικούς κόμβους έχει ύψος το πολύ $2 \lg(n + 1)$

- Κάθε κόμβος είναι κόκκινος ή μαύρος
- Ο ριζικός κόμβος είναι μαύρος
- Οι καταληκτικοί κόμβοι είναι μαύροι
- Οι θυγατρικοί κόμβοι ενός κόκκινου κόμβου είναι μαύροι
- Οι διαδρομές από έναν κόμβο προς τους καταληκτικούς κόμβους-απογόνους του περιέχουν τον ίδιο αριθμό μαύρων κόμβων

Κοκκινόμαυρα Δένδρα

Μαύρο ύψος κόμβου x

$b(x)$ = πλήθος μαύρων κόμβων εκτός του x μέχρι κάποιο καταληκτικό κόμβο (null)

Λήμμα Ένα κοκκινόμαυρο δένδρο με n εσωτερικούς κόμβους έχει ύψος το πολύ $2 \lg(n + 1)$

Απόδειξη Δείχνουμε ότι το υποδένδρο με ρίζα x έχει τουλάχιστον $2^{b(x)} - 1$ εσωτερικούς κόμβους.

Χρησιμοποιούμε επαγωγή ως προς το ύψος. Έστω k το ύψος του x .

Βάση επαγωγής: $k=0$.

Τότε ο x είναι φύλλο και επομένως το πλήθος των εσωτερικών κόμβων στο υποδένδρο με ρίζα x είναι 0.

Κοκκινόμαυρα Δένδρα

Μαύρο ύψος κόμβου x

$b(x)$ = πλήθος μαύρων κόμβων εκτός του x μέχρι κάποιο καταληκτικό κόμβο (null)

Λήμμα Ένα κοκκινόμαυρο δένδρο με n εσωτερικούς κόμβους έχει ύψος το πολύ $2 \lg(n + 1)$

Απόδειξη Δείχνουμε ότι το υποδένδρο με ρίζα x έχει τουλάχιστον $2^{b(x)} - 1$ εσωτερικούς κόμβους.

Χρησιμοποιούμε επαγωγή ως προς το ύψος. Έστω k το ύψος του x .

Επαγωγική υπόθεση: Οποιοδήποτε υποδένδρο με ρίζα κόμβο y ύψους μικρότερου του k έχει τουλάχιστον $2^{b(y)} - 1$ εσωτερικούς κόμβους.

Κοκκινόμαυρα Δένδρα

Μαύρο ύψος κόμβου x

$b(x)$ = πλήθος μαύρων κόμβων εκτός του x μέχρι κάποιο καταληκτικό κόμβο (null)

Λήμμα Ένα κοκκινόμαυρο δένδρο με n εσωτερικούς κόμβους έχει ύψος το πολύ $2 \lg(n + 1)$

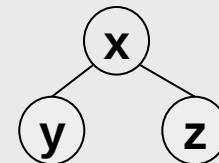
Απόδειξη Δείχνουμε ότι το υποδένδρο με ρίζα x έχει τουλάχιστον $2^{b(x)} - 1$ εσωτερικούς κόμβους.

Χρησιμοποιούμε επαγωγή ως προς το ύψος. Έστω k το ύψος του x .

Επαγωγική υπόθεση: Οποιοδήποτε υποδένδρο με ρίζα κόμβο y ύψους μικρότερου του k έχει τουλάχιστον $2^{b(y)} - 1$ εσωτερικούς κόμβους.

Επαγωγικό βήμα: Έστω y και z τα παιδιά του x . Ισχύει

$$b(x) - 1 \leq b(y), b(z) \leq b(x)$$



Από την επαγωγική υπόθεση, το υποδένδρο με ρίζα y έχει $\geq 2^{b(y)} - 1 \geq 2^{b(x)-1} - 1$ εσωτερικούς κόμβους. Ομοίως και για το υποδένδρο με ρίζα το z .

Κοκκινόμαυρα Δένδρα

Μαύρο ύψος κόμβου x

$b(x)$ = πλήθος μαύρων κόμβων εκτός του x μέχρι κάποιο καταληκτικό κόμβο (null)

Λήμμα Ένα κοκκινόμαυρο δένδρο με n εσωτερικούς κόμβους έχει ύψος το πολύ $2 \lg(n + 1)$

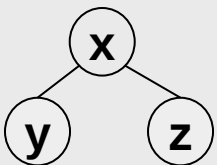
Απόδειξη Δείχνουμε ότι το υποδένδρο με ρίζα x έχει τουλάχιστον $2^{b(x)} - 1$ εσωτερικούς κόμβους.

Χρησιμοποιούμε επαγωγή ως προς το ύψος. Έστω k το ύψος του x .

Επαγωγική υπόθεση: Οποιοδήποτε υποδένδρο με ρίζα κόμβο y ύψους μικρότερου του k έχει τουλάχιστον $2^{b(y)} - 1$ εσωτερικούς κόμβους.

Επαγωγικό βήμα: Άρα το υποδένδρο με ρίζα x έχει αριθμό εσωτερικών κόμβων μεγαλύτερο ή ίσο του

$$(2^{b(y)} - 1) + (2^{b(z)} - 1) + 1 \geq 2^{b(x)-1} + 2^{b(x)-1} - 1 = 2^{b(x)} - 1$$



Κοκκινόμαυρα Δένδρα

Μαύρο ύψος κόμβου x

$b(x)$ = πλήθος μαύρων κόμβων εκτός του x μέχρι κάποιο καταληκτικό κόμβο (null)

Λήμμα Ένα κοκκινόμαυρο δένδρο με n εσωτερικούς κόμβους έχει ύψος το πολύ $2 \lg(n + 1)$

Δείξαμε ότι το υποδένδρο με ρίζα x έχει $\geq 2^{b(x)} - 1$ εσωτερικούς κόμβους.

Έστω h το ύψος της ρίζας και b το μαύρο ύψος της ρίζας.

Ισχύει $b \geq h/2$ και επομένως

$$n \geq 2^b - 1 \geq 2^{h/2} - 1 \Rightarrow$$

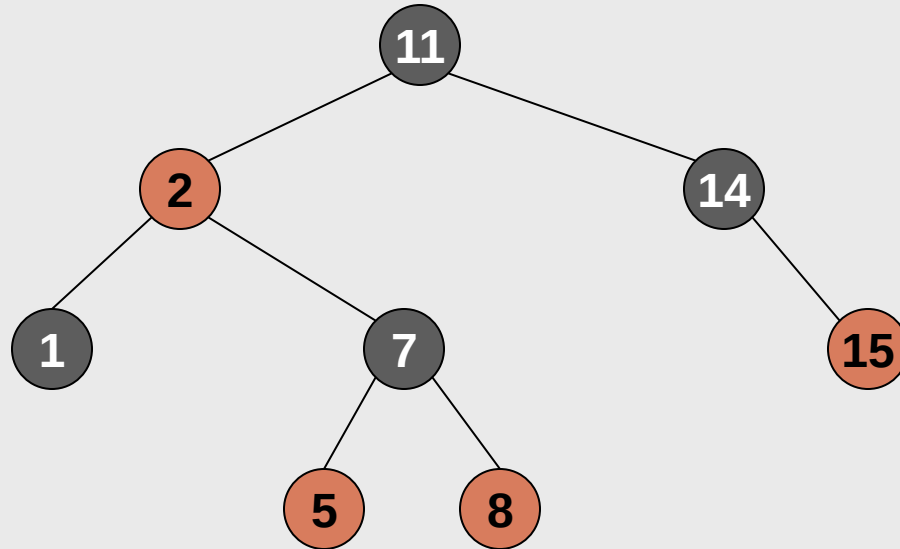
$$2^{h/2} \leq n + 1 \Rightarrow h \leq 2 \lg(n + 1)$$

Εισαγωγή

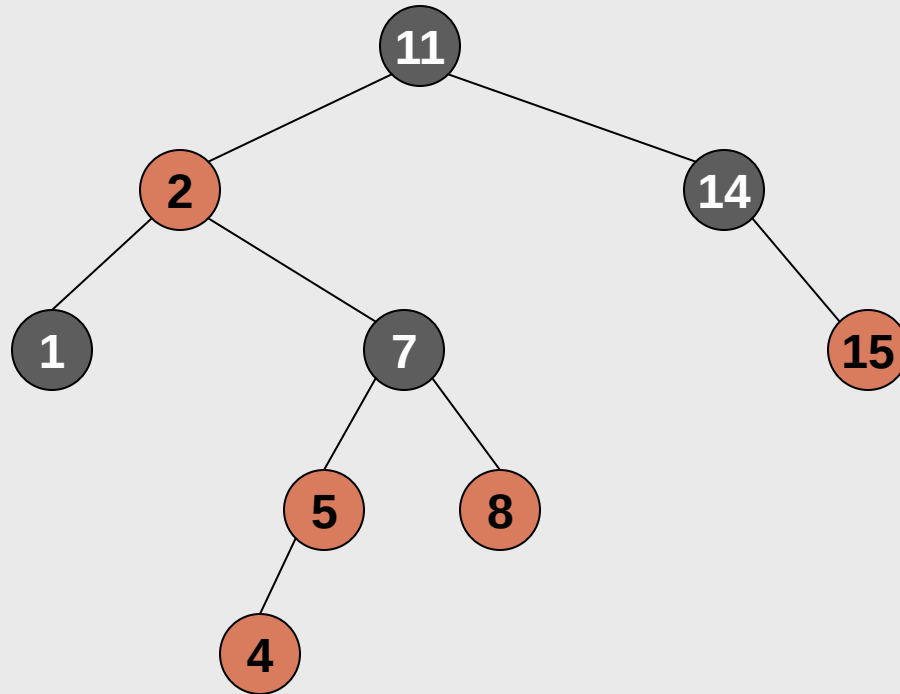
1. Εκτελούμε τον αλγόριθμο εισαγωγής όπως σε ένα απλό δυαδικό δένδρο. Χρωματίζουμε το νέο κόμβο x κόκκινο.
2. Εξετάζουμε αν οι ιδιότητες χρωματισμού εξακολουθούν να ισχύουν. Αν ναι τερματίζουμε.
3. Διαφορετικά (ο πατέρας έχει κόκκινο χρώμα και ο παππούς μαύρο) αποκαθιστούμε τις ιδιότητες χρωματισμού χρησιμοποιώντας περιστροφές και αλλαγές χρωμάτων.

Η παραπάνω διαδικασία ολοκληρώνεται σε χρόνο $O(\log n)$

Εισαγωγή



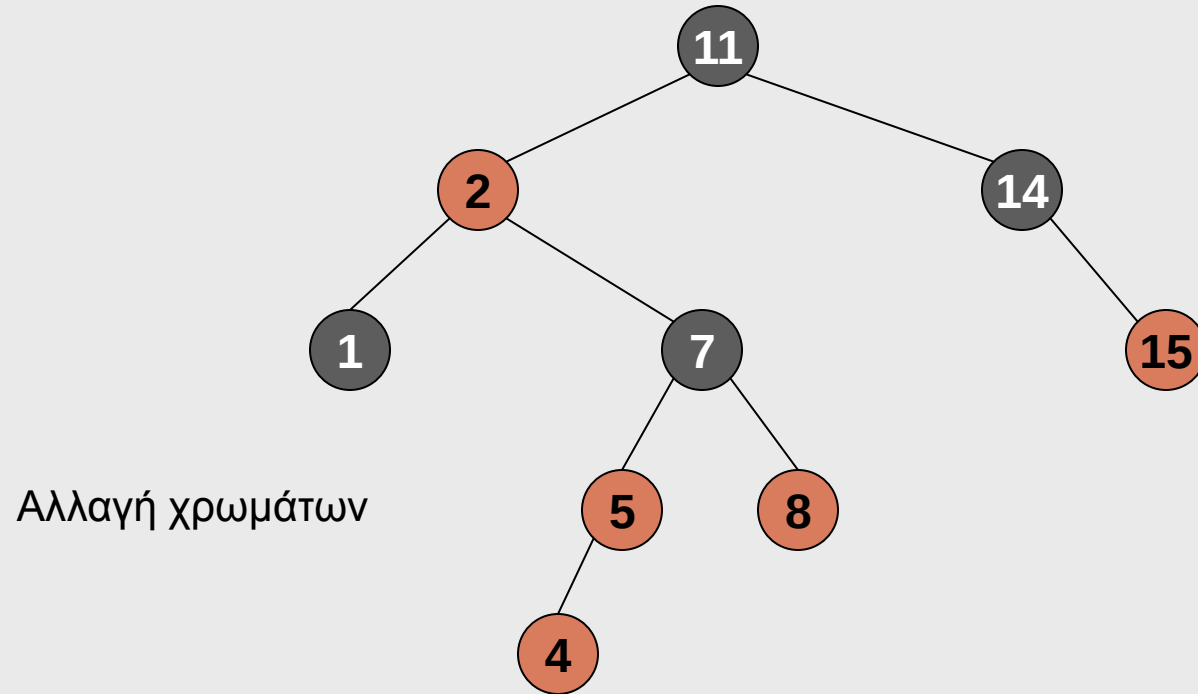
Εισαγωγή



εισαγωγή του 4

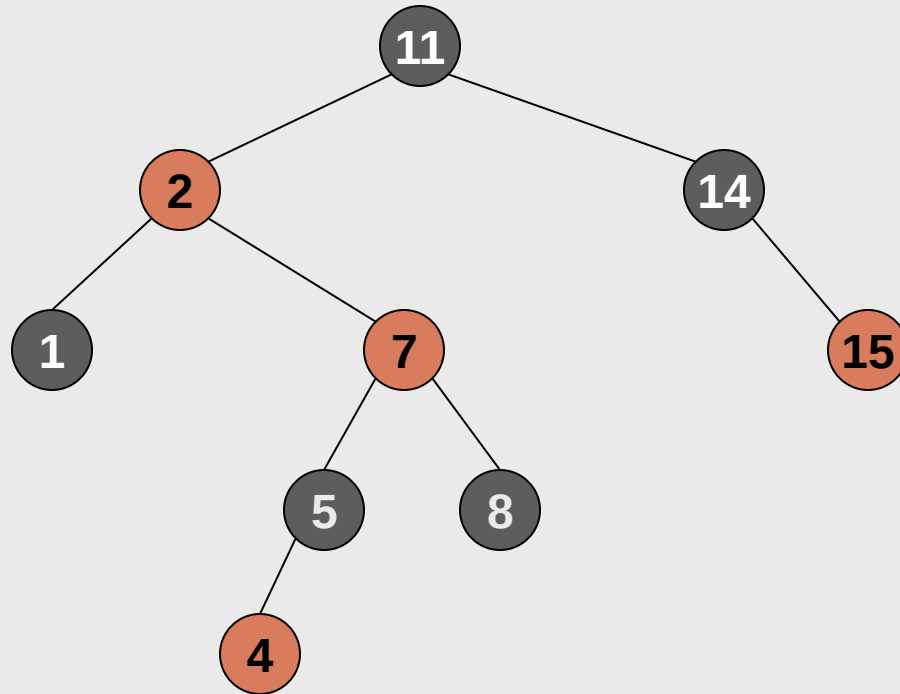
Παραβιάζεται στο 5 η συνθήκη: «Οι θυγατρικοί κόμβοι ενός κόκκινου κόμβου είναι μαύροι»

Εισαγωγή



Παραβιάζεται στο 5 η συνθήκη: «Οι θυγατρικοί κόμβοι ενός κόκκινου κόμβου είναι μαύροι»

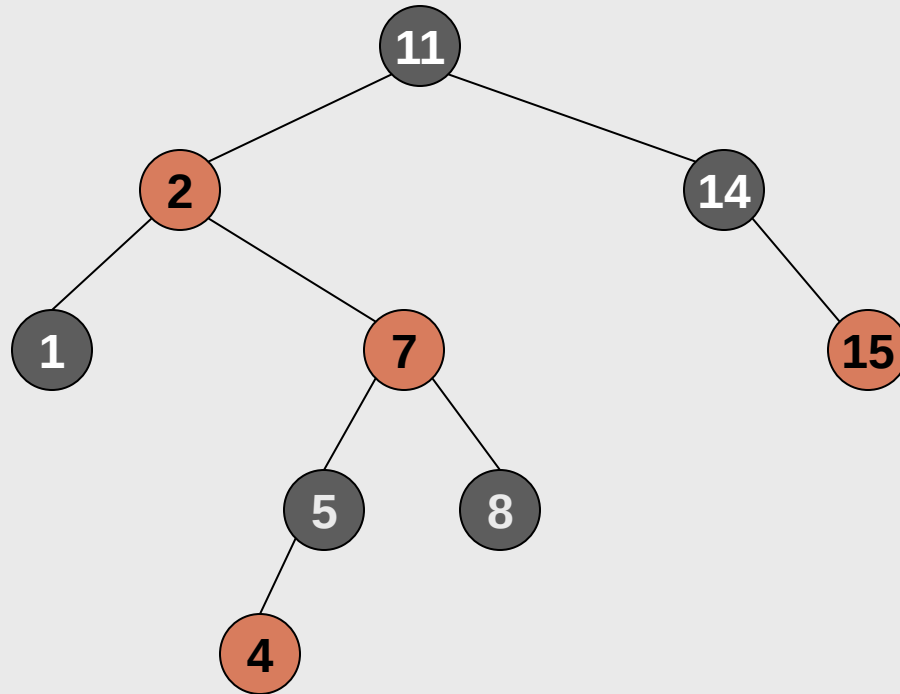
Εισαγωγή



Παραβιάζεται στο 2 η συνθήκη: «Οι θυγατρικοί κόμβοι ενός κόκκινου κόμβου είναι μαύροι»

