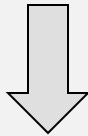


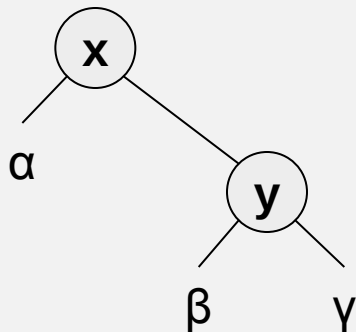
Ισορροπημένα Δένδρα

Μπορούμε να επιτύχουμε $O(\log N)$ χρόνο εκτέλεσης για κάθε λειτουργία;

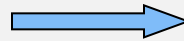


Ισορροπημένο δένδρο : Διατηρεί ύψος $O(\log N)$ μετά από κάθε εισαγωγή ή διαγραφή

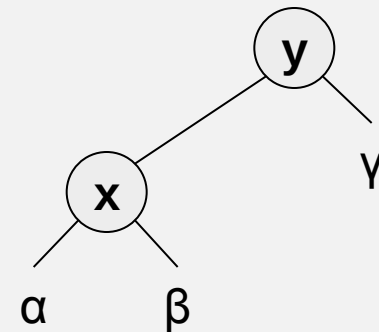
Περιστροφές



αριστερή περιστροφή
από το x



δεξιά περιστροφή
από το y



```
Node rotateLeft(Node x)
{
    Node y = x.right;
    x.right = y.left;
    y.left = x;
    return y;
}
```

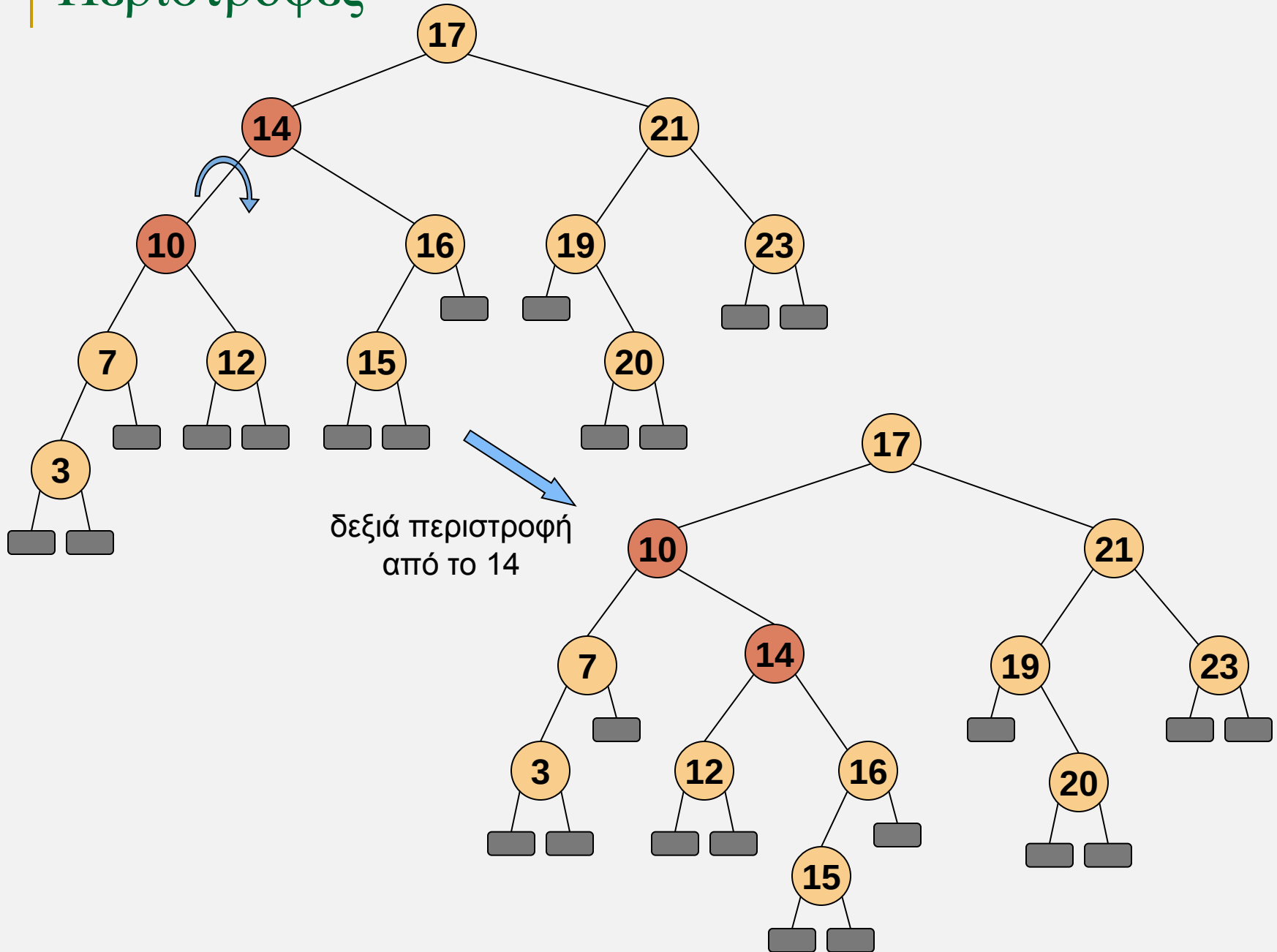
αριστερή περιστροφή

Η περιστροφή παίρνει
χρόνο $O(1)$

```
Node rotateRight(Node y)
{
    Node x = y.left;
    y.left = x.right;
    x.right = y;
    return x;
}
```

δεξιά περιστροφή

Περιστροφές



Ισορροπημένα Δένδρα

Μερικοί τύποι ισορροπημένων δένδρων

- Τυχαιοποιημένα δένδρα
- Αρθρωτά δένδρα (splay trees)
- Δένδρα AVL
- Κοκκινόμαυρα δένδρα
- (a,b) δένδρα

Όλα τα παραπάνω χρησιμοποιούν περιστροφές για να παραμείνουν ισορροπημένα

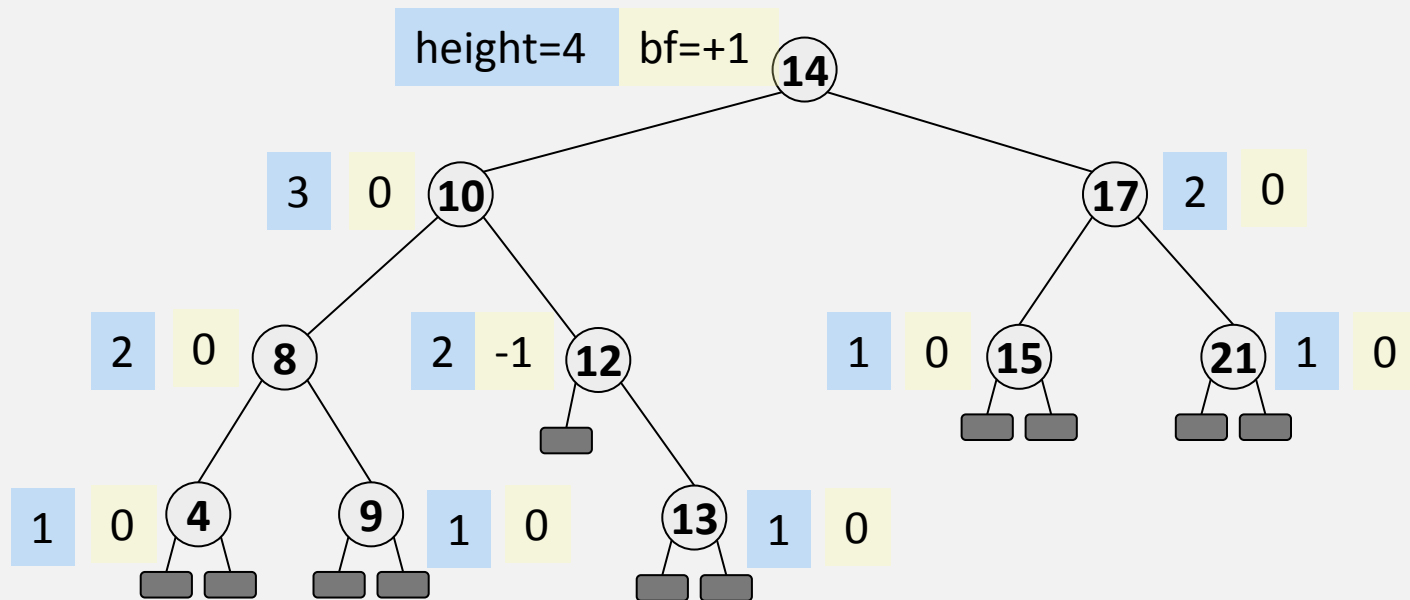
Δένδρα AVL (Adelson-Velskii and Landis)