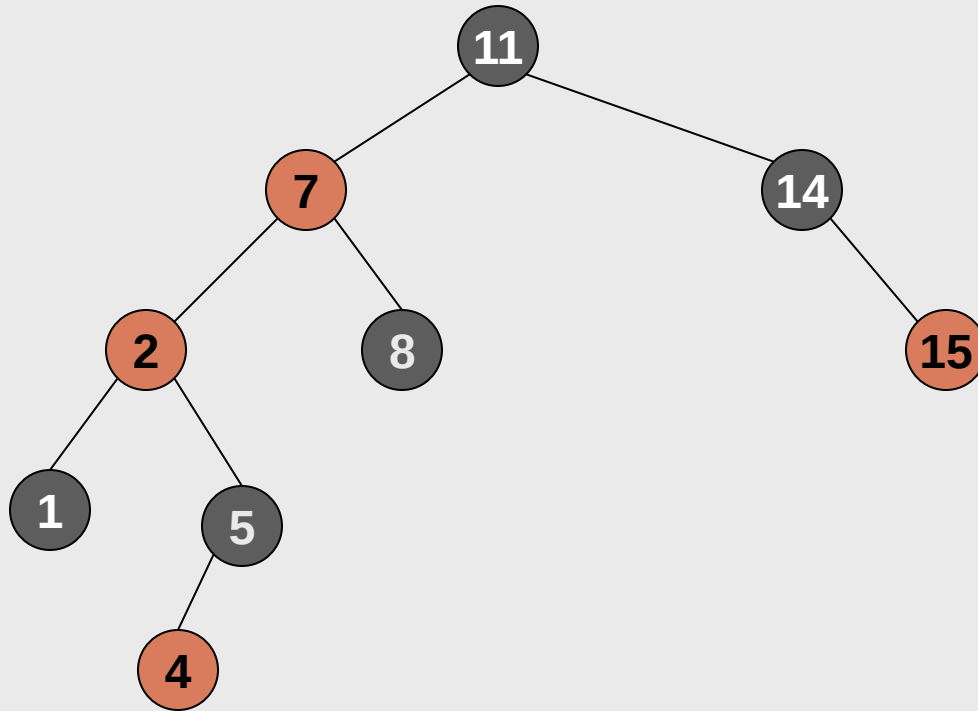
Εισαγωγή

αριστερή περιστροφή
από 2



Παραβιάζεται στο 2 η συνθήκη: «Οι θυγατρικοί κόμβοι ενός κόκκινου κόμβου είναι μαύροι»

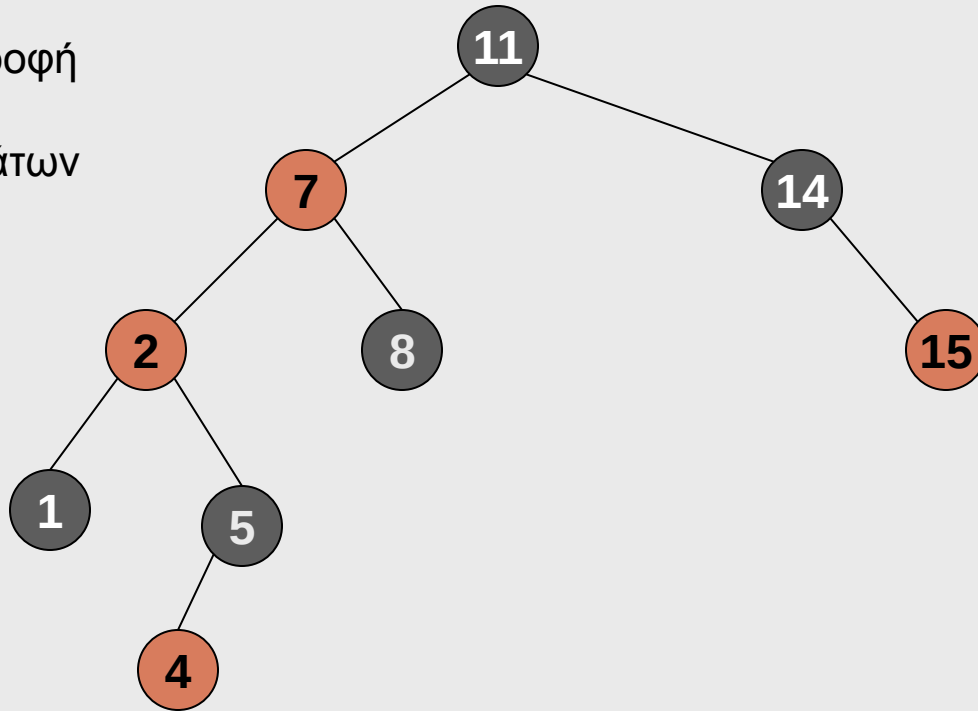
Εισαγωγή



Παραβιάζεται στο 7 η συνθήκη: «Οι θυγατρικοί κόμβοι ενός κόκκινου κόμβου είναι μαύροι»

Εισαγωγή

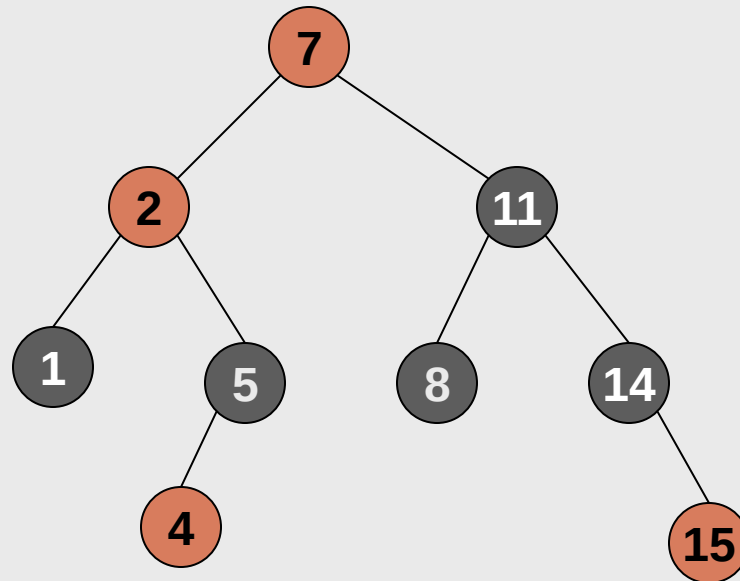
δεξιά περιστροφή
από 7 και
αλλαγή χρωμάτων



Παραβιάζεται στο 7 η συνθήκη: «Οι θυγατρικοί κόμβοι ενός κόκκινου κόμβου είναι μαύροι»

Εισαγωγή

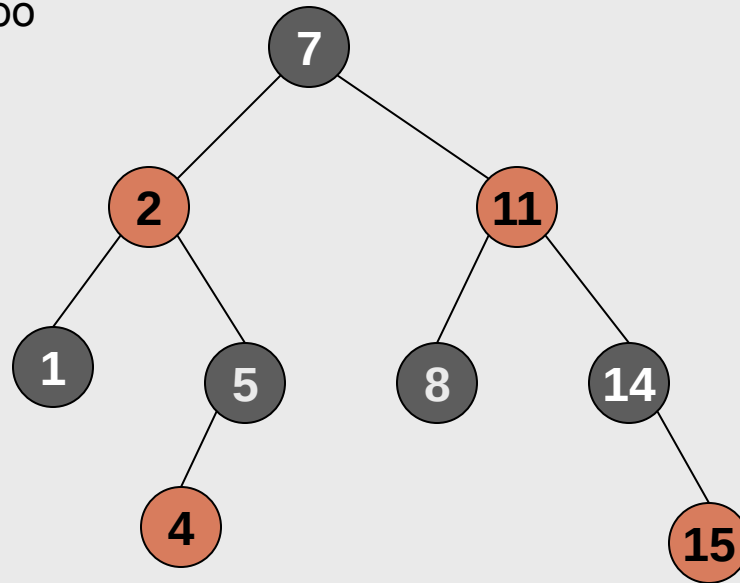
δεξιά περιστροφή
από 7 και
αλλαγή χρωμάτων



Παραβιάζεται στο 7 η συνθήκη: «Οι θυγατρικοί κόμβοι ενός κόκκινου κόμβου είναι μαύροι»

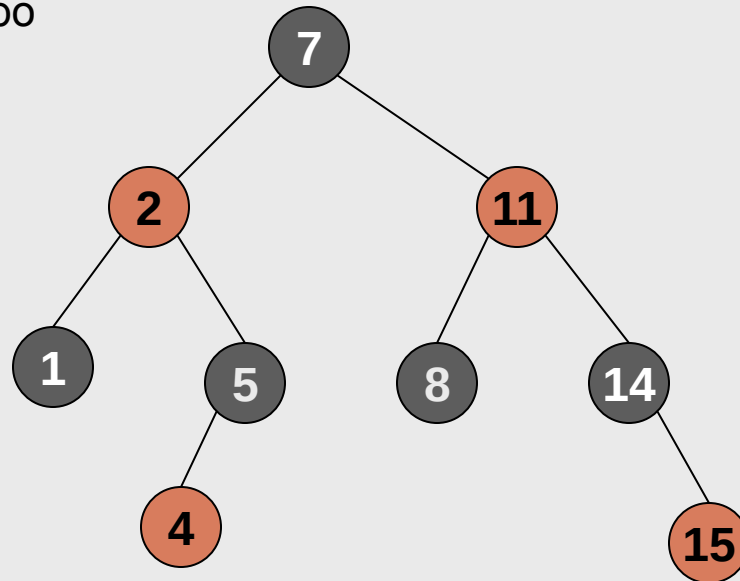
Εισαγωγή

έγκυρο κοκκινόμαυρο δένδρο



Εισαγωγή

έγκυρο κοκκινόμαυρο δένδρο



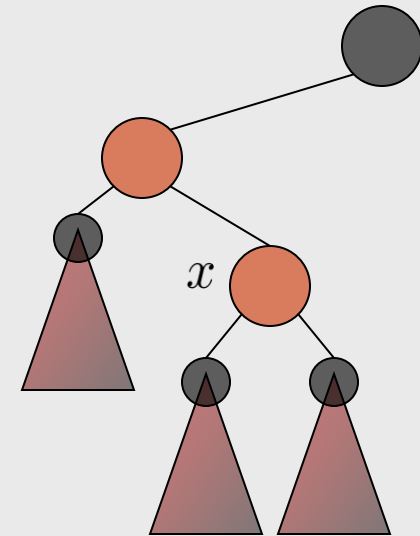
Σε κάθε βήμα μεταφέρουμε την παραβίαση κατά ένα επίπεδο πιο πάνω

$\Rightarrow O(\log n)$ βήματα αποκατάστασης

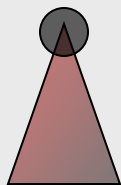
Εισαγωγή

Διακρίνουμε περιπτώσεις

Για απλότητα, υποθέτουμε ότι ο πατέρας του x είναι αριστερό παιδί του πατέρα του (εργαζόμαστε συμμετρικά εάν είναι δεξί παιδί).



Συμβολισμός:



υποδένδρο με μαύρο ριζικό κόμβο



όλα τα

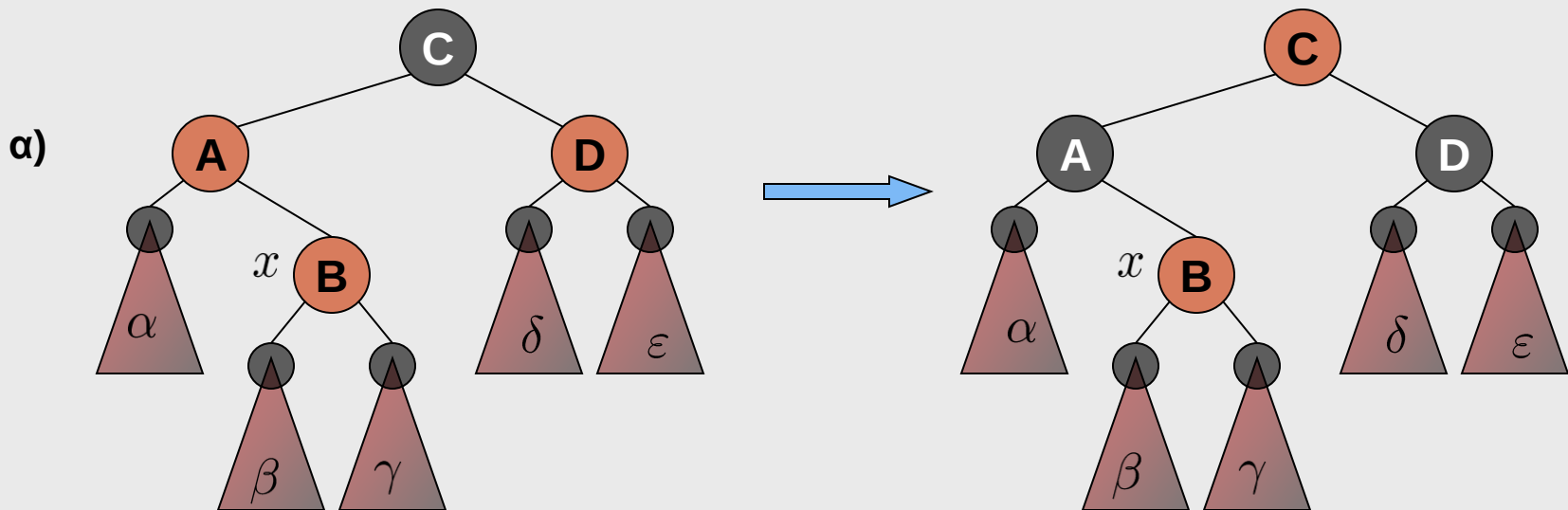
έχουν το ίδιο μαύρο ύψος

Εισαγωγή

Αποκατάσταση ιδιοτήτων χρωματισμού μετά από εισαγωγή

Περίπτωση 1

Ο θείος (κόμβος-αδελφός του πατέρα) του x έχει κόκκινο χρώμα: αλλάζουμε το χρώμα του πατέρα και του θείου σε μαύρο και το χρώμα του παππού σε κόκκινο. Επαναλαμβάνουμε από τον κόμβο-παππού.



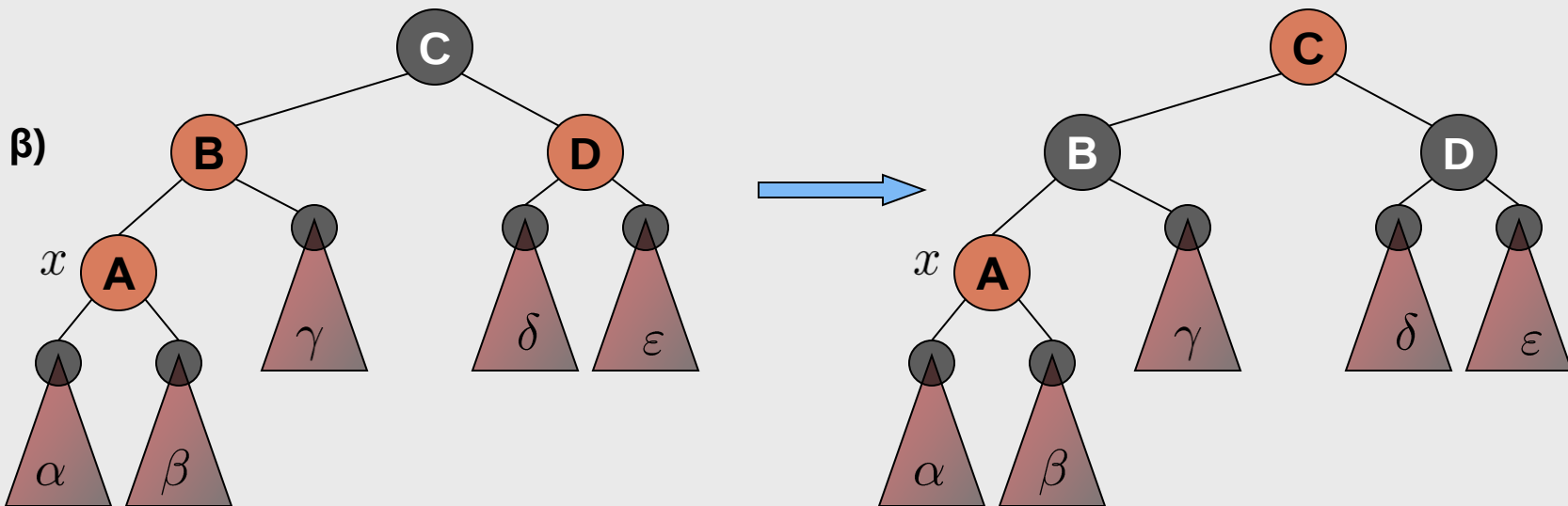
Εάν (λόγω συνεχούς εφαρμογής της περίπτωσης 1) φθάσουμε στη ρίζα, την χρωματίζουμε με μαύρο χρώμα και σταματάμε.

Εισαγωγή

Αποκατάσταση ιδιοτήτων χρωματισμού μετά από εισαγωγή

Περίπτωση 1

Ο θείος (κόμβος-αδελφός του πατέρα) του x έχει κόκκινο χρώμα: αλλάζουμε το χρώμα του πατέρα και του θείου σε μαύρο και το χρώμα του παππού σε κόκκινο. Επαναλαμβάνουμε από τον κόμβο-παππού.



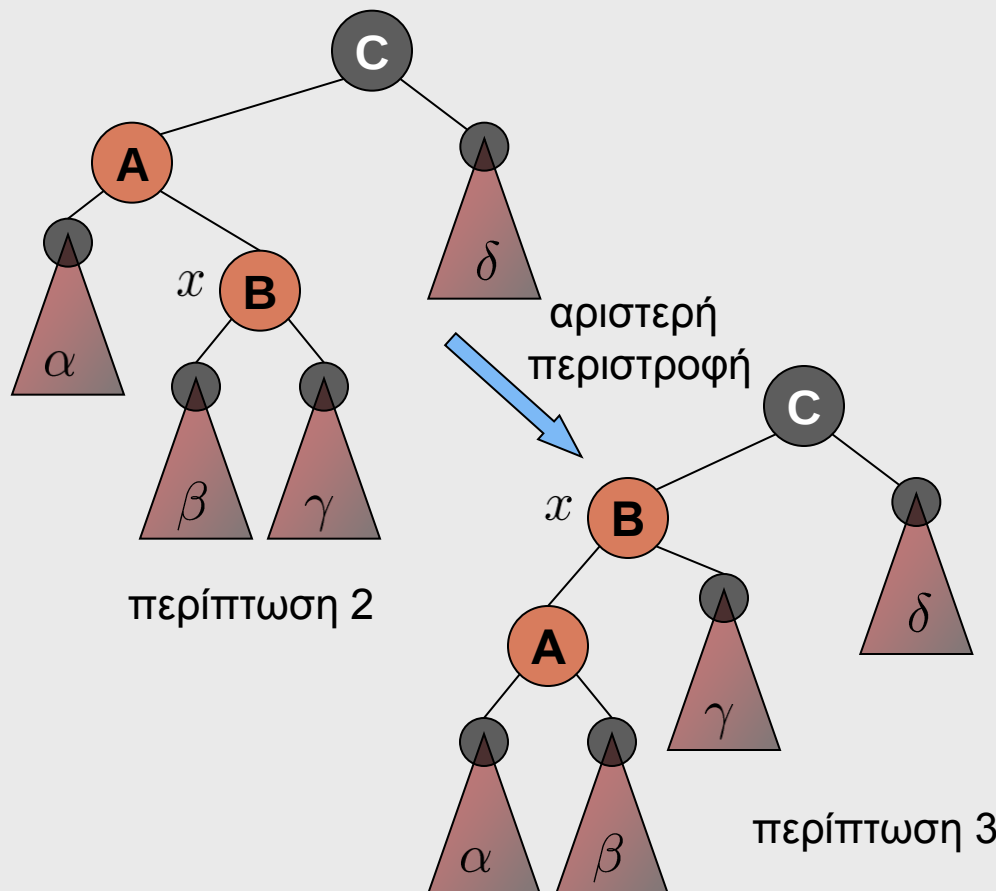
Εάν (λόγω συνεχούς εφαρμογής της περίπτωσης 1) φθάσουμε στη ρίζα, την χρωματίζουμε με μαύρο χρώμα και σταματάμε.

Εισαγωγή

Αποκατάσταση ιδιοτήτων χρωματισμού μετά από εισαγωγή

Περίπτωση 2

Ο θείος έχει μαύρο χρώμα και ο x είναι δεξί παιδί του πατέρα του: ανάγουμε την περίπτωση αυτή στην περίπτωση 3 με την εκτέλεση μιας περιστροφής (x και πατέρα του).

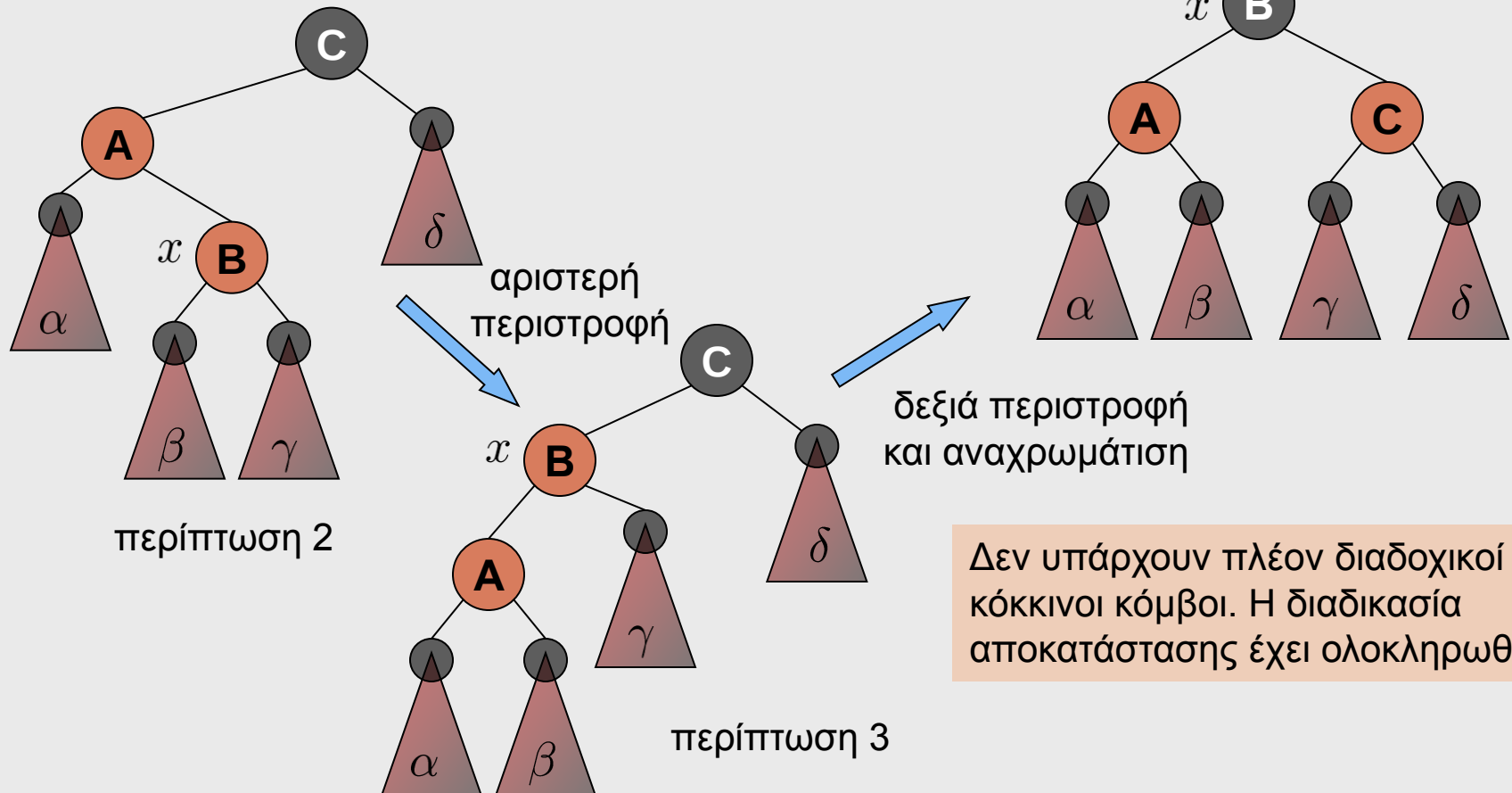


Εισαγωγή

Αποκατάσταση ιδιοτήτων χρωματισμού μετά από εισαγωγή

Περίπτωση 3

Ο θείος έχει μαύρο χρώμα και ο x είναι αριστερό παιδί του πατέρα του. Το χρώμα του πατέρα του x αλλάζει σε μαύρο και του παππού σε κόκκινο και εκτελείται μια δεξιά περιστροφή (x και παππούς του). Τερματίζουμε.



Εισαγωγή

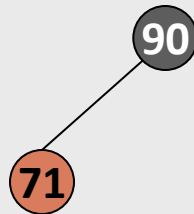
Εισαγωγή κατά σειρά των κλειδιών 90 71 64 2 4 12 5 21 19 52



90

Εισαγωγή

Εισαγωγή κατά σειρά των κλειδιών 90 71 64 2 4 12 5 21 19 52

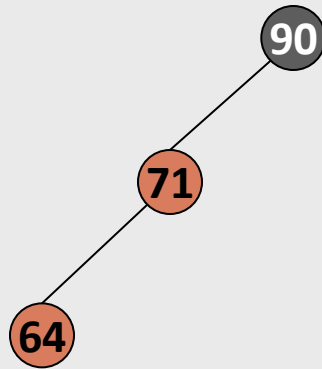


Εισαγωγή

Εισαγωγή κατά σειρά των κλειδιών 90 71 64 2 4 12 5 21 19 52

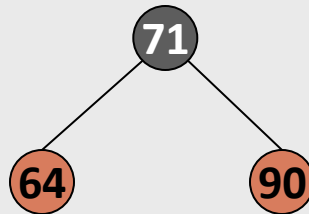


Περίπτωση 3



Εισαγωγή

Εισαγωγή κατά σειρά των κλειδιών 90 71 64 2 4 12 5 21 19 52

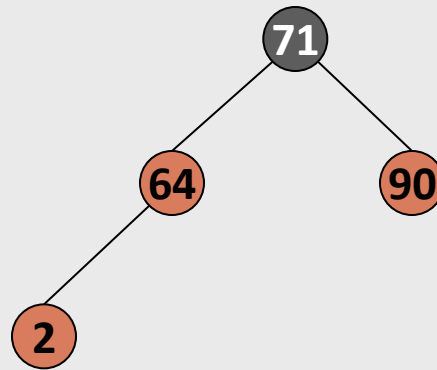


Εισαγωγή

Εισαγωγή κατά σειρά των κλειδιών 90 71 64 2 4 12 5 21 19 52

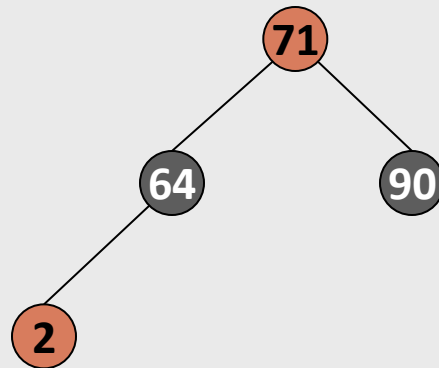


Περίπτωση 1



Εισαγωγή

Εισαγωγή κατά σειρά των κλειδιών 90 71 64 2 4 12 5 21 19 52

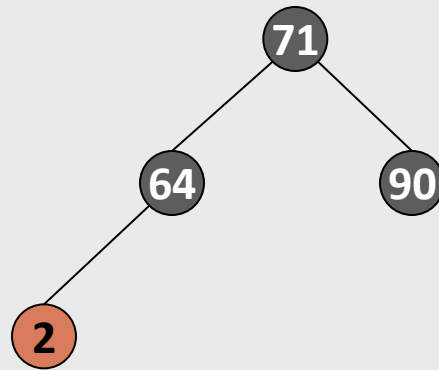


Περίπτωση 1

Αλλάζουμε το χρώμα της ρίζας σε μαύρο

Εισαγωγή

Εισαγωγή κατά σειρά των κλειδιών 90 71 64 2 4 12 5 21 19 52

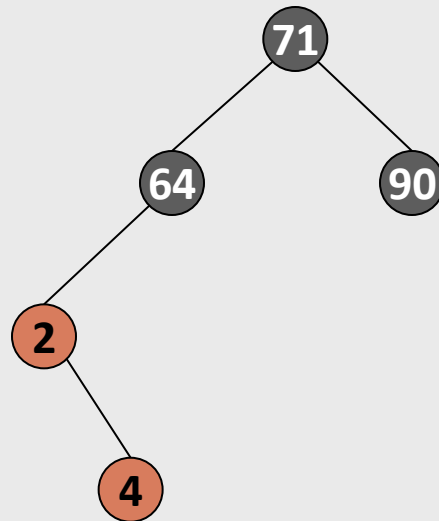


Εισαγωγή

Εισαγωγή κατά σειρά των κλειδιών 90 71 64 2 4 12 5 21 19 52

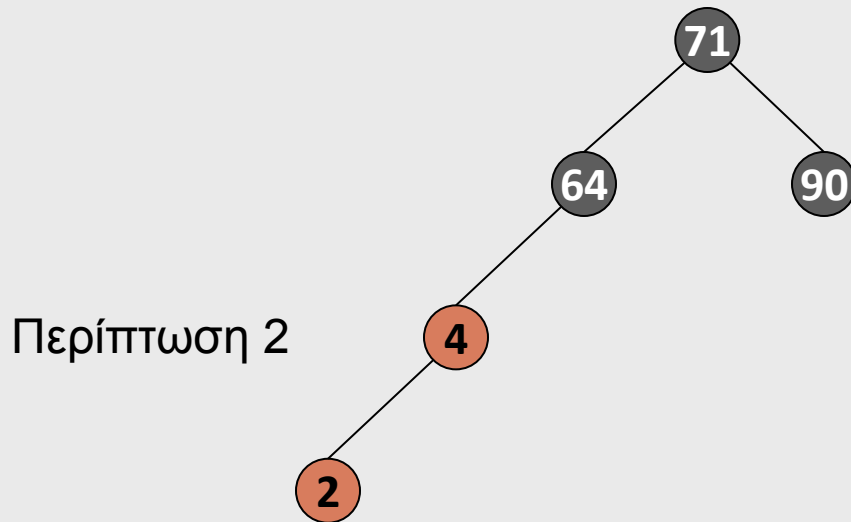


Περίπτωση 2



Εισαγωγή

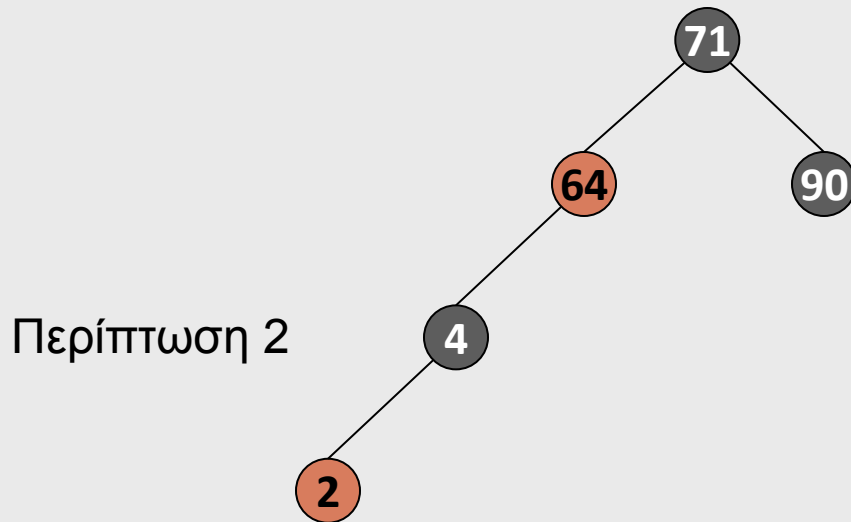
Εισαγωγή κατά σειρά των κλειδιών 90 71 64 2 4 12 5 21 19 52