Συντελεστής ισορροπίας (balance factor) του κόμβου x :

$$bf(x) = \text{height}(\text{left}(x)) - \text{height}(\text{right}(x))$$

Δένδρο AVL: Διατηρεί τη συνθήκη $|bf(x)| \leq 1$ σε κάθε κόμβο x

Δηλαδή τα ύψη των δύο παιδιών του x διαφέρουν το πολύ κατά 1



Δένδρα AVL

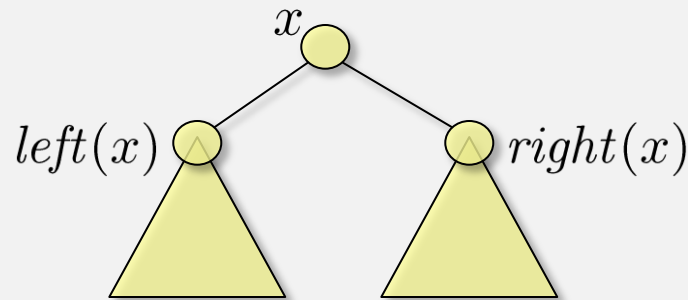
Συντελεστής ισορροπίας (balance factor) του κόμβου x :

$$bf(x) = \text{height}(\text{left}(x)) - \text{height}(\text{right}(x))$$

Δένδρο AVL: Διατηρεί τη συνθήκη $|bf(x)| \leq 1$ σε κάθε κόμβο x

Δηλαδή τα ύψη των δύο παιδιών του x διαφέρουν το πολύ κατά 1

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι αν το T είναι AVL δένδρο με ρίζα τον κόμβο x τότε και τα δύο υποδένδρα του T με ρίζες τους κόμβους **left(x)** και **right(x)** είναι επίσης AVL δένδρα



Δένδρα AVL

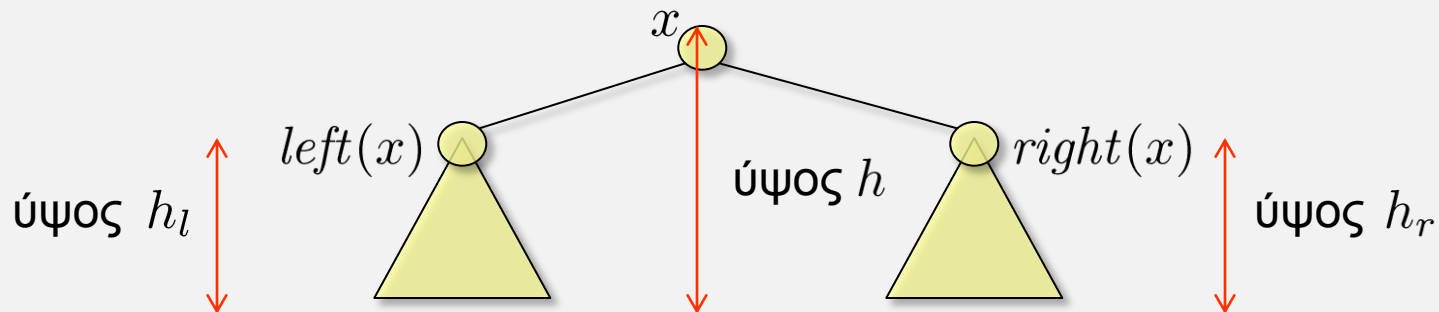
Συντελεστής ισορροπίας (balance factor) του κόμβου x :

$$\text{bf}(x) = \text{height}(\text{left}(x)) - \text{height}(\text{right}(x))$$

Δένδρο AVL: Διατηρεί τη συνθήκη $|\text{bf}(x)| \leq 1$ σε κάθε κόμβο x

Δηλαδή τα ύψη των δύο παιδιών του x διαφέρουν το πολύ κατά 1

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι αν το T είναι AVL δένδρο με ρίζα τον κόμβο x τότε και τα δύο υποδένδρα του T με ρίζες τους κόμβους **left(x)** και **right(x)** είναι επίσης AVL δένδρα



Δένδρα AVL (Adelson-Velskii and Landis)

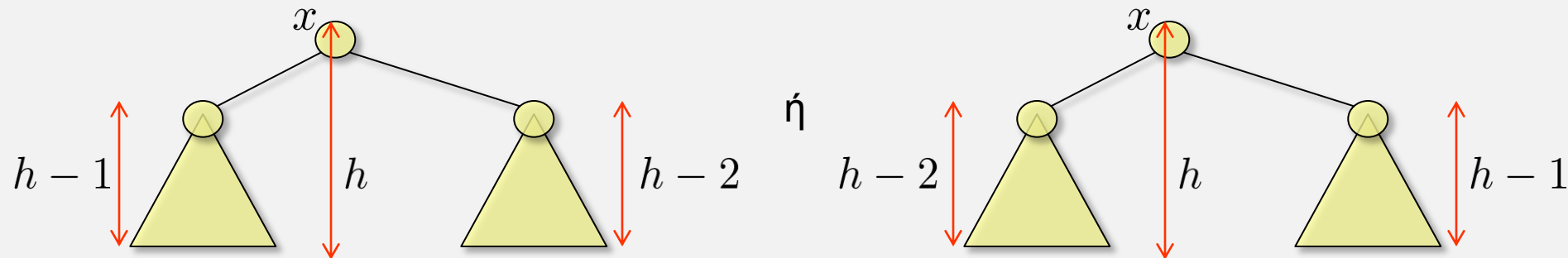
Συντελεστής ισορροπίας (balance factor) του κόμβου x :

$$\text{bf}(x) = \text{height}(\text{left}(x)) - \text{height}(\text{right}(x))$$

Δένδρο AVL: Διατηρεί τη συνθήκη $|\text{bf}(x)| \leq 1$ σε κάθε κόμβο x

Δηλαδή τα ύψη των δύο παιδιών του x διαφέρουν το πολύ κατά 1

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι αν το T είναι AVL δένδρο με ρίζα τον κόμβο x τότε και τα δύο υποδένδρα του T με ρίζες τους κόμβους **left(x)** και **right(x)** είναι επίσης AVL δένδρα



Έστω N_h = ελάχιστος αριθμός κόμβων σε AVL δένδρο με ύψος h

Τότε $N_h = N_{h-1} + N_{h-2} + 1$, $N_1 = 1$ και $N_0 = 0$

Δένδρα AVL (Adelson-Velskii and Landis)

Συντελεστής ισορροπίας (balance factor) του κόμβου x :

$$\text{bf}(x) = \text{height}(\text{left}(x)) - \text{height}(\text{right}(x))$$

Δένδρο AVL: Διατηρεί τη συνθήκη $|\text{bf}(x)| \leq 1$ σε κάθε κόμβο x

Δηλαδή τα ύψη των δύο παιδιών του x διαφέρουν το πολύ κατά 1

Έστω N_h = ελάχιστος αριθμός κόμβων σε AVL δένδρο με ύψος h

Τότε $N_h = N_{h-1} + N_{h-2} + 1$, $N_1 = 1$ και $N_0 = 0$

Ακολουθία Fibonacci $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$, $F_1 = 1$ και $F_0 = 0$

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\phi^k + (1 - \phi)^k \right) \approx \phi^k / \sqrt{5}$$

$$\text{όπου } \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Δένδρα AVL

Συντελεστής ισορροπίας (balance factor) του κόμβου x :

$$\text{bf}(x) = \text{height}(\text{left}(x)) - \text{height}(\text{right}(x))$$

Δένδρο AVL: Διατηρεί τη συνθήκη $|\text{bf}(x)| \leq 1$ σε κάθε κόμβο x

Δηλαδή τα ύψη των δύο παιδιών του x διαφέρουν το πολύ κατά 1

Έστω N_h = ελάχιστος αριθμός κόμβων σε AVL δένδρο με ύψος h

Τότε $N_h = N_{h-1} + N_{h-2} + 1$, $N_1 = 1$ και $N_0 = 0$

Ακολουθία Fibonacci $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$, $F_1 = 1$ και $F_0 = 0$

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\phi^k + (1 - \phi)^k \right) \approx \phi^k / \sqrt{5}$$

$$\text{όπου } \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Ισχύει } (N_h + 1) = (N_{h-1} + 1) + (N_{h-2} + 1) \Rightarrow N_h = F_{h+2} - 1$$

Δένδρα AVL

Συντελεστής ισορροπίας (balance factor) του κόμβου x :

$$\text{bf}(x) = \text{height}(\text{left}(x)) - \text{height}(\text{right}(x))$$

Δένδρο AVL: Διατηρεί τη συνθήκη $|\text{bf}(x)| \leq 1$ σε κάθε κόμβο x

Δηλαδή τα ύψη των δύο παιδιών του x διαφέρουν το πολύ κατά 1

Έστω N_h = ελάχιστος αριθμός κόμβων σε AVL δένδρο με ύψος h

Τότε $N_h = N_{h-1} + N_{h-2} + 1$, $N_1 = 1$ και $N_0 = 0$

Άρα $N_h \approx \phi^{h+2}/\sqrt{5} - 1 \Rightarrow h \approx \log_\phi(\sqrt{5}(N_h + 1)) - 2 \leq 1.44 \lg(N_h + 2)$

Επομένως ένα AVL δένδρο με n κόμβους έχει ύψος το πολύ $1.44 \lg(n + 2)$

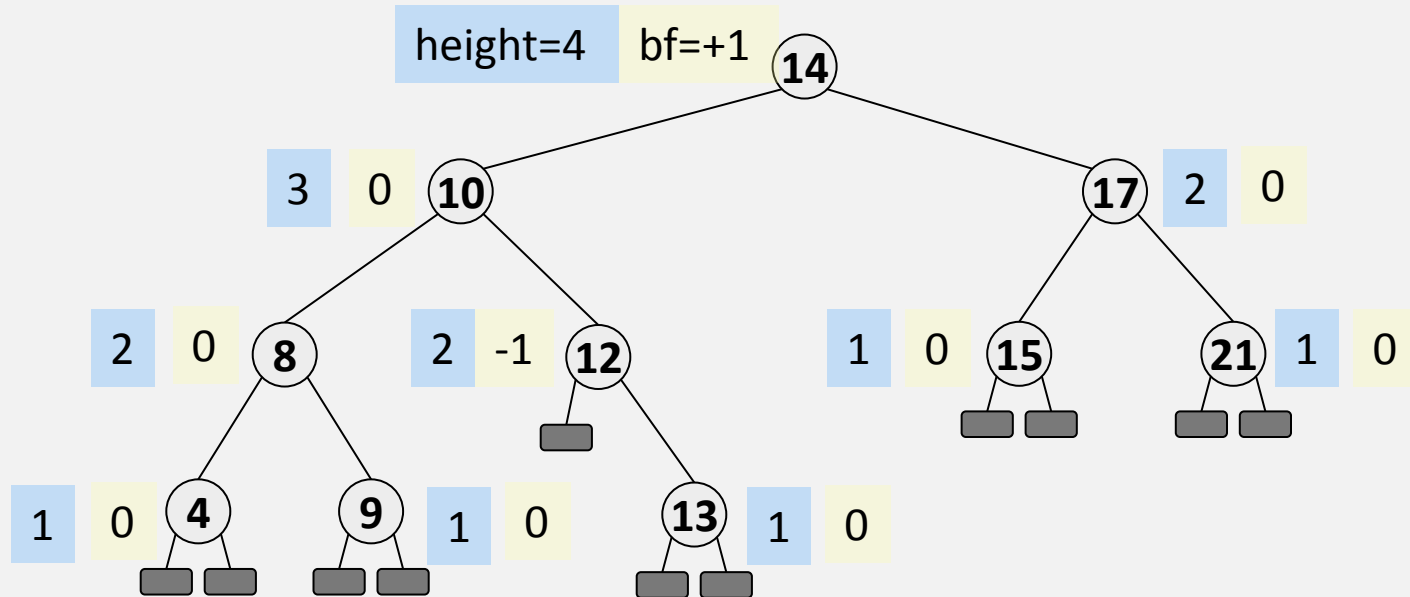
Δένδρα AVL

Συντελεστής ισορροπίας (balance factor) του κόμβου x :

$$bf(x) = \text{height}(\text{left}(x)) - \text{height}(\text{right}(x))$$

Δένδρο AVL: Διατηρεί τη συνθήκη $|bf(x)| \leq 1$ σε κάθε κόμβο x

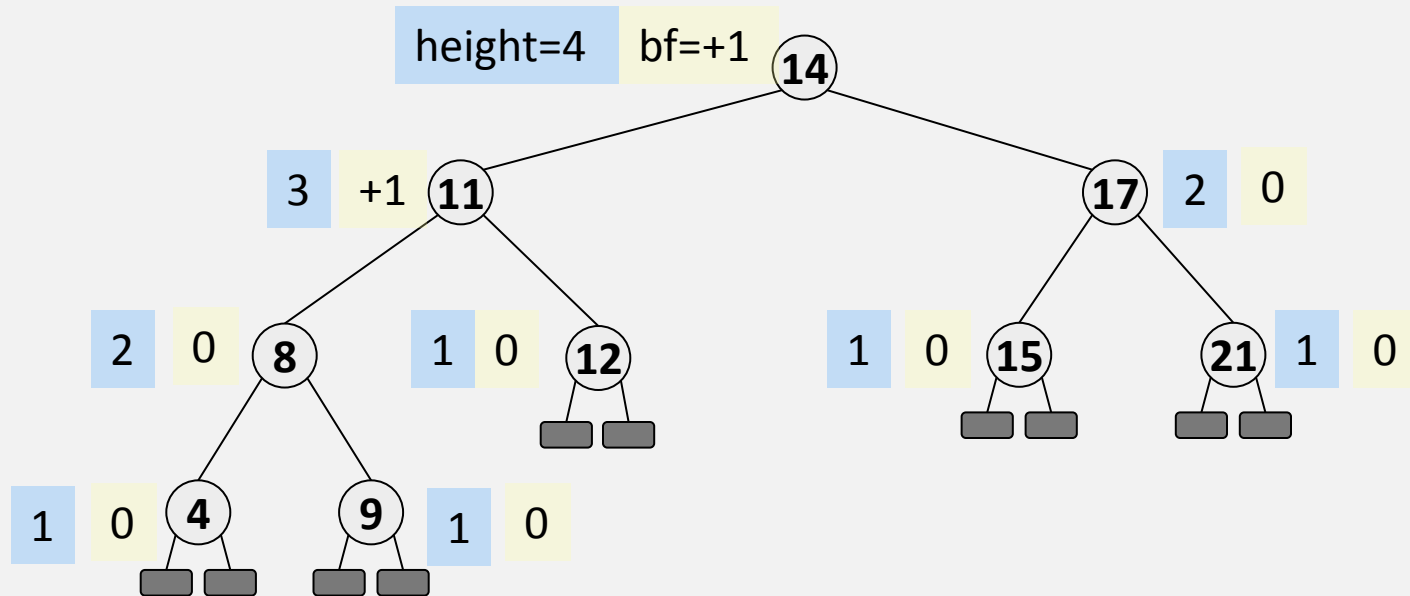
Δηλαδή τα ύψη των δύο παιδιών του x διαφέρουν το πολύ κατά 1