Μετά την πρώτη περιστροφή → Περίπτωση 3

Εισαγωγή

Εισαγωγή κατά σειρά των κλειδιών 90 71 64 2 4 12 5 21 19 52

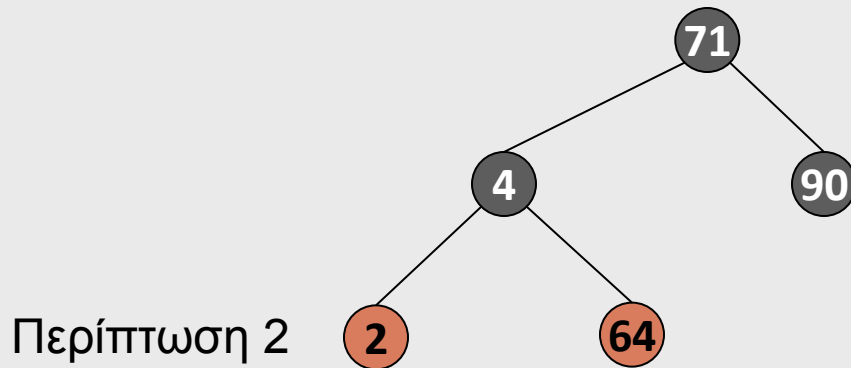


Μετά την πρώτη περιστροφή → Περίπτωση 3

Μετά την αλλαγή χρωμάτων

Εισαγωγή

Εισαγωγή κατά σειρά των κλειδιών 90 71 64 2 4 12 5 21 19 52



Μετά την πρώτη περιστροφή → Περίπτωση 3

Μετά την αλλαγή χρωμάτων

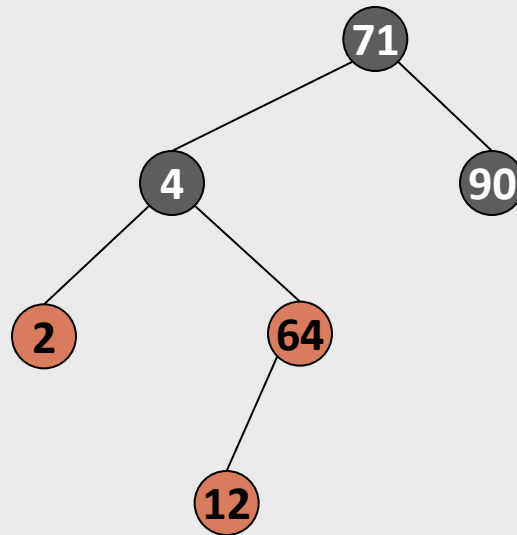
Μετά τη δεύτερη περιστροφή

Εισαγωγή

Εισαγωγή κατά σειρά των κλειδιών 90 71 64 2 4 12 5 21 19 52



Περίπτωση 1

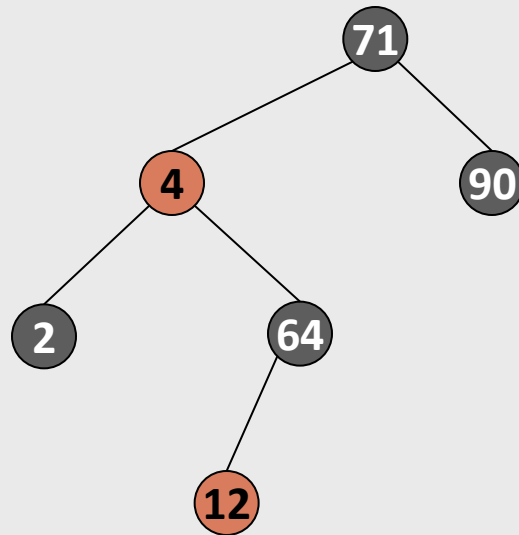


Εισαγωγή

Εισαγωγή κατά σειρά των κλειδιών 90 71 64 2 4 12 5 21 19 52



Περίπτωση 1

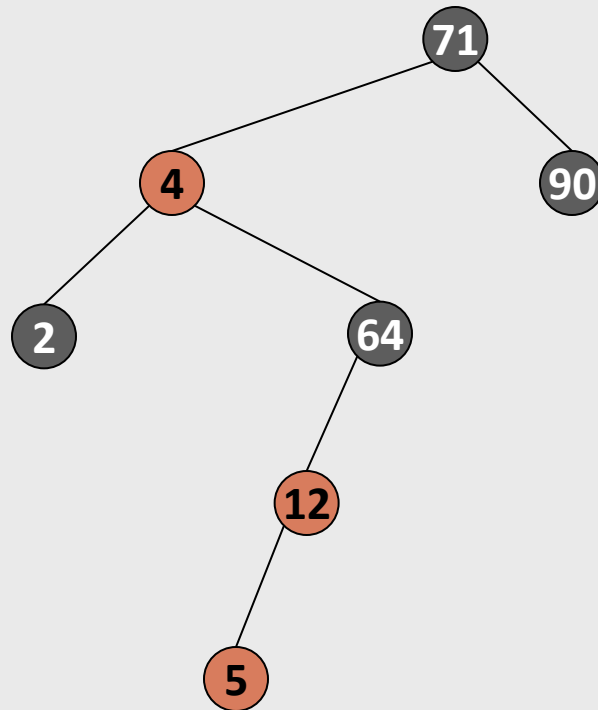


Εισαγωγή

Εισαγωγή κατά σειρά των κλειδιών 90 71 64 2 4 12 5 21 19 52



Περίπτωση 3

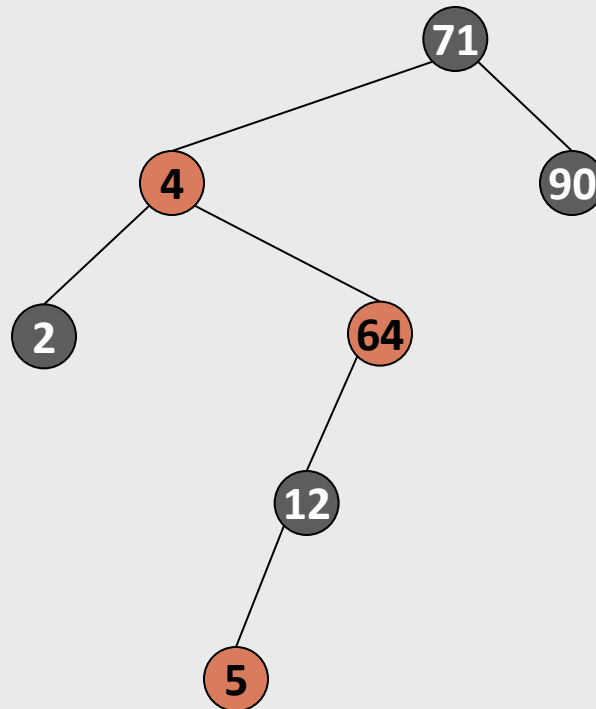


Εισαγωγή

Εισαγωγή κατά σειρά των κλειδιών 90 71 64 2 4 12 5 21 19 52



Περίπτωση 3



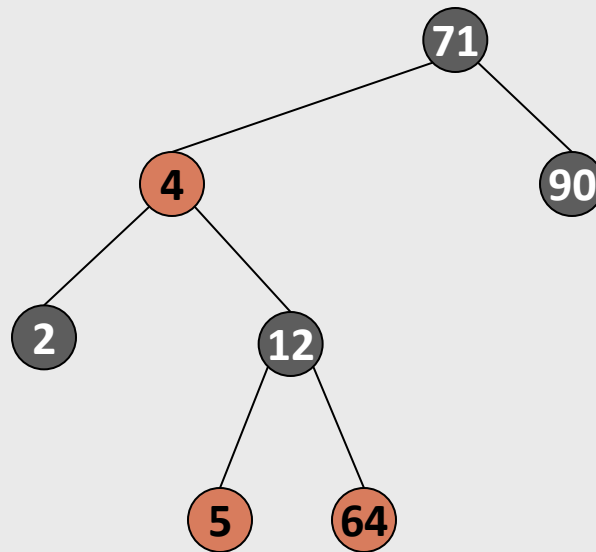
Μετά την αλλαγή χρωμάτων

Εισαγωγή

Εισαγωγή κατά σειρά των κλειδιών 90 71 64 2 4 12 5 21 19 52



Περίπτωση 3



Μετά την αλλαγή χρωμάτων

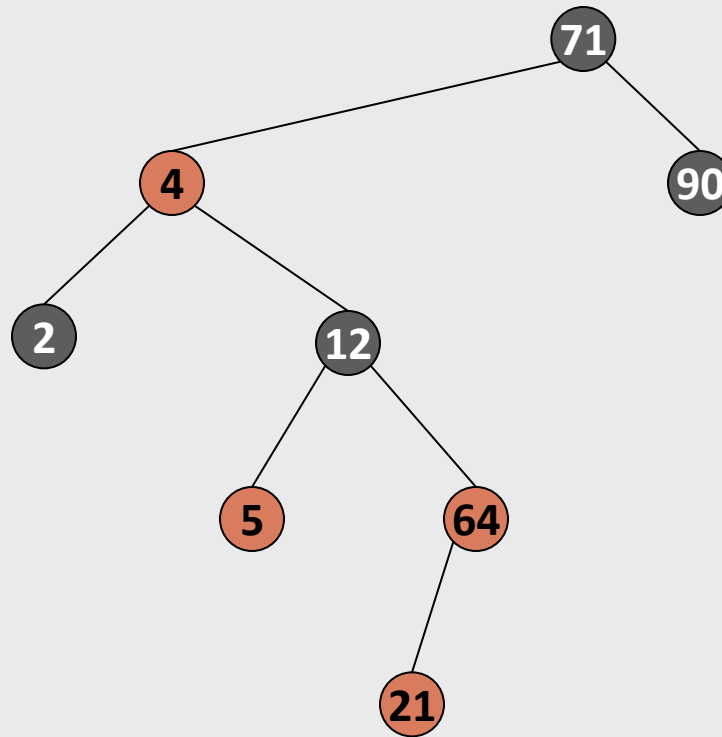
Μετά την περιστροφή

Εισαγωγή

Εισαγωγή κατά σειρά των κλειδιών 90 71 64 2 4 12 5 21 19 52



Περίπτωση 1

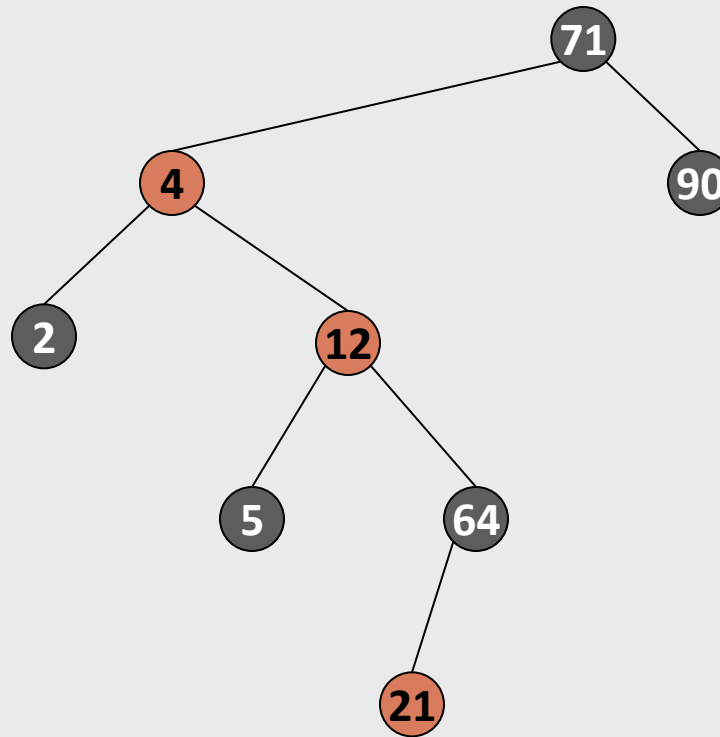


Εισαγωγή

Εισαγωγή κατά σειρά των κλειδιών 90 71 64 2 4 12 5 21 19 52



Περίπτωση 2

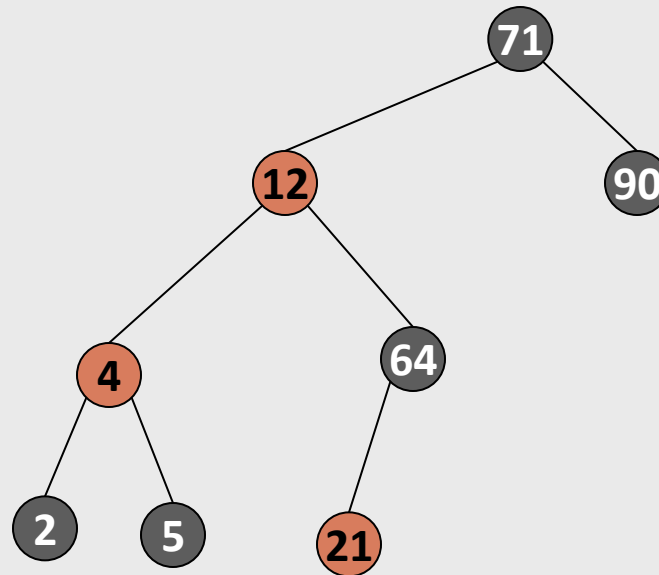


Εισαγωγή

Εισαγωγή κατά σειρά των κλειδιών 90 71 64 2 4 12 5 21 19 52



Περίπτωση 2



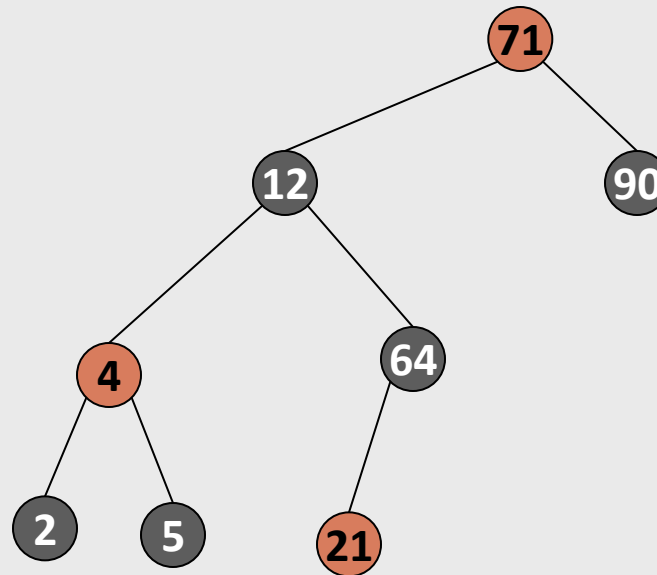
Μετά την πρώτη περιστροφή → Περίπτωση 3

Εισαγωγή

Εισαγωγή κατά σειρά των κλειδιών 90 71 64 2 4 12 5 21 19 52



Περίπτωση 2



Μετά την πρώτη περιστροφή → Περίπτωση 3

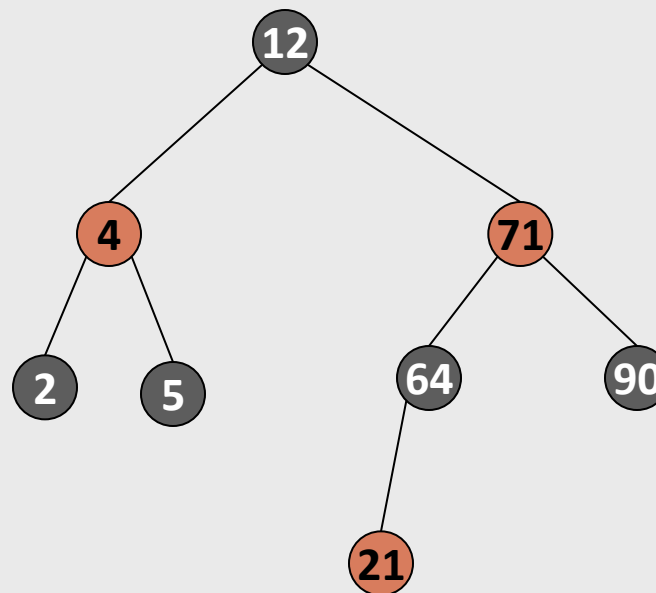
Μετά την αλλαγή χρωμάτων

Εισαγωγή

Εισαγωγή κατά σειρά των κλειδιών 90 71 64 2 4 12 5 21 19 52



Περίπτωση 2



Μετά την πρώτη περιστροφή → Περίπτωση 3

Μετά την αλλαγή χρωμάτων

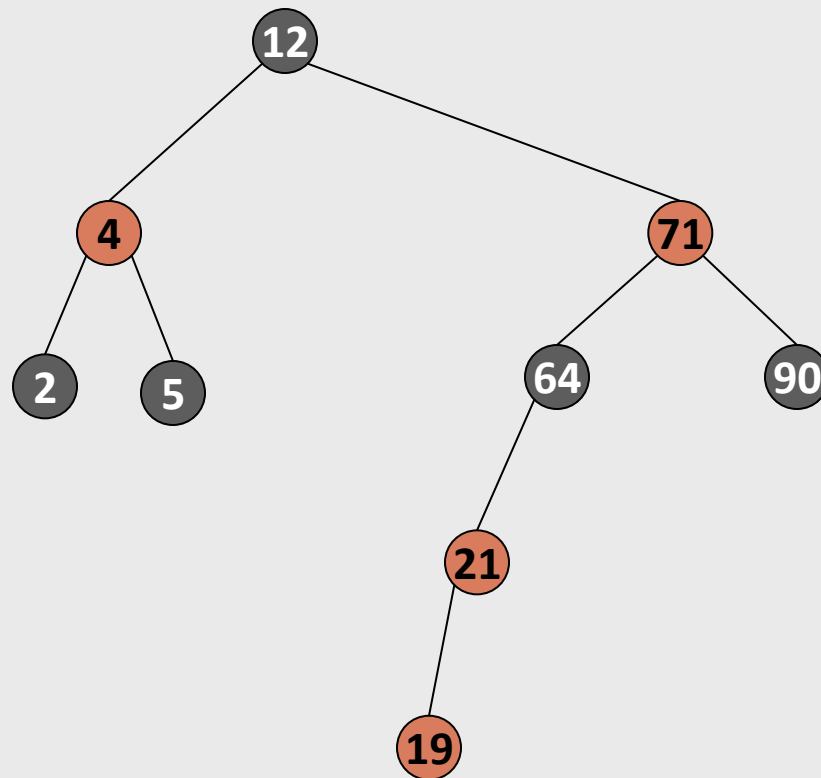
Μετά τη δεύτερη περιστροφή

Εισαγωγή

Εισαγωγή κατά σειρά των κλειδιών 90 71 64 2 4 12 5 21 19 52



Περίπτωση 3

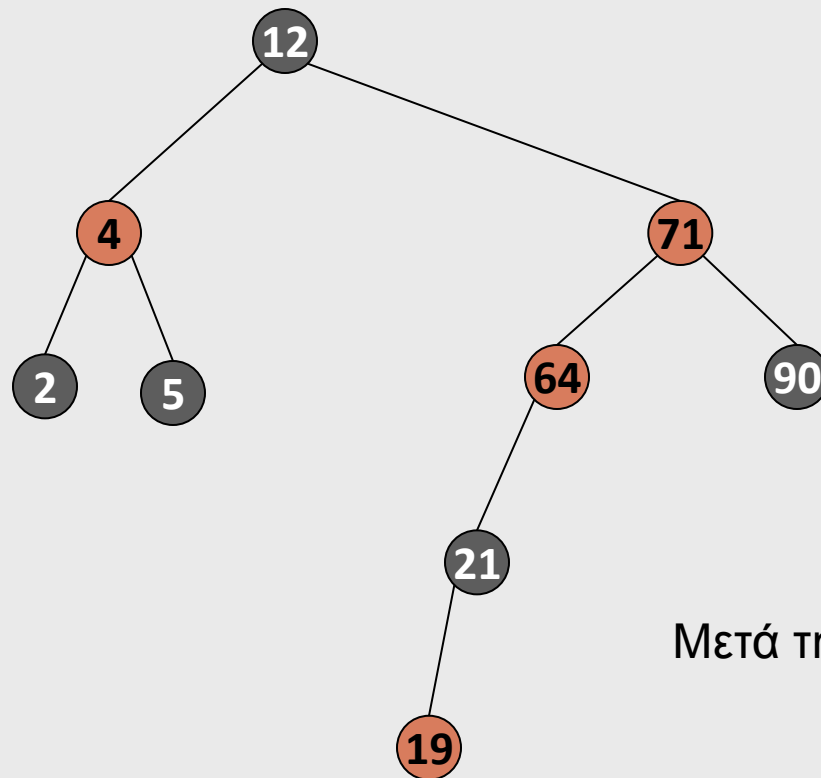


Εισαγωγή

Εισαγωγή κατά σειρά των κλειδιών 90 71 64 2 4 12 5 21 19 52



Περίπτωση 3



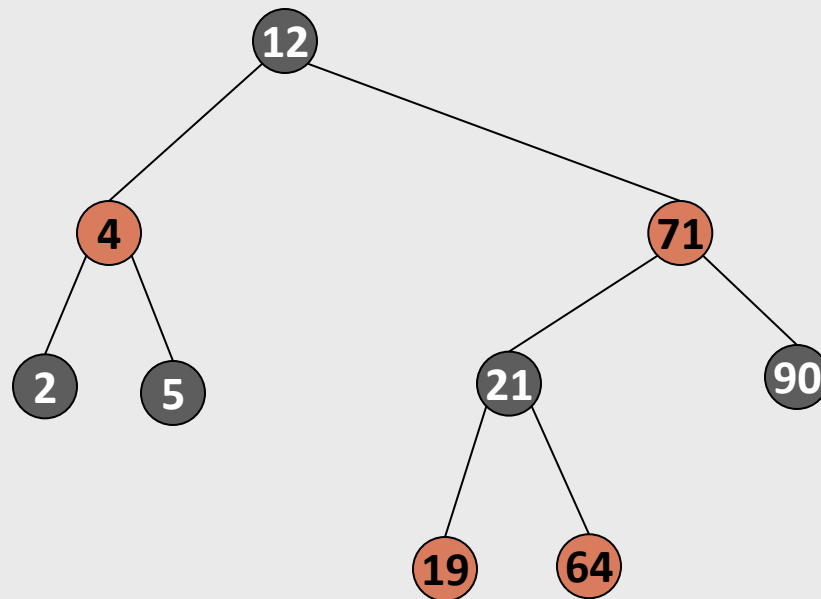
Μετά την αλλαγή χρωμάτων

Εισαγωγή

Εισαγωγή κατά σειρά των κλειδιών 90 71 64 2 4 12 5 21 19 52



Περίπτωση 3



Μετά την αλλαγή χρωμάτων

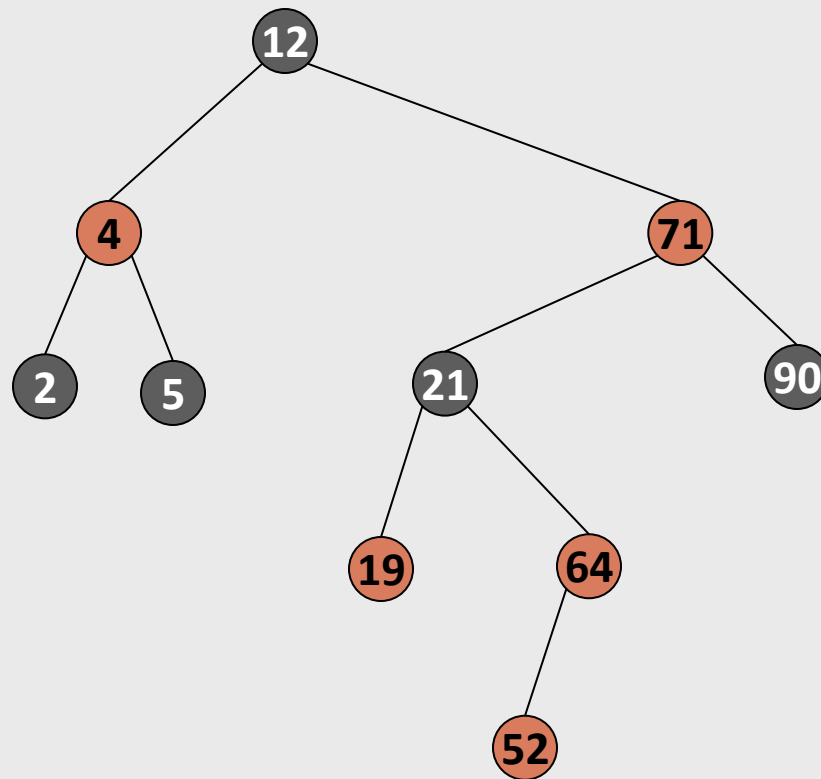
Μετά την περιστροφή

Εισαγωγή

Εισαγωγή κατά σειρά των κλειδιών 90 71 64 2 4 12 5 21 19 52



Περίπτωση 1

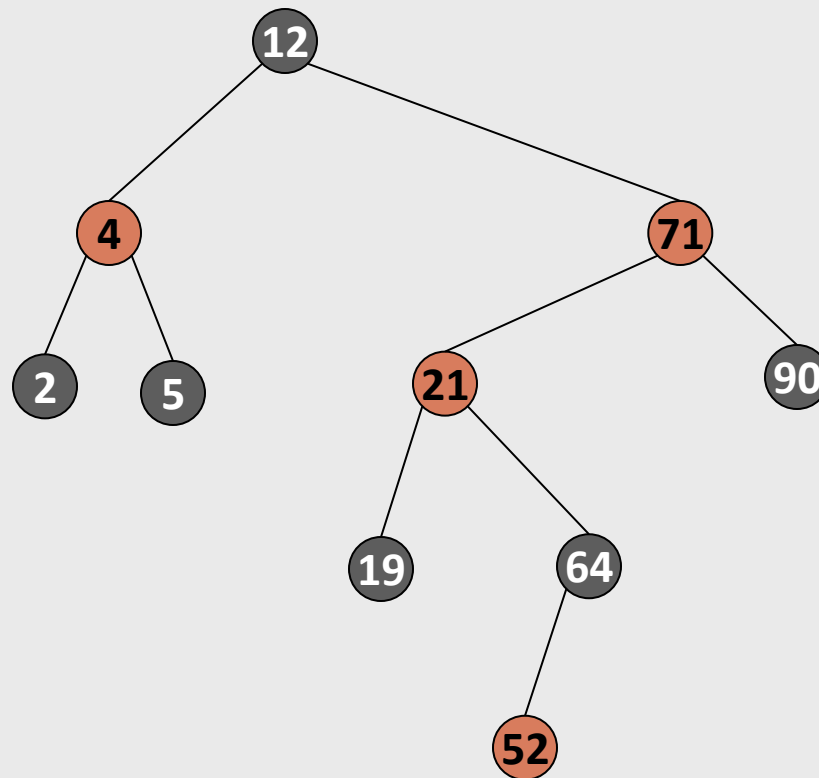


Εισαγωγή

Εισαγωγή κατά σειρά των κλειδιών 90 71 64 2 4 12 5 21 19 52



Περίπτωση 1

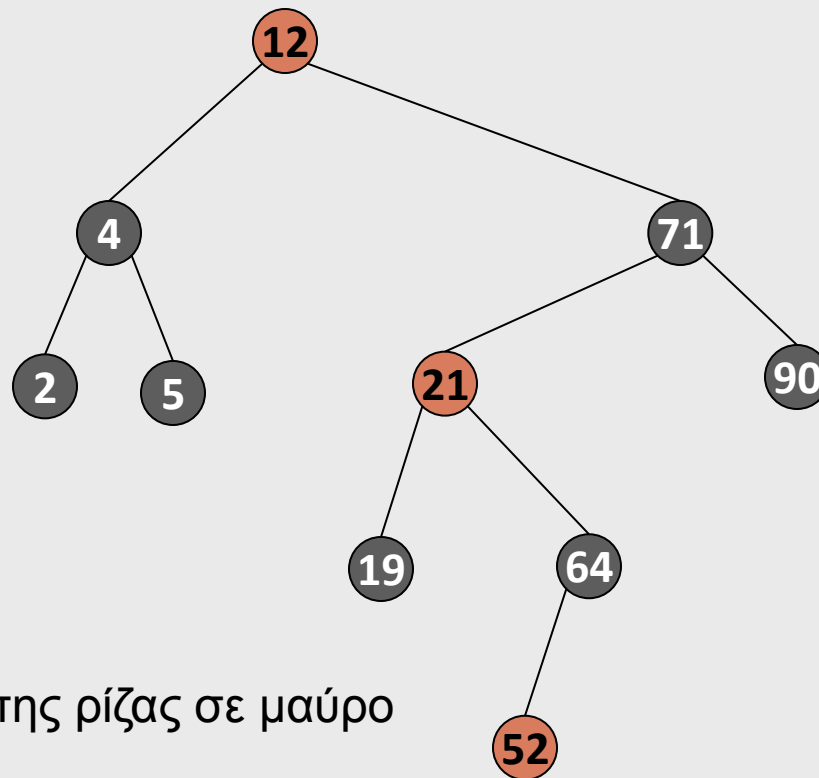


Εισαγωγή

Εισαγωγή κατά σειρά των κλειδιών 90 71 64 2 4 12 5 21 19 52



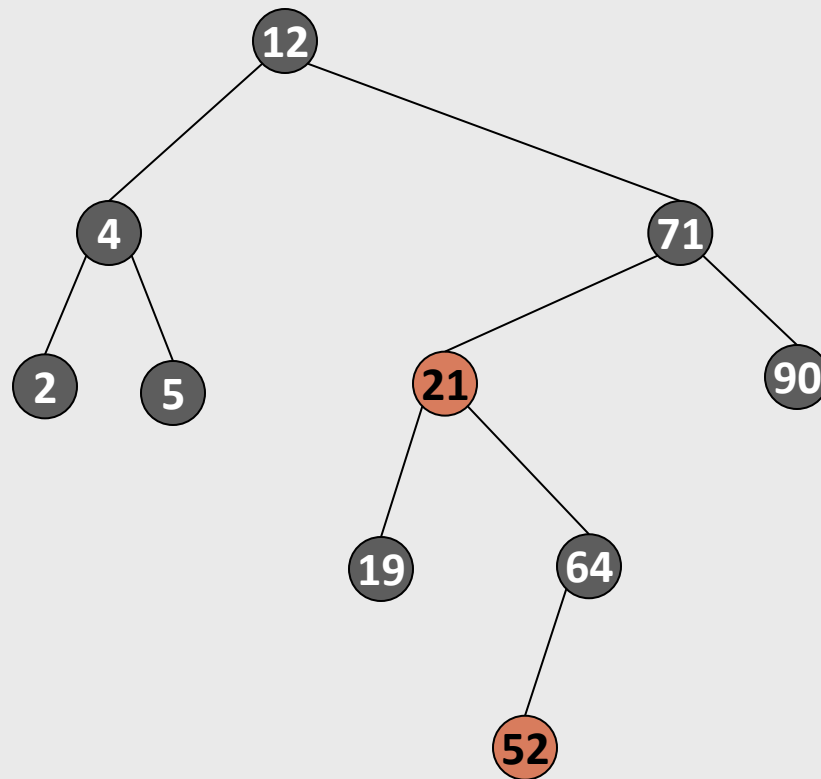
Περίπτωση 1



Αλλάζουμε το χρώμα της ρίζας σε μαύρο

Εισαγωγή

Εισαγωγή κατά σειρά των κλειδιών 90 71 64 2 4 12 5 21 19 52



Εισαγωγή

1. Εκτελούμε τον αλγόριθμο εισαγωγής όπως σε ένα απλό δυαδικό δένδρο. Χρωματίζουμε το νέο κόμβο ερυθρό.