Μετά από μια εισαγωγή ή διαγραφή μπορεί να προκύψει μη ισορροπημένο δένδρο

Δένδρα AVL

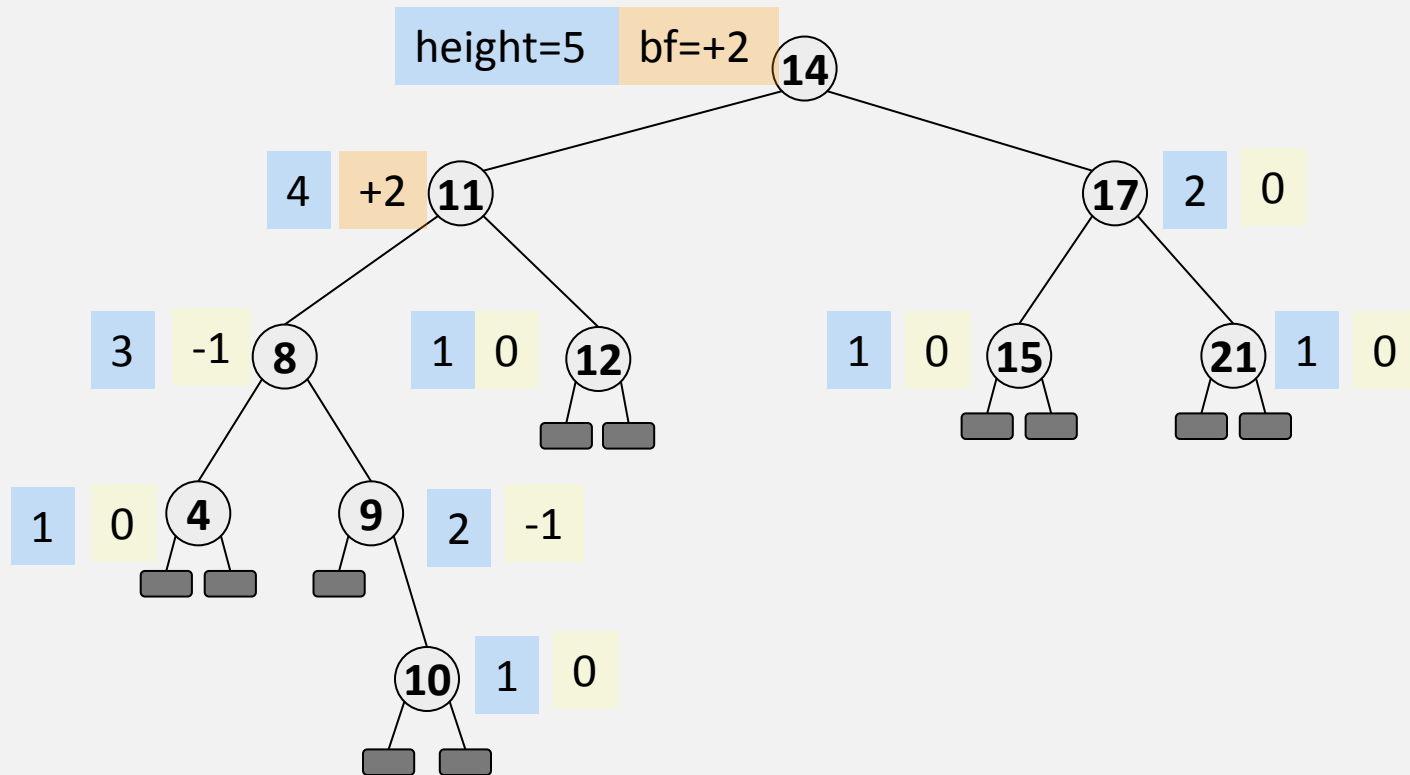
Εισαγωγή 10



Δένδρα AVL

Εισαγωγή 10

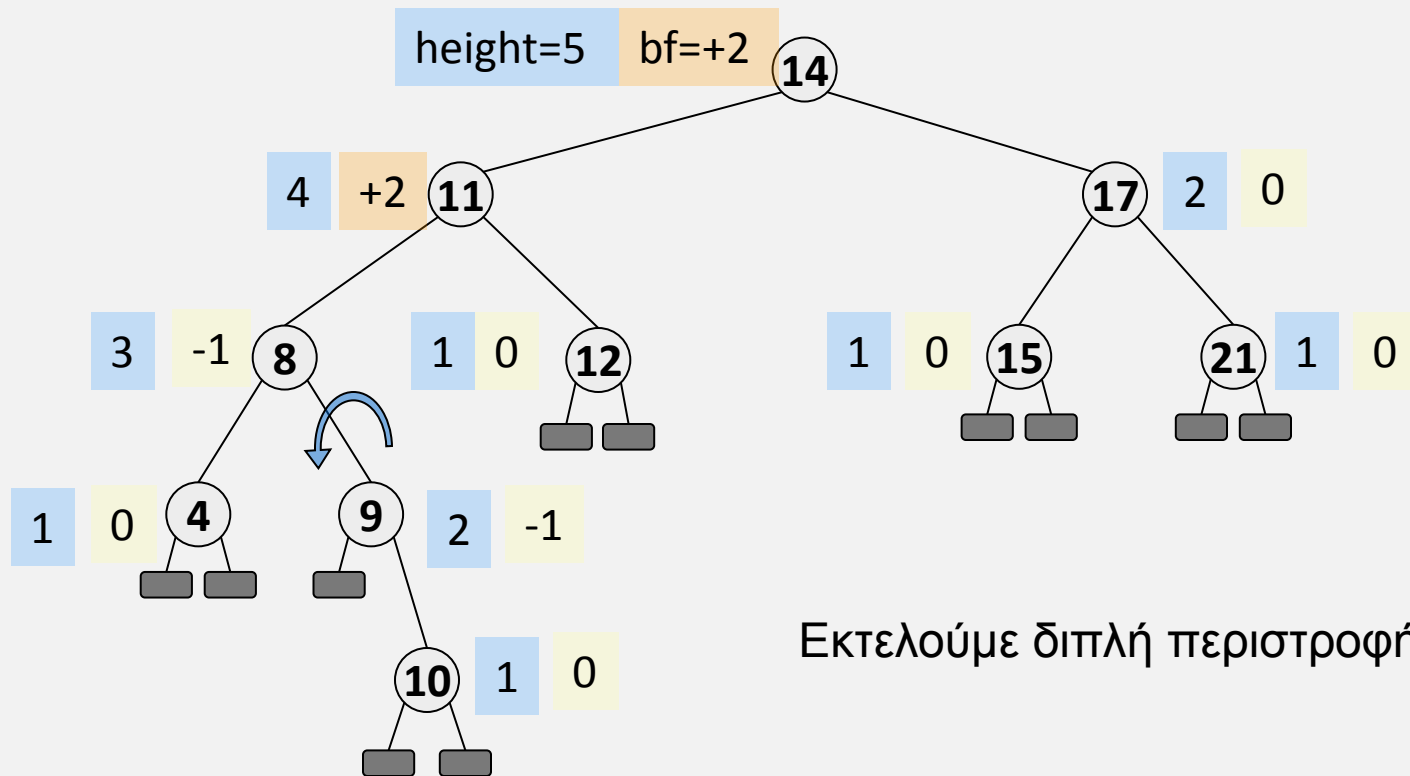
Παραβιάζεται η συνθήκη ισορροπίας στους κόμβους 11 και 14