2. Αποκαθιστούμε τις ιδιότητες του κοκκινόμαυρου δένδρου χρησιμοποιώντας περιστροφές και αλλαγή χρωμάτων
3. Ολοκληρώνεται σε χρόνο $O(\log n)$
 - $O(\log n)$ αναχρωματίσεις
 - το πολύ δύο περιστροφές

Διαγραφή

Διαγραφή κόμβου σε κοκκινόμαυρο δένδρο

Έστω y ο κόμβος που θέλουμε να διαγράψουμε. Εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο διαγραφής όπως στο απλό δυαδικό δένδρο αναζήτησης, διαγράφοντας τον κόμβο z όπου:

- 1) $z=y$ αν ο y είναι φύλλο
- 2) $z=\text{παιδί του } y$ αν ο y έχει μόνο ένα παιδί
- 3) $z=\text{διάδοχος του } y$ αν ο y έχει 2 παιδιά

(Στις περιπτώσεις 2 και 3 αντιγράφουμε τα περιεχόμενα του z στον y πριν τη διαγραφή.)

Στη συνέχεια, ελέγχουμε εάν ισχύουν οι ιδιότητες χρωματισμού, και εάν όχι, εκτελούμε κατάλληλες ενέργειες.

Διαγραφή

Διαγραφή κόμβου σε κοκκινόμαυρο δένδρο

1. Ο z είναι κόκκινος ή είναι μαύρος με κόκκινο παιδί: Δεν υπάρχει πρόβλημα. (Στη δεύτερη περίπτωση το μοναδικό παιδί του z γίνεται μαύρο.)
2. Ο z είναι μαύρος με μαύρο παιδί: Η διαγραφή του z δημιουργεί (τουλάχιστον) ένα μονοπάτι από τη ρίζα με μαύρο ύψος μικρότερο κατά ένα. Υποθέτουμε ότι η μονάδα μαύρου χρώματος του z μεταφέρεται στο παιδί του x , το οποίο τώρα γίνεται διπλά μαύρο (που είναι μη επιτρεπτό). Πρέπει να μεταφέρουμε την επιπλέον μονάδα μαύρου χρώματος προς τα επάνω στο δένδρο μέχρι :
 - να φθάσουμε στη ρίζα ή
 - να βρούμε έναν κατάλληλο κόκκινο κόμβο τον οποίο χρωματίζουμε μαύρο και τερματίζουμε ή
 - να εκτελέσουμε κατάλληλες περιστροφές και επαναχρωματισμούς κάποιων κόμβων ώστε να λυθεί το πρόβλημα.

Διαγραφή

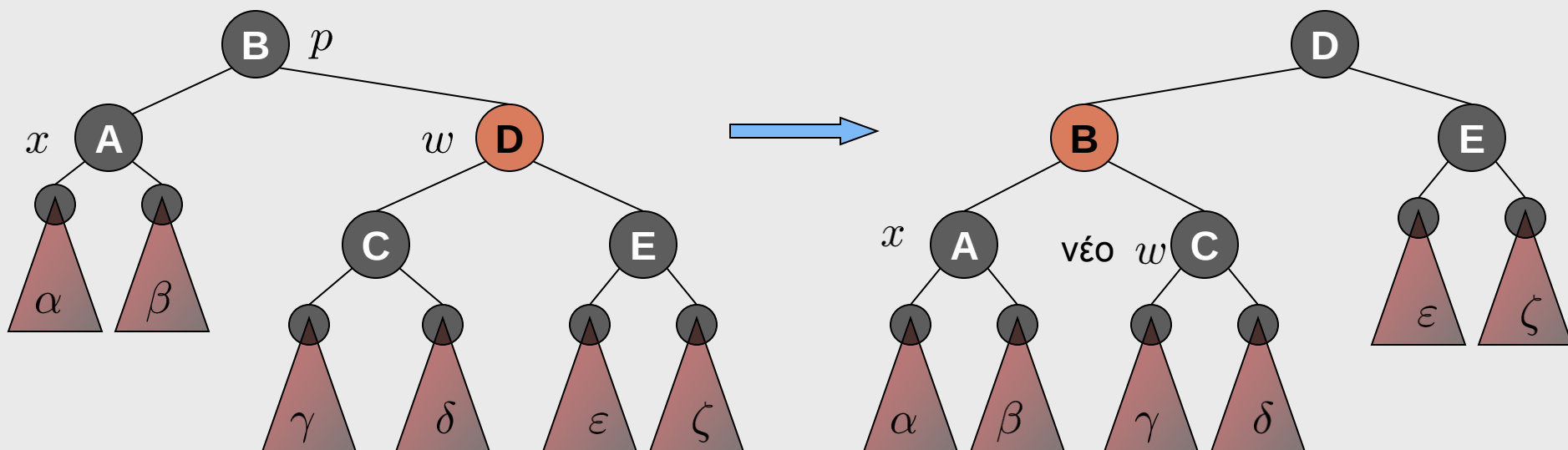
Αποκατάσταση ιδιοτήτων χρωματισμού μετά από εισαγωγή

x = το (διπλά μαύρο) παιδί του κόμβου που διαγράφηκε (μπορεί να είναι ο κενός κόμβος)

w = ο αδελφός του x (ο w δεν μπορεί να είναι ο κενός κόμβος. Γιατί;)

p = ο πατέρας του x . Υποθέτουμε ότι ο x είναι αριστερό παιδί του p . Η περίπτωση που ο x είναι δεξιό παιδί του p είναι συμμετρική.

Περίπτωση 1 Ο w έχει κόκκινο χρώμα. Αναγόμεστε στην **περίπτωση 2**, αλλάζοντας το χρώμα του w σε μαύρο και του p σε κόκκινο και εκτελώντας μια αριστερή περιστροφή γύρω από τον πατέρα του x .

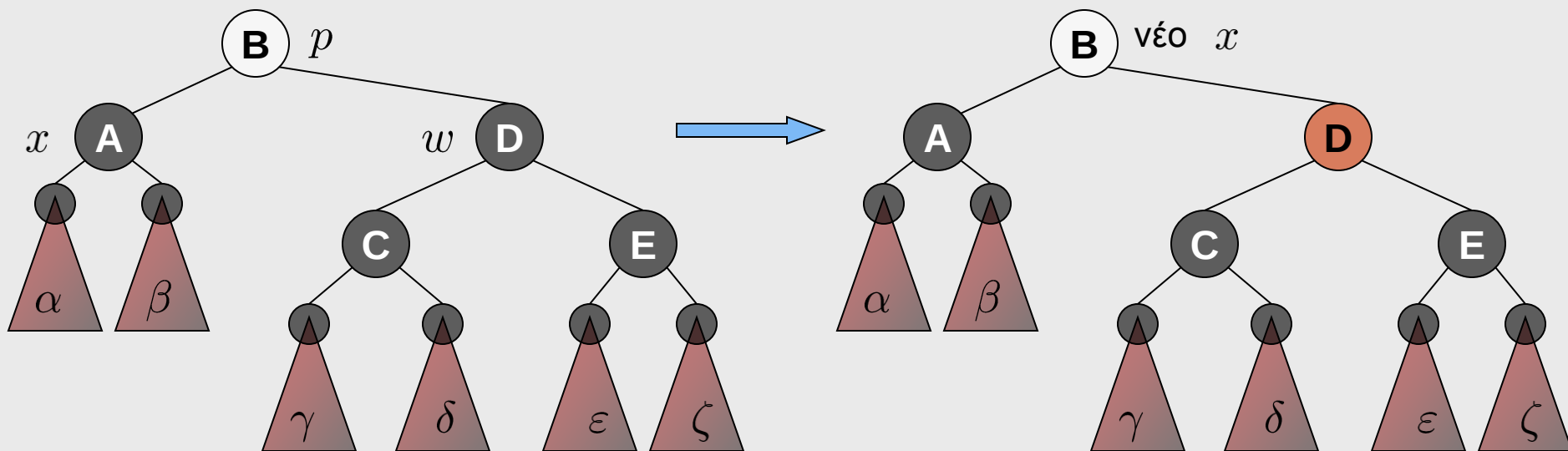


Διαγραφή

Αποκατάσταση ιδιοτήτων χρωματισμού μετά από εισαγωγή

Περίπτωση 2 Ο w έχει μαύρο χρώμα.

α) Και τα δύο παιδιά του w είναι μαύρα. Αλλάζουμε το χρώμα του w σε κόκκινο, του x σε μαύρο (από διπλά μαύρο) και μεταφέρουμε το μαύρο που αφαιρέσαμε από τους w και x στον p . Αν ο p είναι κόκκινος, γίνεται μαύρος και ο αλγόριθμος τερματίζει. Διαφορετικά ο p γίνεται διπλά μαύρος και η διαδικασία επαναλαμβάνεται με $x = p$.

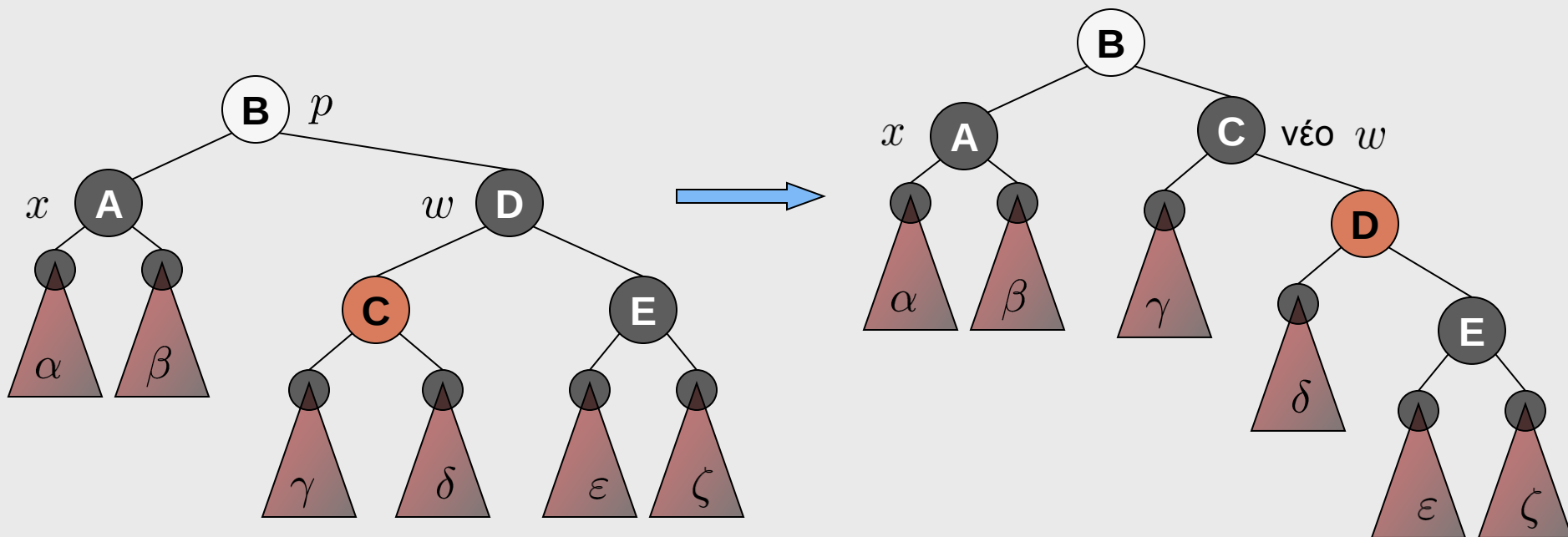


Διαγραφή

Αποκατάσταση ιδιοτήτων χρωματισμού μετά από εισαγωγή

Περίπτωση 2 Ο w έχει μαύρο χρώμα.

β) Το $w.\text{left}$ είναι κόκκινο και το $w.\text{right}$ μαύρο. Αλλάζουμε το χρώμα του w σε κόκκινο και του $w.\text{left}$ σε μαύρο και εκτελούμε δεξιά περιστροφή γύρω από τον $w \Rightarrow$ Μεταπίπτουμε στην περίπτωση 2γ.