Δένδρα AVL

Εισαγωγή 10

Παραβιάζεται η συνθήκη ισορροπίας στους κόμβους 11 και 14

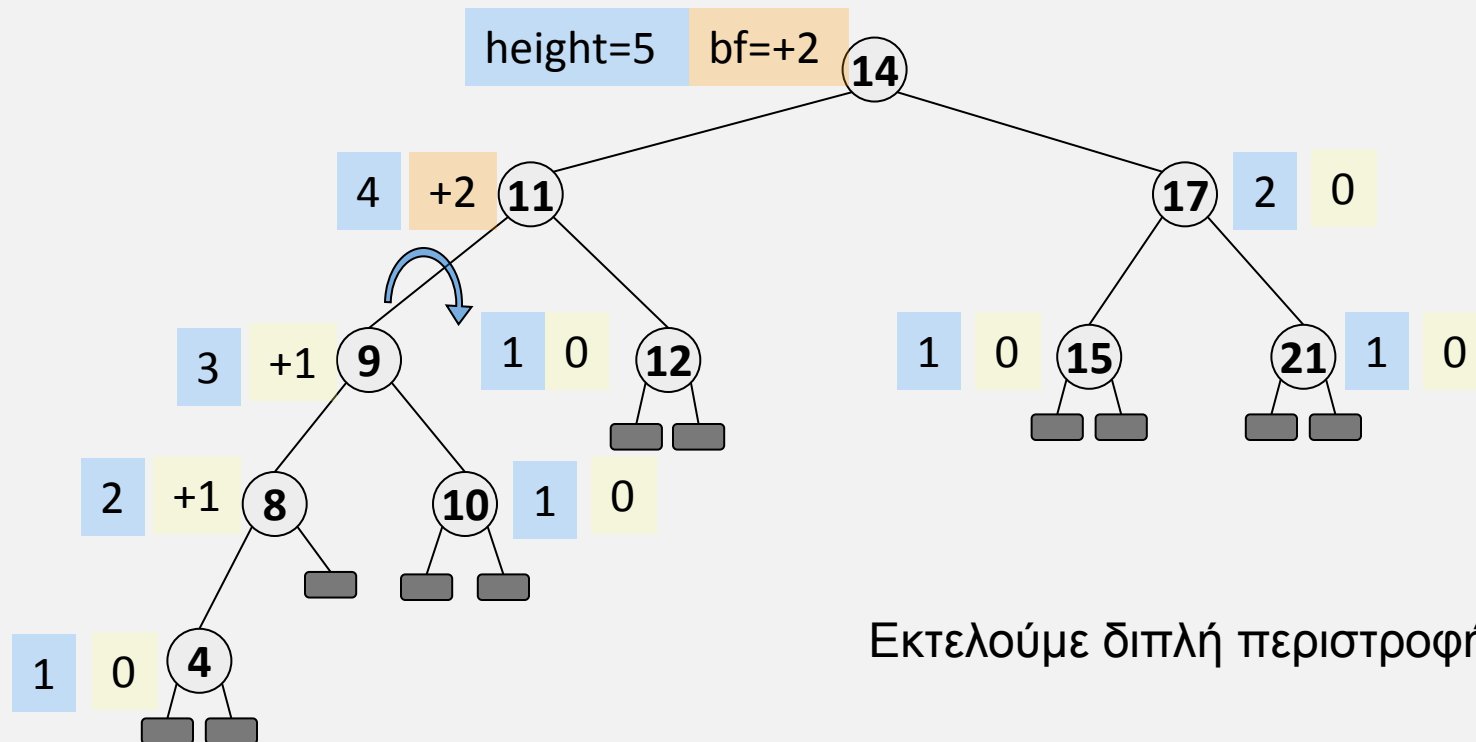


Εκτελούμε διπλή περιστροφή του 9

Δένδρα AVL

Εισαγωγή 10

Παραβιάζεται η συνθήκη ισορροπίας στους κόμβους 11 και 14

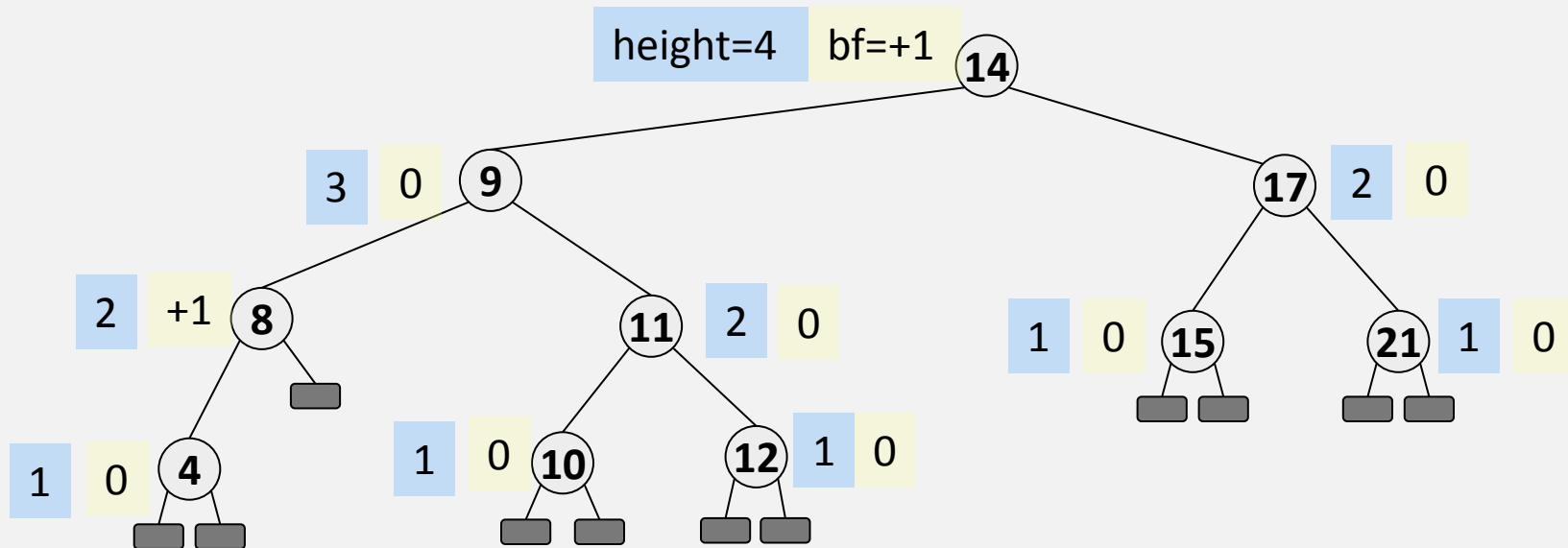


Εκτελούμε διπλή περιστροφή του 9

Δένδρα AVL

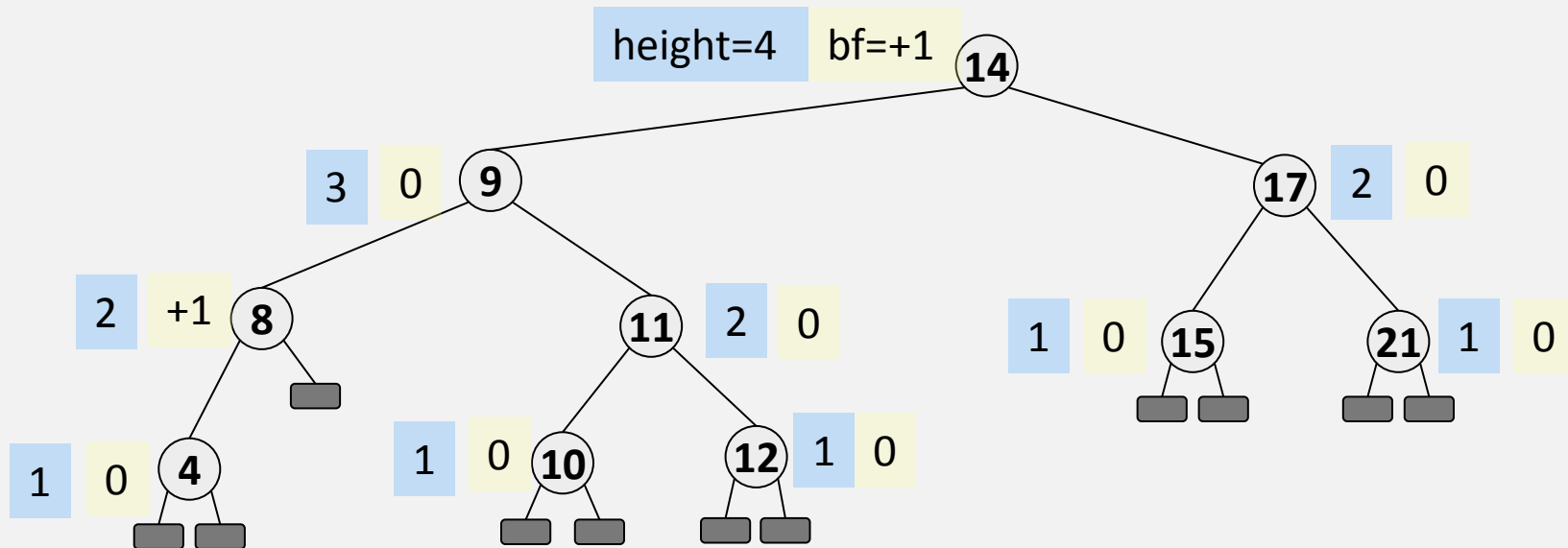
Εισαγωγή 10

Αποκαταστάθηκε η συνθήκη ισορροπίας



Δένδρα AVL

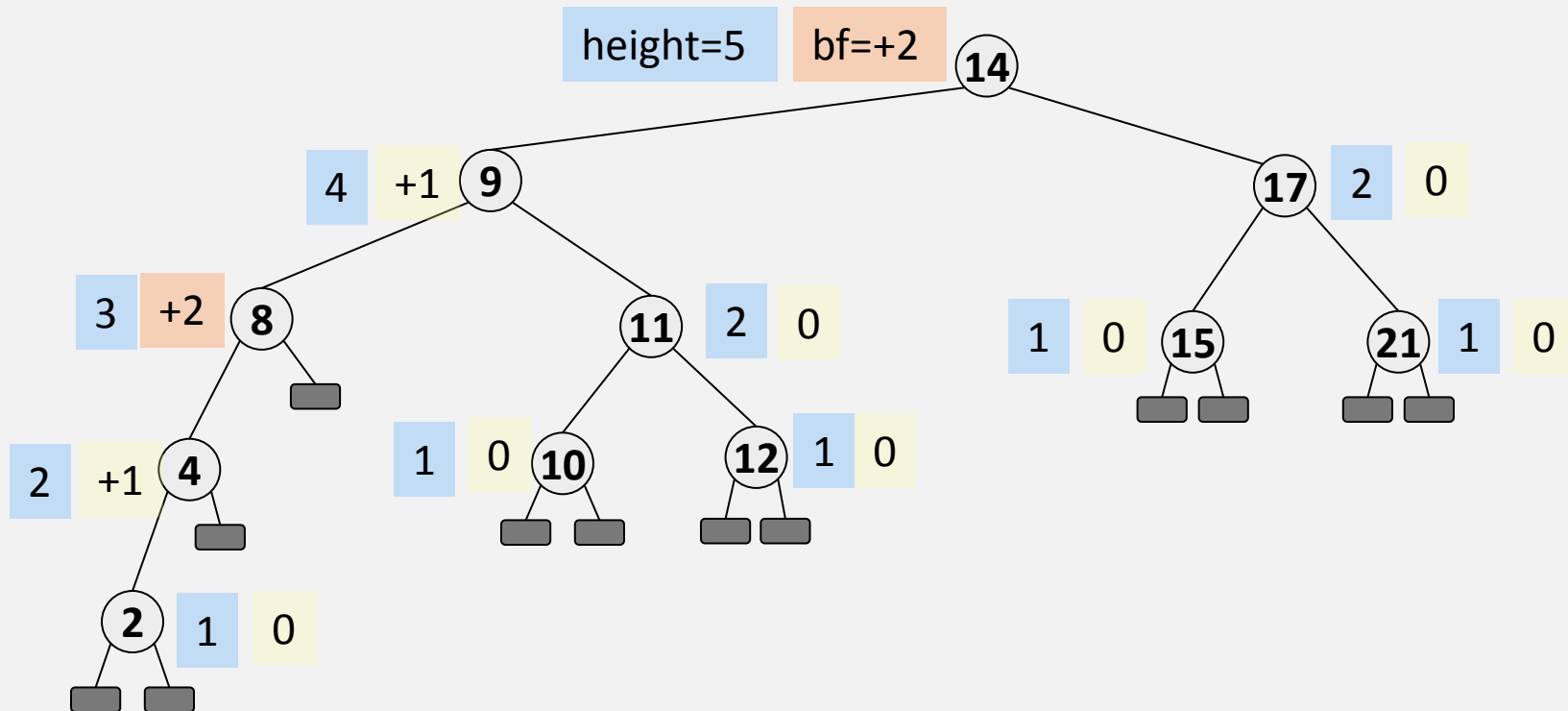
Εισαγωγή 2



Δένδρα AVL

Εισαγωγή 2

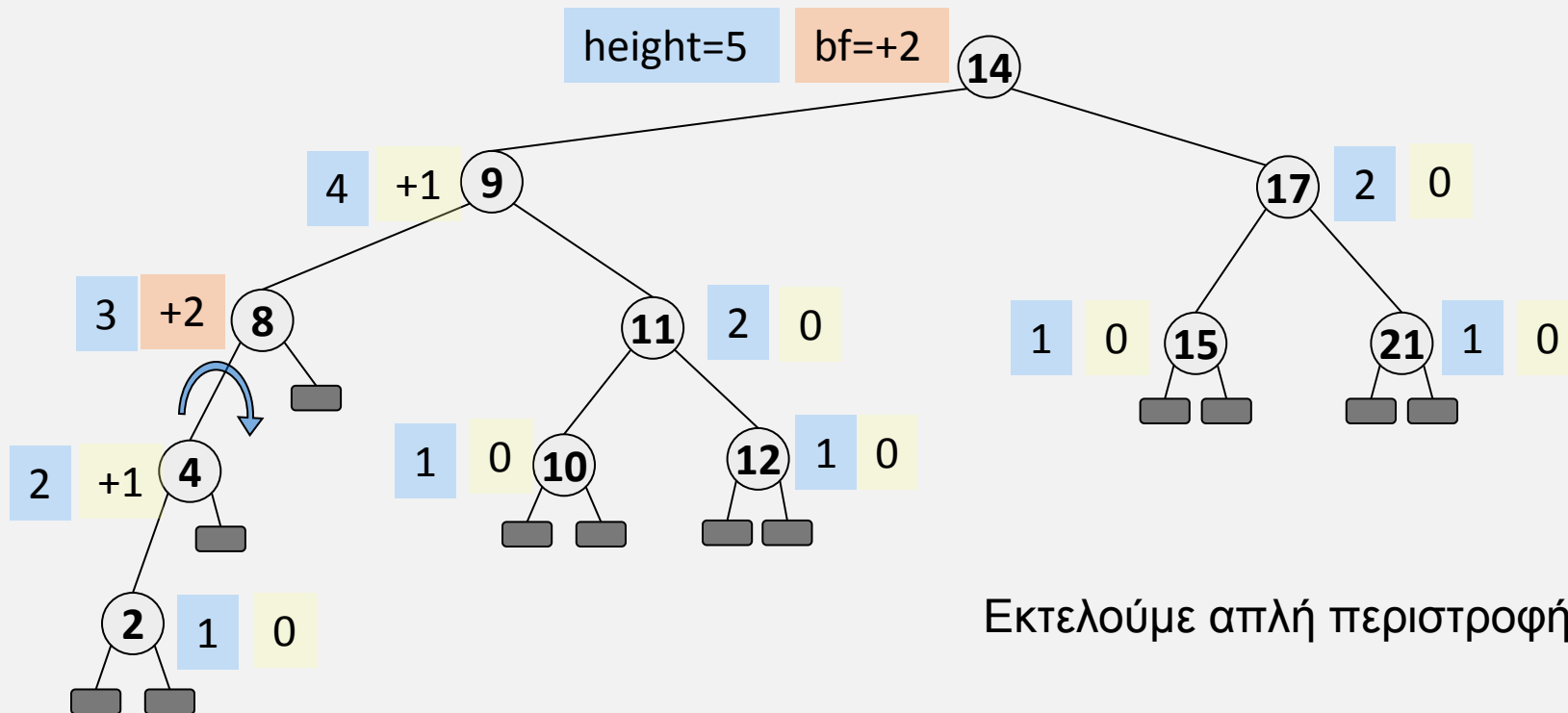
Παραβιάζεται η συνθήκη ισορροπίας στους κόμβους 8 και 14