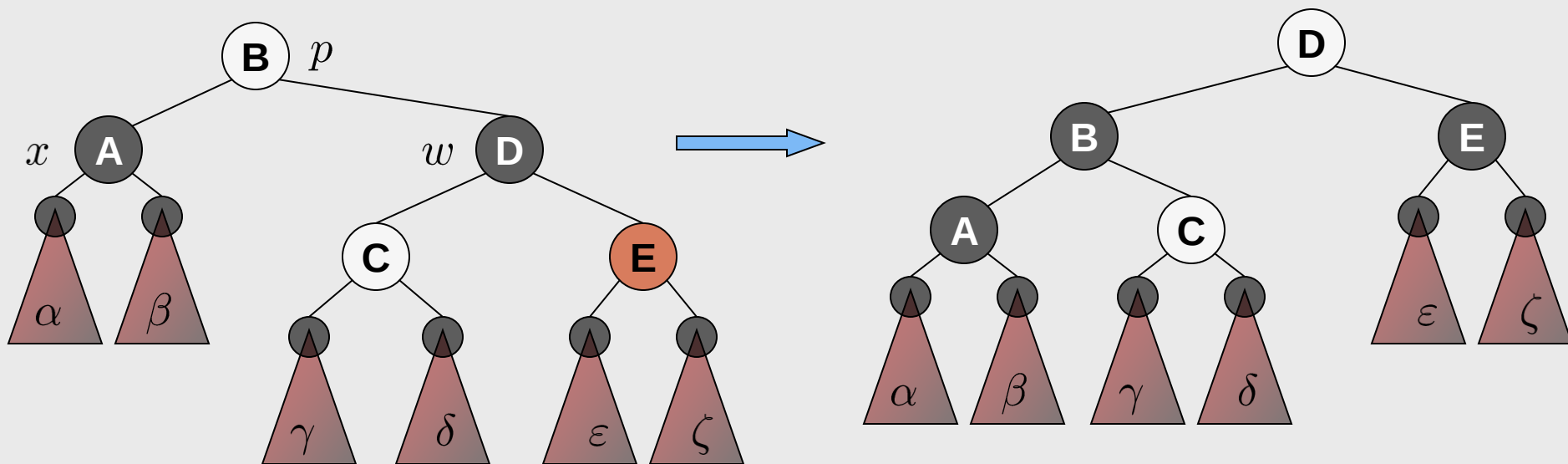


Διαγραφή

Αποκατάσταση ιδιοτήτων χρωματισμού μετά από εισαγωγή

Περίπτωση 2 Ο w έχει μαύρο χρώμα.

γ) Το $w.\text{right}$ είναι κόκκινο. Αλλάζουμε το χρώμα του $w.\text{right}$ σε μαύρο, του w σε ό,τι ήταν το χρώμα του p και του p σε μαύρο και εκτελούμε αριστερή περιστροφή γύρω από τον p . Ο αλγόριθμος τερματίζει.



Διαγραφή

x = το (διπλά μαύρο) παιδί του κόμβου που διαγράφηκε (μπορεί να είναι ο κενός κόμβος)

w = ο αδελφός του x

p = ο πατέρας του x . Υποθέτουμε ότι ο x είναι αριστερό παιδί του p . Η περίπτωση που ο x είναι δεξιό παιδί του p είναι συμμετρική.

Περίπτωση 1 Ο w έχει κόκκινο χρώμα. Αναγόμαστε στην **περίπτωση 2**, αλλάζοντας το χρώμα του w σε μαύρο και του p σε κόκκινο και εκτελώντας μια αριστερή περιστροφή γύρω από τον πατέρα του x .

Περίπτωση 2 Ο w έχει μαύρο χρώμα.

α) Και τα δύο παιδιά του w είναι μαύρα. Αλλάζουμε το χρώμα του w σε κόκκινο, του x σε μαύρο (από διπλά μαύρο) και μεταφέρουμε το μαύρο που αφαιρέσαμε από τους w και x στον p . Αν ο p είναι κόκκινος, γίνεται μαύρος και ο αλγόριθμος τερματίζει. Διαφορετικά ο p γίνεται διπλά μαύρος και η διαδικασία επαναλαμβάνεται με $x = p$.

β) Το $w.\text{left}$ είναι κόκκινο και το $w.\text{right}$ μαύρο. Αλλάζουμε το χρώμα του w σε κόκκινο και του $w.\text{left}$ σε μαύρο και εκτελούμε δεξιά περιστροφή γύρω από τον $w \Rightarrow$ Μεταπίπτουμε στην **περίπτωση 2γ**.

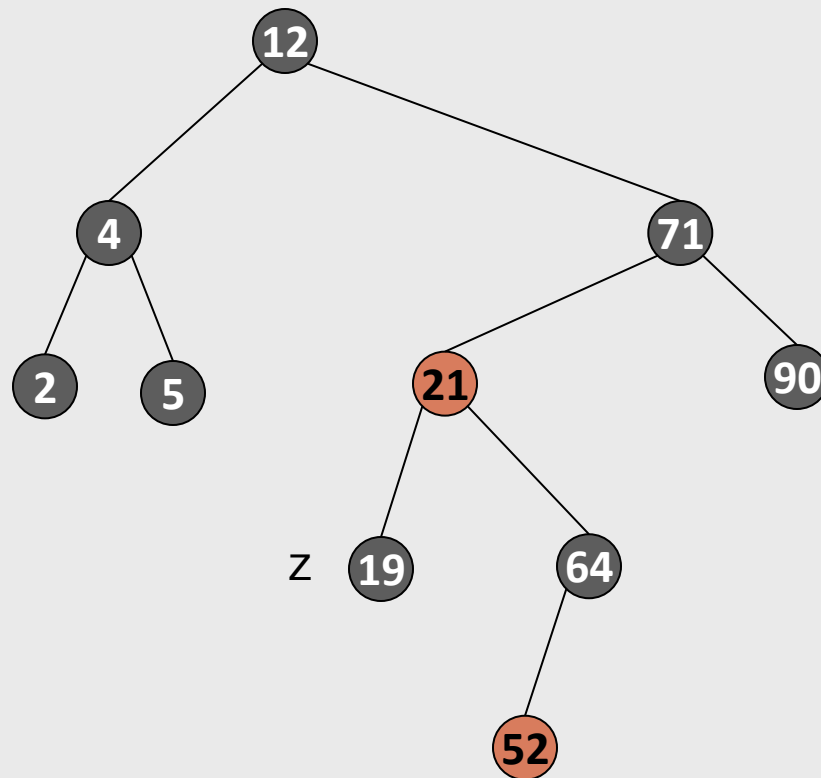
γ) Το $w.\text{right}$ είναι κόκκινο. Αλλάζουμε το χρώμα του $w.\text{right}$ σε μαύρο, του w σε ό,τι ήταν το χρώμα του p και του p σε μαύρο και εκτελούμε αριστερή περιστροφή γύρω από τον p . Ο αλγόριθμος τερματίζει.

Εάν ο x φθάσει στη ρίζα του δένδρου, αγνοούμε την επιπλέον μονάδα μαύρου χρώματος. Ο αλγόριθμος τερματίζει.

Διαγραφή

Διαγραφή κατά σειρά των κλειδιών 12 21 90 4 71 2 5
↑

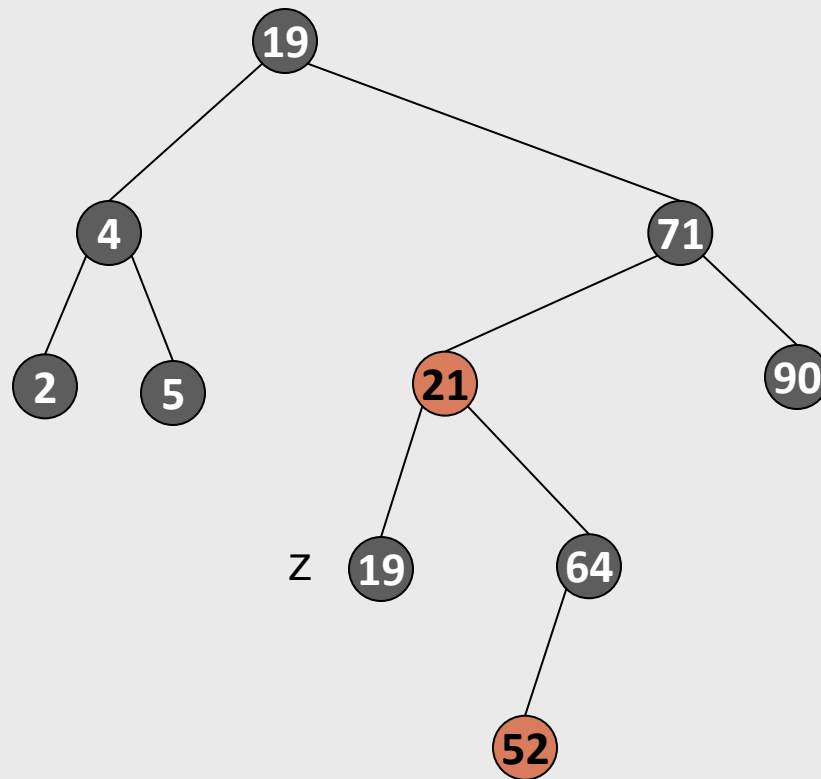
Ο διάδοχος του 12 είναι ο 19.
Αντιγράφουμε το 19 στον
κόμβο του 12.



Διαγραφή

Διαγραφή κατά σειρά των κλειδιών 12 21 90 4 71 2 5
↑

Ο διάδοχος του 12 είναι ο 19.
Αντιγράφουμε το 19 στον
κόμβο του 12.

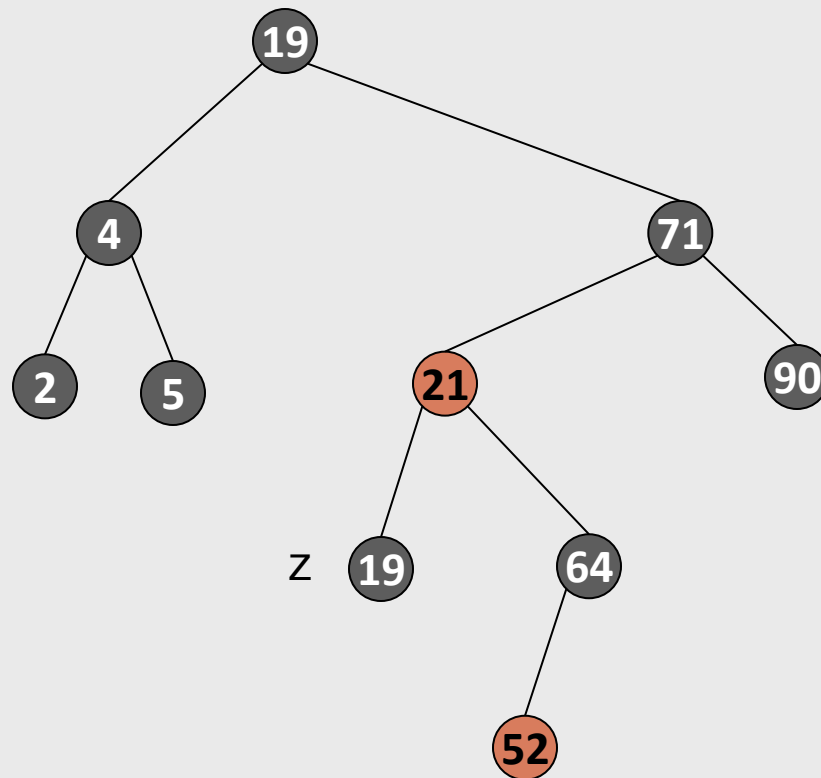


Διαγραφή

Διαγραφή κατά σειρά των κλειδιών 12 21 90 4 71 2 5
↑

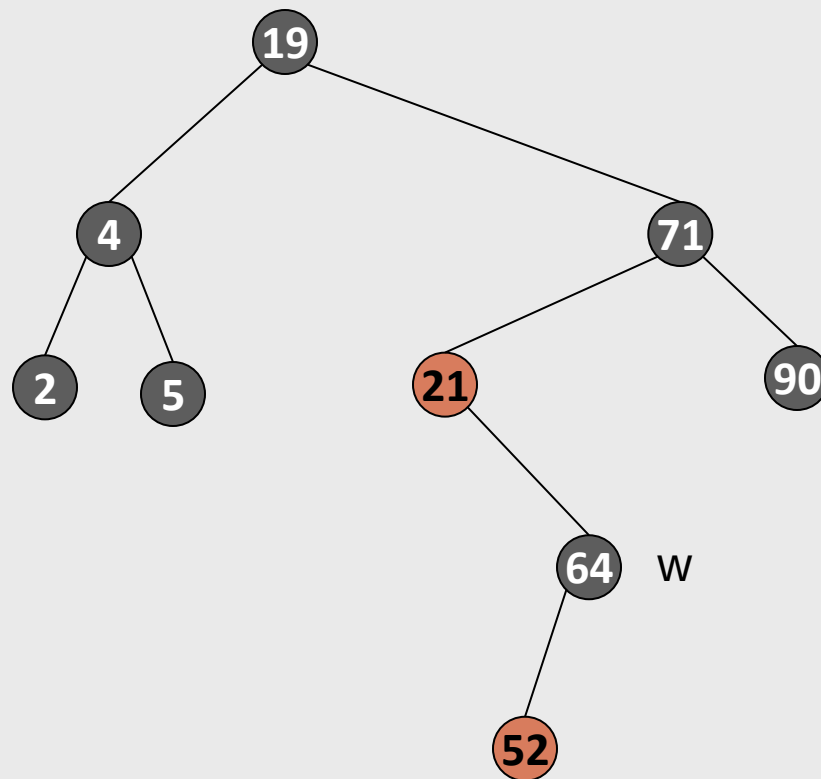
Ο διάδοχος του 12 είναι ο 19.
Αντιγράφουμε το 19 στον
κόμβο του 12.

Διαγράφουμε τον z.



Διαγραφή

Διαγραφή κατά σειρά των κλειδιών 12 21 90 4 71 2 5
↑



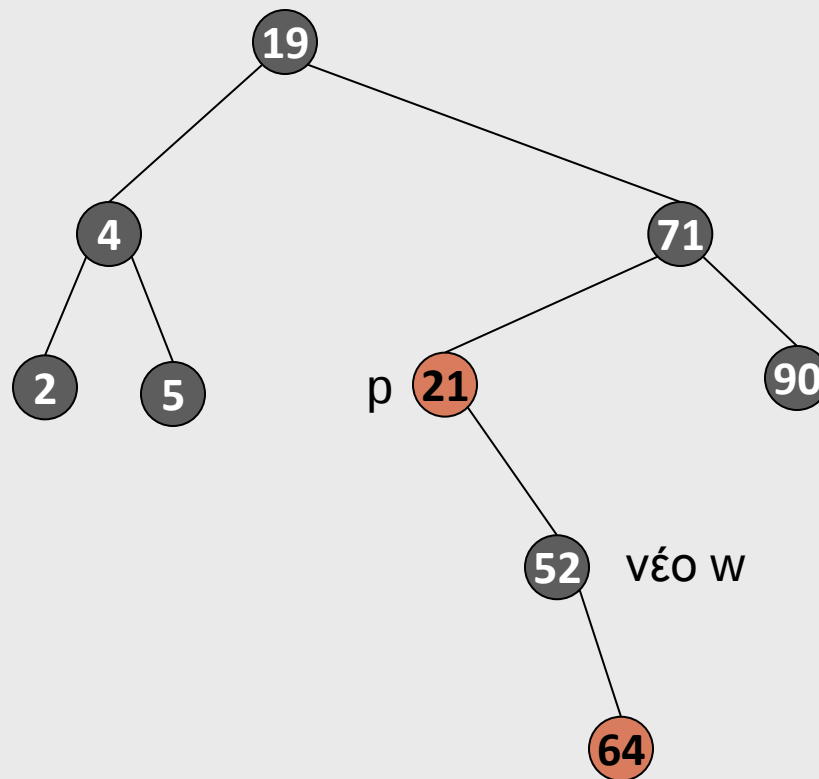
Ο διάδοχος του 12 είναι ο 19.
Αντιγράφουμε το 19 στον
κόμβο του 12.

Διαγράφουμε τον z.

Περίπτωση 2β:
Ο w γίνεται κόκκινος,
ο w.left μαύρος και εκτελούμε
δεξιά περιστροφή του w.

Διαγραφή

Διαγραφή κατά σειρά των κλειδιών 12 21 90 4 71 2 5
↑



Ο διάδοχος του 12 είναι ο 19.
Αντιγράφουμε το 19 στον
κόμβο του 12.

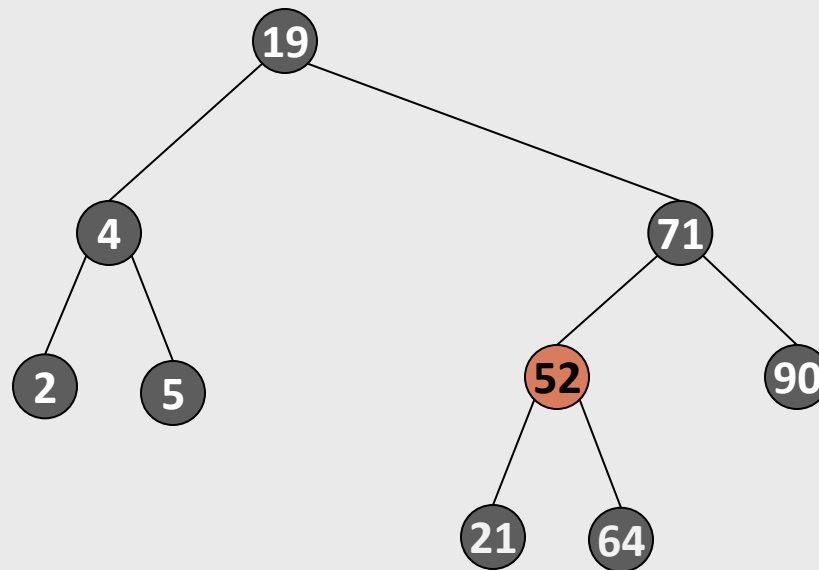
Διαγράφουμε τον z.

Περίπτωση 2β:
Ο w γίνεται κόκκινος,
ο w.left μαύρος και εκτελούμε
δεξιά περιστροφή του w.

Περίπτωση 2γ: Ο w.right
γίνεται μαύρος, ο w κόκκινος
και ο p μαύρος και εκτελούμε
αριστερή περιστροφή του p.
Ο αλγόριθμος τερματίζει.