Δένδρα AVL

Εισαγωγή 2

Παραβιάζεται η συνθήκη ισορροπίας στους κόμβους 8 και 14

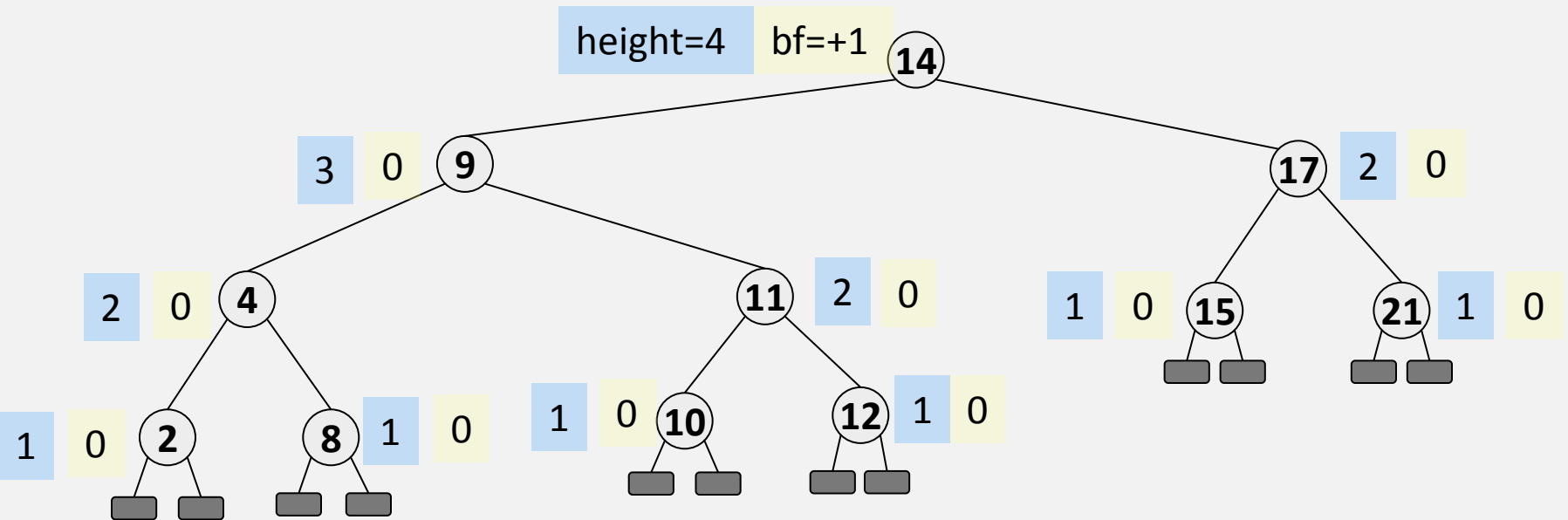


Εκτελούμε απλή περιστροφή του 4

Δένδρα AVL

Εισαγωγή 2

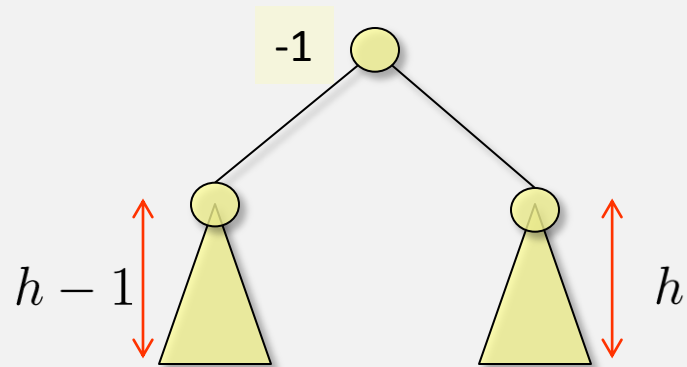
Αποκαταστάθηκε η συνθήκη ισορροπίας



Δένδρα AVL

Αποκατάσταση ισορροπίας μετά από εισαγωγή

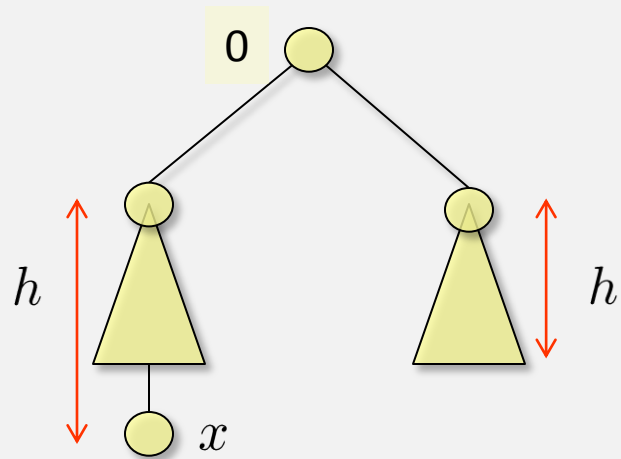
Απλές Περιπτώσεις: Δε χρειάζονται περιστροφές



Δένδρα AVL

Αποκατάσταση ισορροπίας μετά από εισαγωγή

Απλές Περιπτώσεις: Δε χρειάζονται περιστροφές

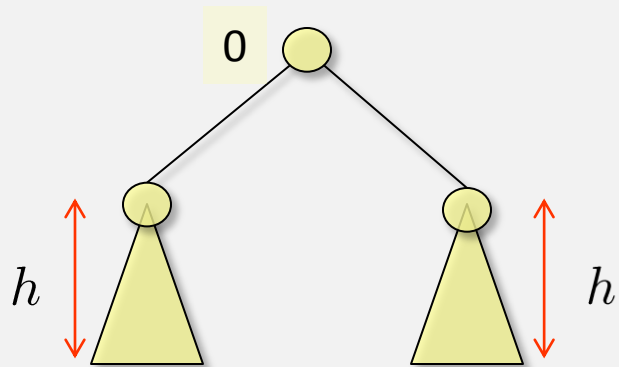


Παραμένει AVL δένδρο

Δένδρα AVL

Αποκατάσταση ισορροπίας μετά από εισαγωγή

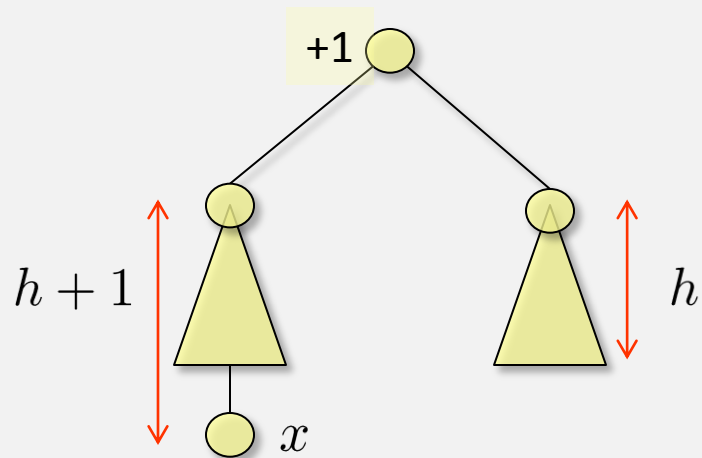
Απλές Περιπτώσεις: Δε χρειάζονται περιστροφές