Διαγραφή

Διαγραφή κατά σειρά των κλειδιών 12 21 90 4 71 2 5
↑



Ο διάδοχος του 12 είναι ο 19.
Αντιγράφουμε το 19 στον
κόμβο του 12.

Διαγράφουμε τον z.

Περίπτωση 2β:
Ο w γίνεται κόκκινος,
ο w.left μαύρος και εκτελούμε
δεξιά περιστροφή του w.

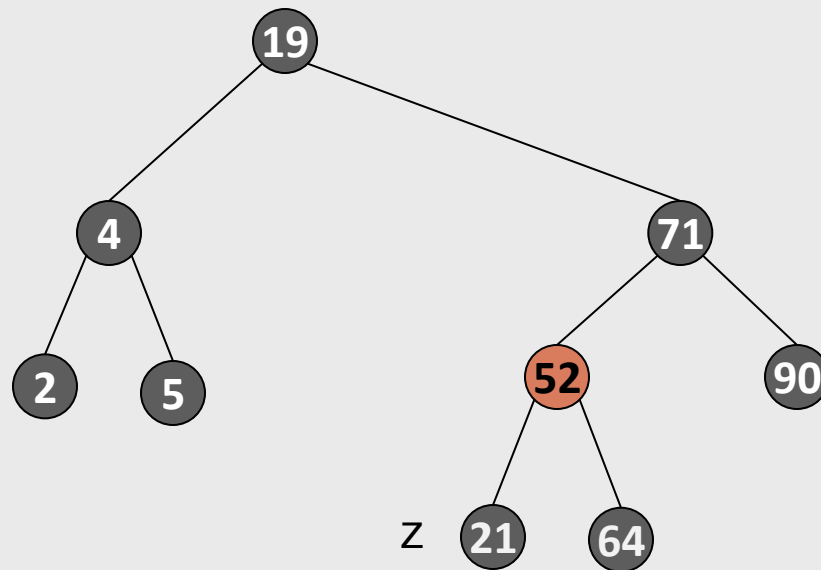
Περίπτωση 2γ: Ο w.right
γίνεται μαύρος, ο w κόκκινος
και ο p μαύρος και εκτελούμε
αριστερή περιστροφή του p.
Ο αλγόριθμος τερματίζει.

Διαγραφή

Διαγραφή κατά σειρά των κλειδιών 12 21 90 4 71 2 5



Διαγράφουμε τον z.



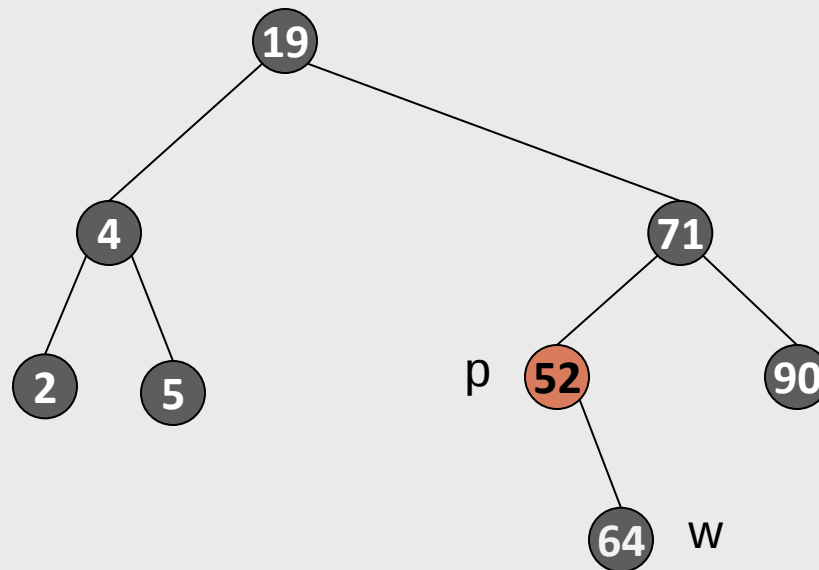
Διαγραφή

Διαγραφή κατά σειρά των κλειδιών 12 21 90 4 71 2 5



Διαγράφουμε τον z.

Περίπτωση 2α:
Ο w γίνεται κόκκινος,
και ο p μαύρος.



Διαγραφή

Διαγραφή κατά σειρά των κλειδιών 12 21 90 4 71 2 5

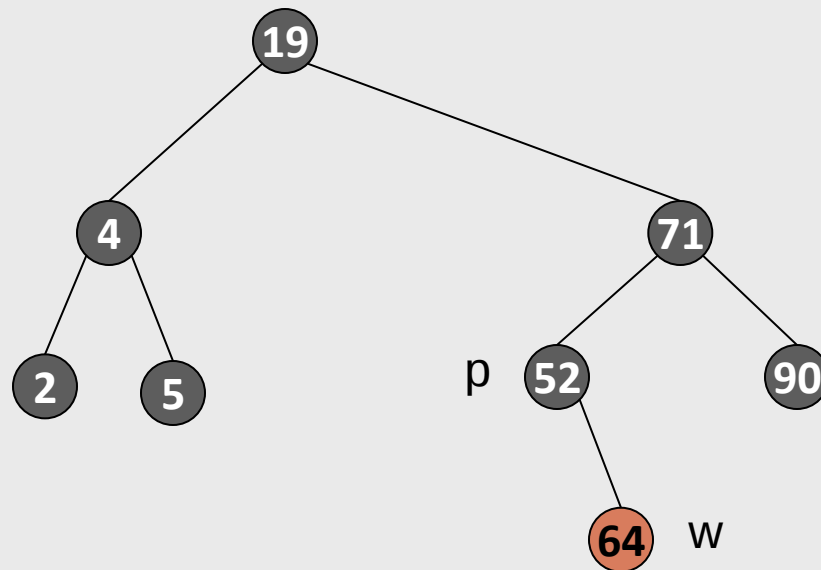


Διαγράφουμε τον z.

Περίπτωση 2α:

Ο w γίνεται κόκκινος,
και ο p μαύρος.

Ο αλγόριθμος τερματίζει.

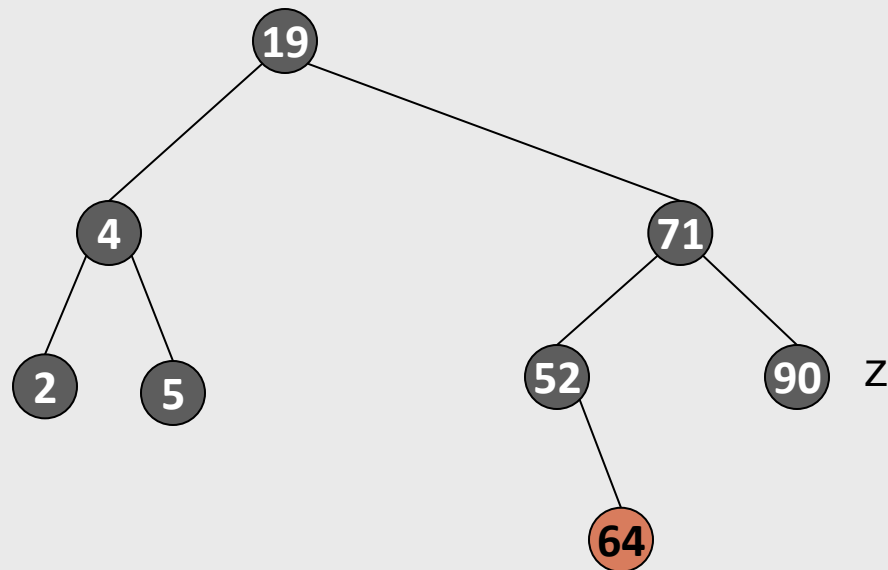


Διαγραφή

Διαγραφή κατά σειρά των κλειδιών 12 21 90 4 71 2 5



Διαγράφουμε τον z.



Διαγραφή

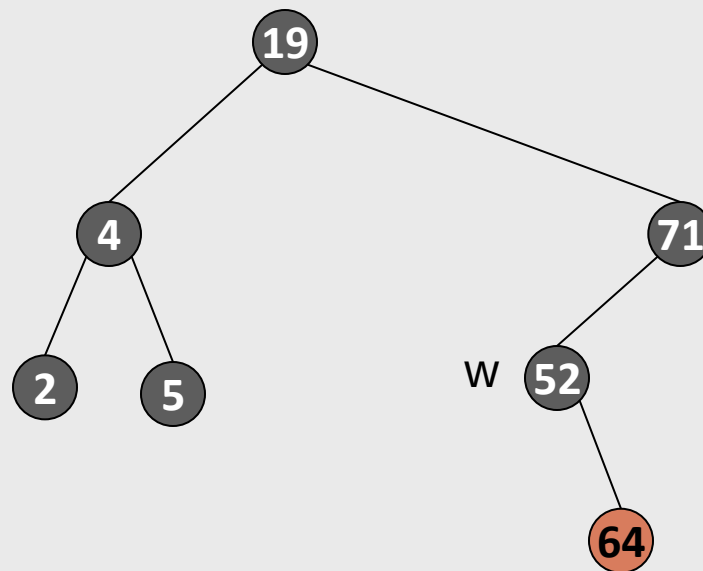
Διαγραφή κατά σειρά των κλειδιών 12 21 90 4 71 2 5



Διαγράφουμε τον z.

Περίπτωση 2β:

Ο w γίνεται κόκκινος,
ο w.right μαύρος και
εκτελούμε αριστερή
περιστροφή του w.



Διαγραφή

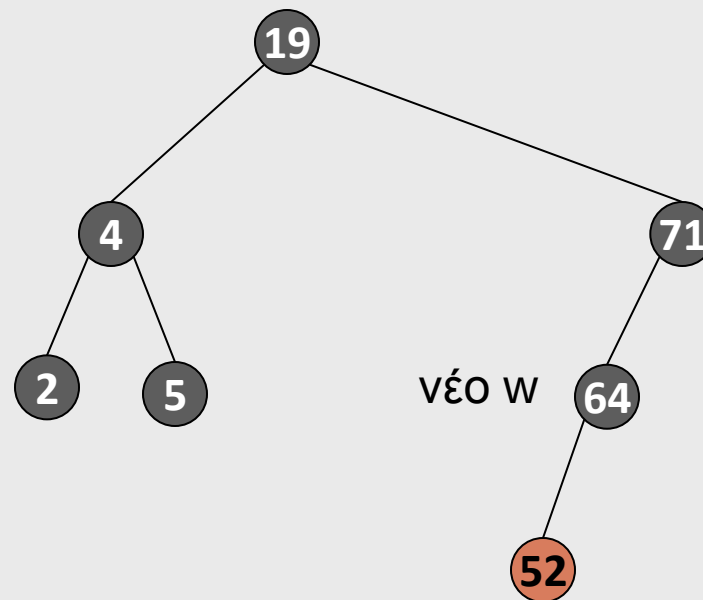
Διαγραφή κατά σειρά των κλειδιών 12 21 90 4 71 2 5



Διαγράφουμε τον z.

Περίπτωση 2β:

Ο w γίνεται κόκκινος,
ο w.right μαύρος και
εκτελούμε αριστερή
περιστροφή του w.



Περίπτωση 2γ: Ο w.left
γίνεται μαύρος, ο w μαύρος
και ο p μαύρος και εκτελούμε
δεξιά περιστροφή του p. Ο
αλγόριθμος τερματίζει.

Διαγραφή

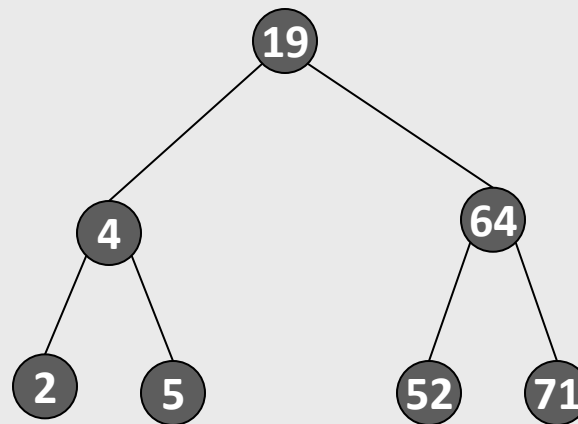
Διαγραφή κατά σειρά των κλειδιών 12 21 90 4 71 2 5



Διαγράφουμε τον z.

Περίπτωση 2β:

Ο w γίνεται κόκκινος,
ο w.right μαύρος και
εκτελούμε αριστερή
περιστροφή του w.



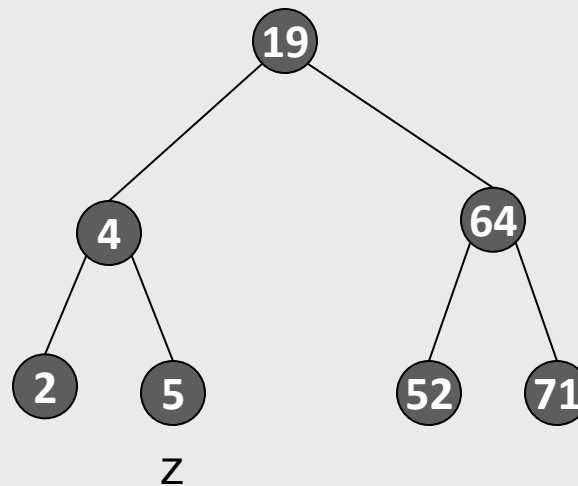
Περίπτωση 2γ: Ο w.left
γίνεται μαύρος, ο w μαύρος
και ο p μαύρος και εκτελούμε
δεξιά περιστροφή του p. Ο
αλγόριθμος τερματίζει.

Διαγραφή

Διαγραφή κατά σειρά των κλειδιών 12 21 90 4 71 2 5



Ο διάδοχος του 4 είναι ο 5.
Αντιγράφουμε το 5 στον
κόμβο του 4.

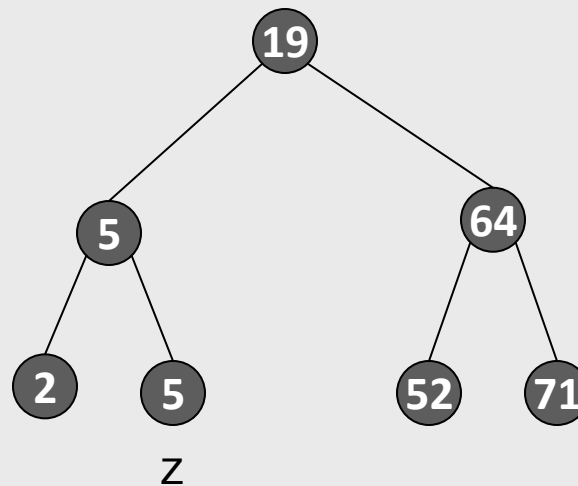


Διαγραφή

Διαγραφή κατά σειρά των κλειδιών 12 21 90 4 71 2 5



Ο διάδοχος του 4 είναι ο 5.
Αντιγράφουμε το 5 στον
κόμβο του 4.



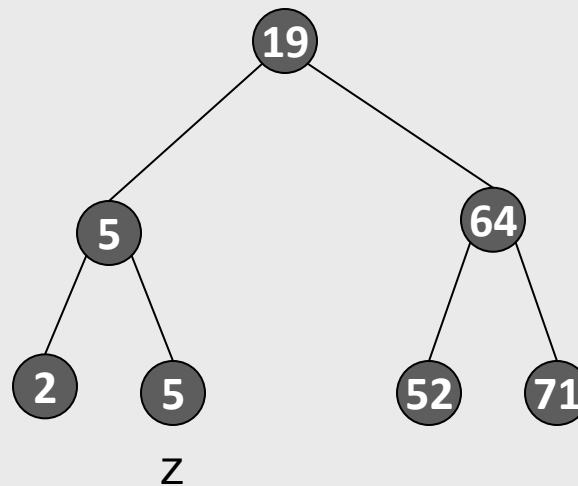
Διαγραφή

Διαγραφή κατά σειρά των κλειδιών 12 21 90 4 71 2 5



Ο διάδοχος του 4 είναι ο 5.
Αντιγράφουμε το 5 στον
κόμβο του 4.

Διαγράφουμε τον z.



Διαγραφή

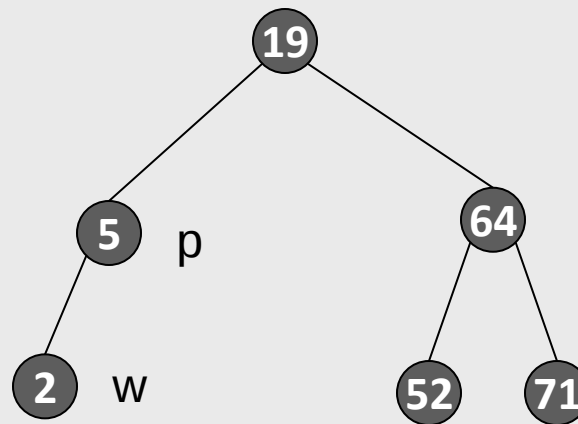
Διαγραφή κατά σειρά των κλειδιών 12 21 90 4 71 2 5



Ο διάδοχος του 4 είναι ο 5.
Αντιγράφουμε το 5 στον
κόμβο του 4.

Διαγράφουμε τον z.

Περίπτωση 2α:
Ο w γίνεται κόκκινος,
και ο p διπλά μαύρος.



Διαγραφή

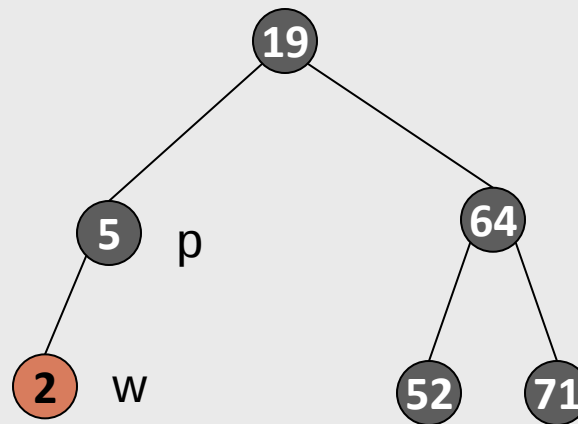
Διαγραφή κατά σειρά των κλειδιών 12 21 90 4 71 2 5



Ο διάδοχος του 4 είναι ο 5.
Αντιγράφουμε το 5 στον
κόμβο του 4.

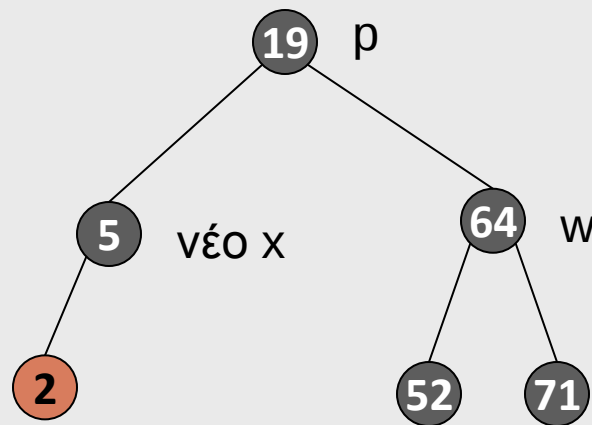
Διαγράφουμε τον z.

Περίπτωση 2α:
Ο w γίνεται κόκκινος,
και ο p διπλά μαύρος.



Διαγραφή

Διαγραφή κατά σειρά των κλειδιών 12 21 90 4 71 2 5



Ο διάδοχος του 4 είναι ο 5.
Αντιγράφουμε το 5 στον
κόμβο του 4.

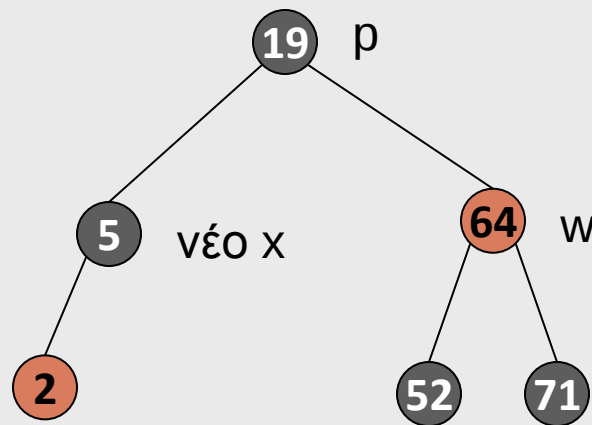
Διαγράφουμε τον z.

Περίπτωση 2α:
Ο w γίνεται κόκκινος,
και ο p διπλά μαύρος.

Περίπτωση 2α:
Ο w γίνεται κόκκινος,
και ο p διπλά μαύρος.

Διαγραφή

Διαγραφή κατά σειρά των κλειδιών 12 21 90 4 71 2 5



Ο διάδοχος του 4 είναι ο 5.
Αντιγράφουμε το 5 στον
κόμβο του 4.

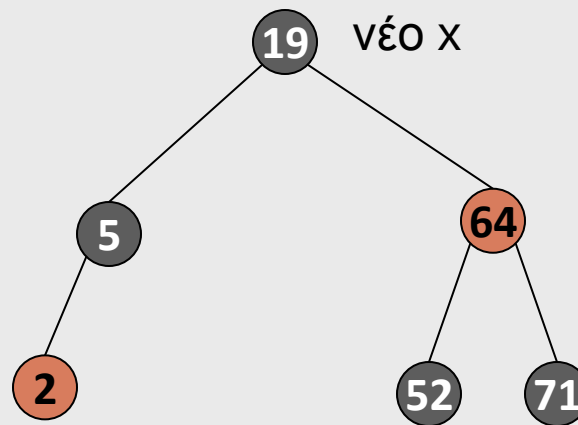
Διαγράφουμε τον z.

Περίπτωση 2α:
Ο w γίνεται κόκκινος,
και ο p διπλά μαύρος.

Περίπτωση 2α:
Ο w γίνεται κόκκινος,
και ο p διπλά μαύρος.

Διαγραφή

Διαγραφή κατά σειρά των κλειδιών 12 21 90 4 71 2 5



Ο διάδοχος του 4 είναι ο 5.
Αντιγράφουμε το 5 στον
κόμβο του 4.

Διαγράφουμε τον z.

Περίπτωση 2α:
Ο w γίνεται κόκκινος,
και ο p διπλά μαύρος.

Περίπτωση 2α:
Ο w γίνεται κόκκινος,
και ο p διπλά μαύρος.

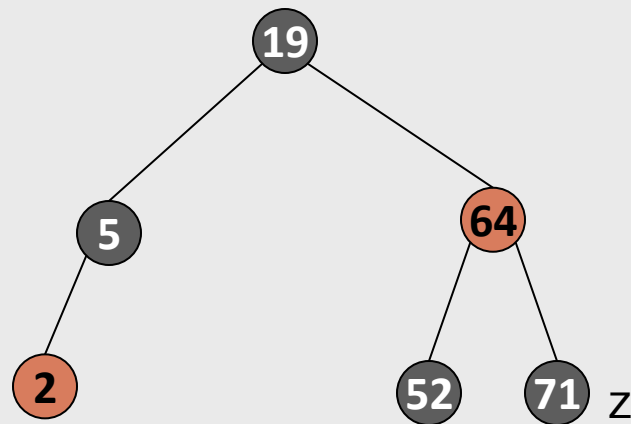
Φθάσαμε στη ρίζα του δένδρου: Αγνοούμε την
επιπλέον μονάδα μαύρου χρώματος και ο
αλγόριθμος τερματίζει.

Διαγραφή

Διαγραφή κατά σειρά των κλειδιών 12 21 90 4 71 2 5



Διαγράφουμε τον z.



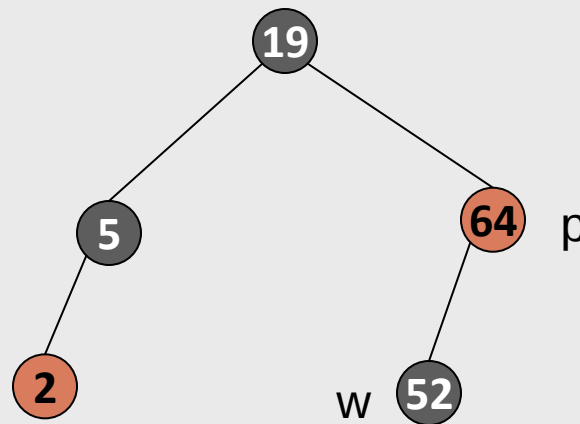
Διαγραφή

Διαγραφή κατά σειρά των κλειδιών 12 21 90 4 71 2 5



Διαγράφουμε τον z.

Περίπτωση 2α:
Ο w γίνεται κόκκινος,
και ο p μαύρος.



Διαγραφή

Διαγραφή κατά σειρά των κλειδιών 12 21 90 4 71 2 5

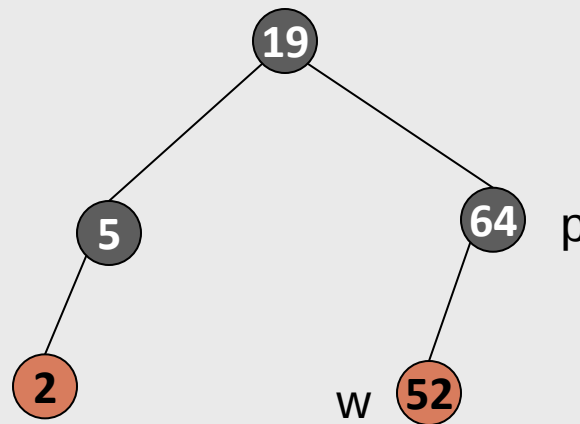


Διαγράφουμε τον z.

Περίπτωση 2α:

Ο w γίνεται κόκκινος,
και ο p μαύρος.

Ο αλγόριθμος τερματίζει.



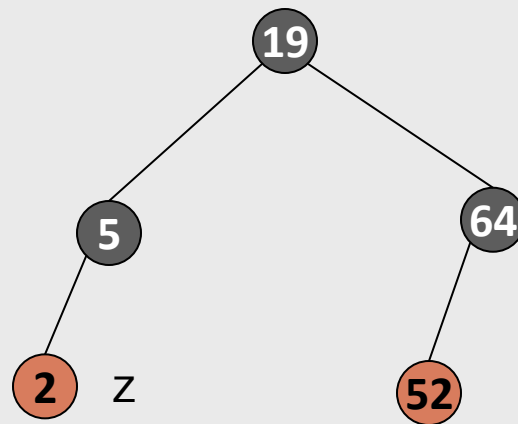
Διαγραφή

Διαγραφή κατά σειρά των κλειδιών 12 21 90 4 71 2 5



Διαγράφουμε τον z.

Ο αλγόριθμος τερματίζει.



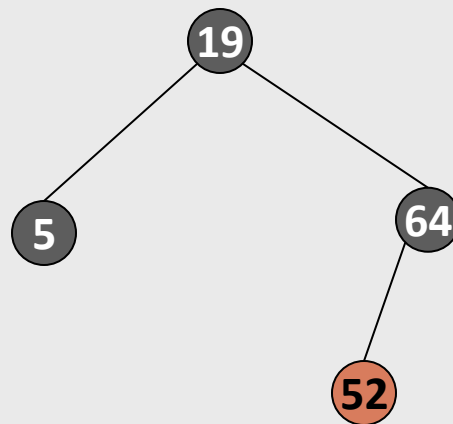
Διαγραφή

Διαγραφή κατά σειρά των κλειδιών 12 21 90 4 71 2 5



Διαγράφουμε τον z.

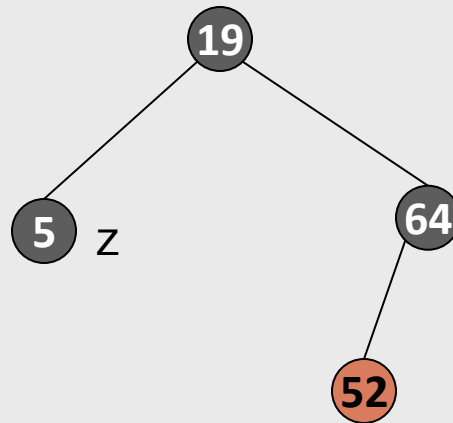
Ο αλγόριθμος τερματίζει.



Διαγραφή

Διαγραφή κατά σειρά των κλειδιών 12 21 90 4 71 2 5
↑

Διαγράφουμε τον z.

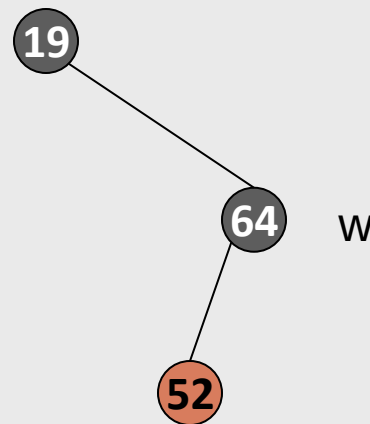


Διαγραφή

Διαγραφή κατά σειρά των κλειδιών 12 21 90 4 71 2 5
↑

Διαγράφουμε τον z.

Περίπτωση 2β:
Ο w γίνεται κόκκινος,
ο w.left μαύρος και εκτελούμε
δεξιά περιστροφή του w.



Διαγραφή

Διαγραφή κατά σειρά των κλειδιών 12 21 90 4 71 2 5

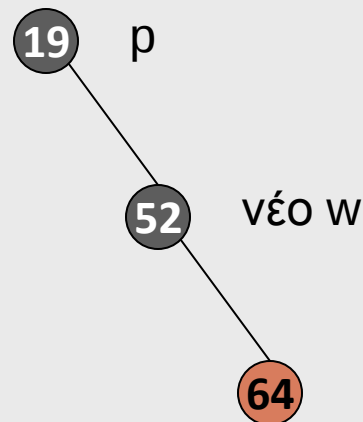


Διαγράφουμε τον z.

Περίπτωση 2β:

Ο w γίνεται κόκκινος,
ο w.left μαύρος και εκτελούμε
δεξιά περιστροφή του w.

Περίπτωση 2γ: Ο w.right
γίνεται μαύρος, ο w μαύρος
και ο p μαύρος και εκτελούμε
αριστερή περιστροφή του p.
Ο αλγόριθμος τερματίζει.



Διαγραφή

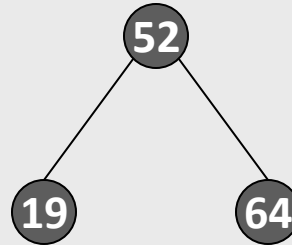
Διαγραφή κατά σειρά των κλειδιών 12 21 90 4 71 2 5



Διαγράφουμε τον z.

Περίπτωση 2β:

Ο w γίνεται κόκκινος,
ο w.left μαύρος και εκτελούμε
δεξιά περιστροφή του w.

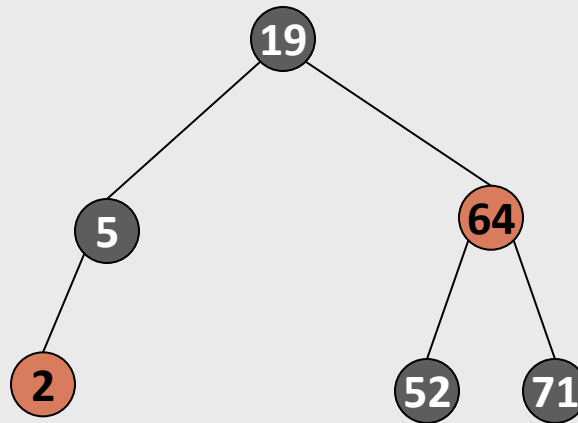


Περίπτωση 2γ: Ο w.right
γίνεται μαύρος, ο w μαύρος
και ο p μαύρος και εκτελούμε
αριστερή περιστροφή του p.
Ο αλγόριθμος τερματίζει.

Διαγραφή

Άλλο παράδειγμα: Διαγραφή κατά σειρά των κλειδιών 5 2
↑

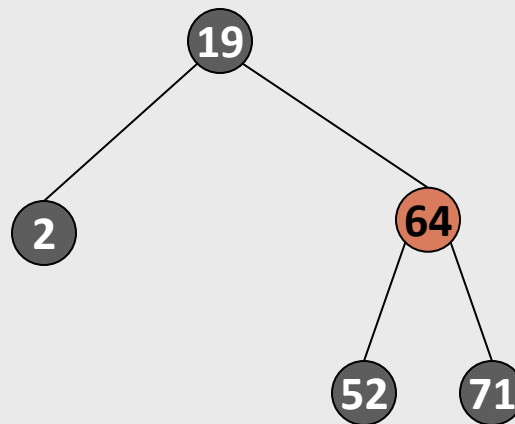
Ο 5 έχει ένα κόκκινο παιδί.
Διαγράφουμε τον 5 και
κάνουμε τον 2 μαύρο
αριστερό παιδί του 19.



Διαγραφή

Άλλο παράδειγμα: Διαγραφή κατά σειρά των κλειδιών 5 2
↑

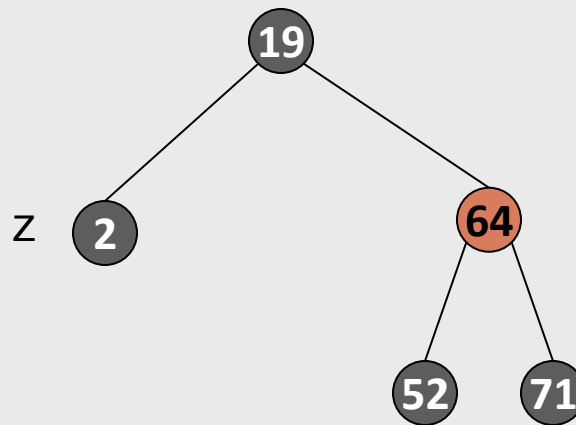
Ο 5 έχει ένα κόκκινο παιδί.
Διαγράφουμε τον 5 και
κάνουμε τον 2 μαύρο
αριστερό παιδί του 19.



Διαγραφή

Άλλο παράδειγμα: Διαγραφή κατά σειρά των κλειδιών 5 2
↑

Διαγράφουμε τον z.

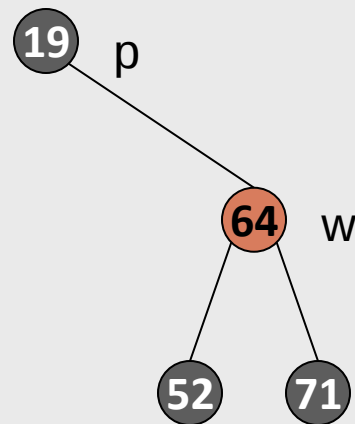


Διαγραφή

Άλλο παράδειγμα: Διαγραφή κατά σειρά των κλειδιών 5 2
↑

Διαγράφουμε τον z.

Περίπτωση 1:
Ο w γίνεται μαύρος,
ο p κόκκινος και εκτελούμε
αριστερή περιστροφή του p.



Διαγραφή

Άλλο παράδειγμα: Διαγραφή κατά σειρά των κλειδιών 5 2
↑

Διαγράφουμε τον z.

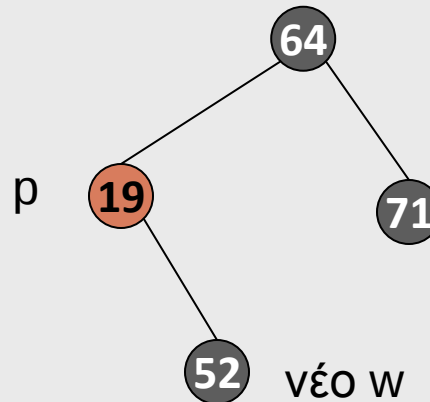
Περίπτωση 1:

Ο w γίνεται μαύρος,
ο p κόκκινος και εκτελούμε
αριστερή περιστροφή του p.

Περίπτωση 2α:

Ο w γίνεται κόκκινος,
και ο p μαύρος.

Ο αλγόριθμος τερματίζει.



Διαγραφή

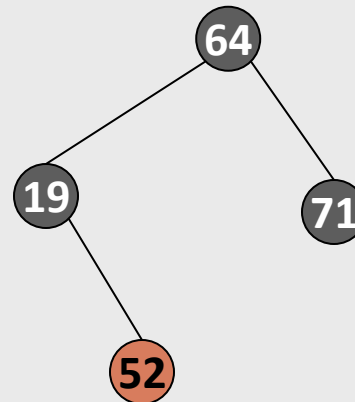
Άλλο παράδειγμα: Διαγραφή κατά σειρά των κλειδιών 5 2
↑

Διαγράφουμε τον z.

Περίπτωση 1:
Ο w γίνεται μαύρος,
ο p κόκκινος και εκτελούμε
αριστερή περιστροφή του p.

Περίπτωση 2α:
Ο w γίνεται κόκκινος,
και ο p μαύρος.

Ο αλγόριθμος τερματίζει.



Διαγραφή

1. Εκτελούμε τον αλγόριθμο διαγραφής όπως σε ένα απλό δυαδικό δένδρο.
2. Αν προκύψει διπλά μαύρος κόμβος τότε αποκαθιστούμε τις ιδιότητες του κοκκινόμαυρου δένδρου χρησιμοποιώντας περιστροφές και αλλαγή χρωμάτων.
3. Ολοκληρώνεται σε χρόνο $O(\log n)$
 - $O(\log n)$ αναχρωματίσεις
 - το πολύ τρεις περιστροφές