Δένδρα AVL

Αποκατάσταση ισορροπίας μετά από εισαγωγή

Απλές Περιπτώσεις: Δε χρειάζονται περιστροφές



Παραμένει AVL δένδρο

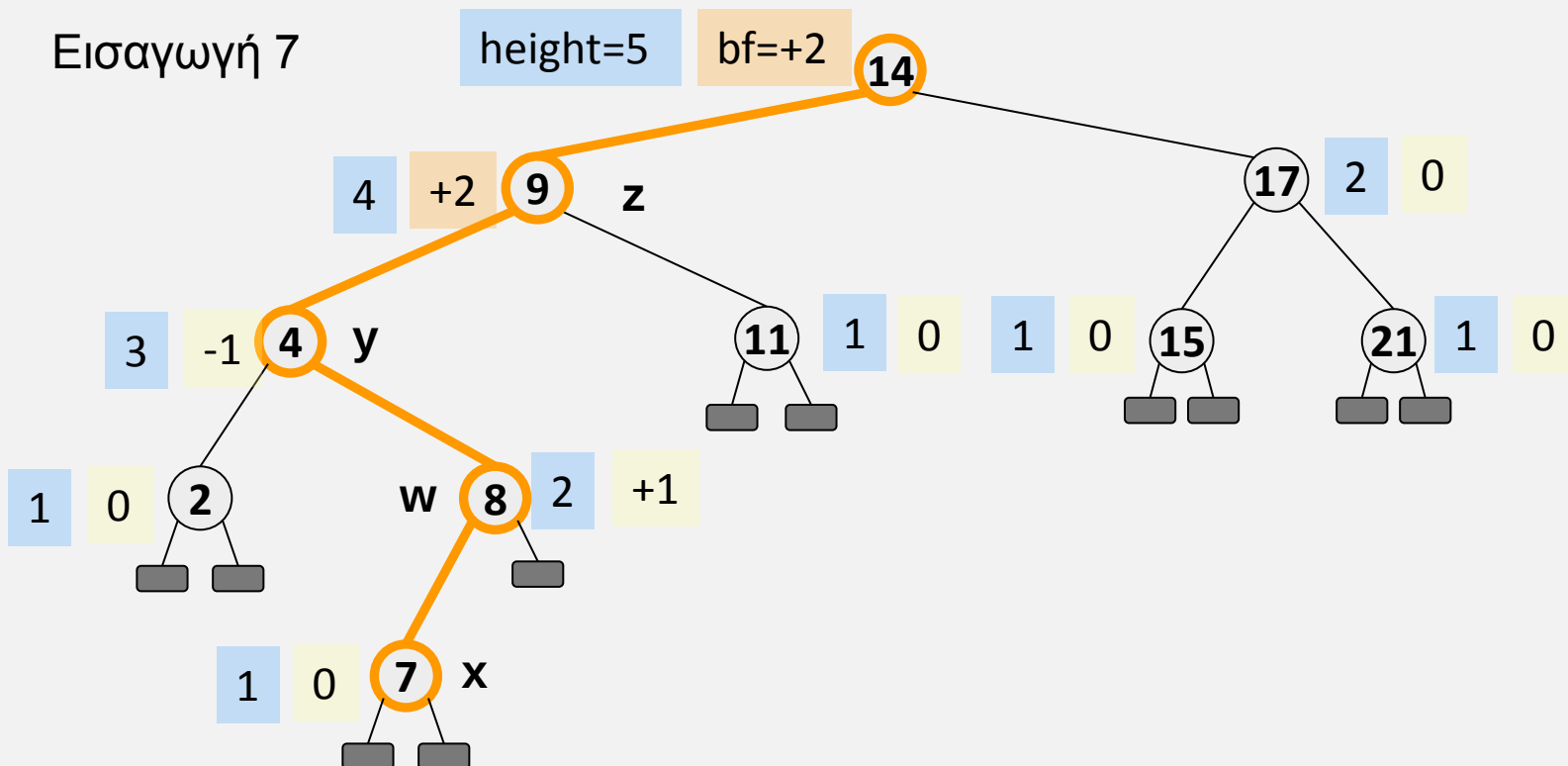
Δένδρα AVL

Αποκατάσταση ισορροπίας μετά από εισαγωγή

z = χαμηλότερος πρόγονος του νέου κόμβου **x** που μόλις έχει εισαχθεί για τον οποίο $|\text{bf}(z)| > 1$

y = παιδί του **z** στο μονοπάτι εισαγωγής

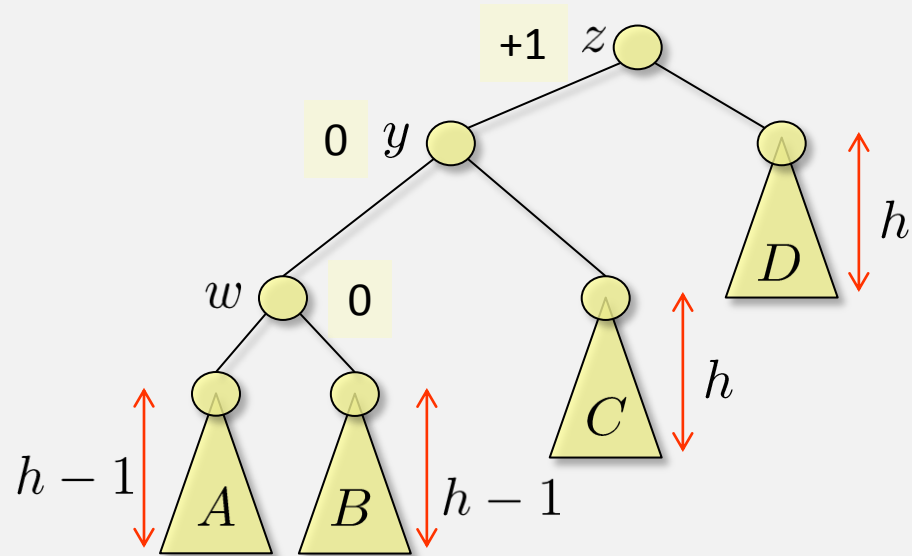
w = παιδί του **y** στο μονοπάτι εισαγωγής



Δένδρα AVL

Αποκατάσταση ισορροπίας μετά από εισαγωγή

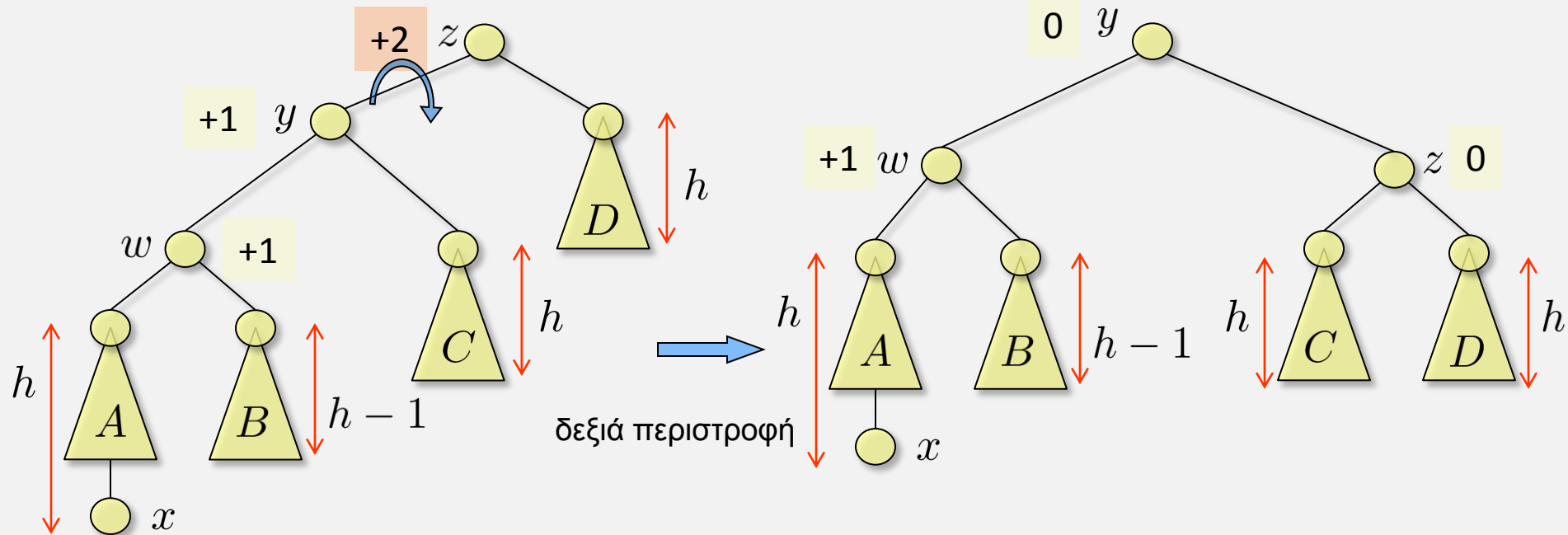
Περίπτωση LL: y = αριστερό παιδί του z και w = αριστερό παιδί του y



Δένδρα AVL

Αποκατάσταση ισορροπίας μετά από εισαγωγή

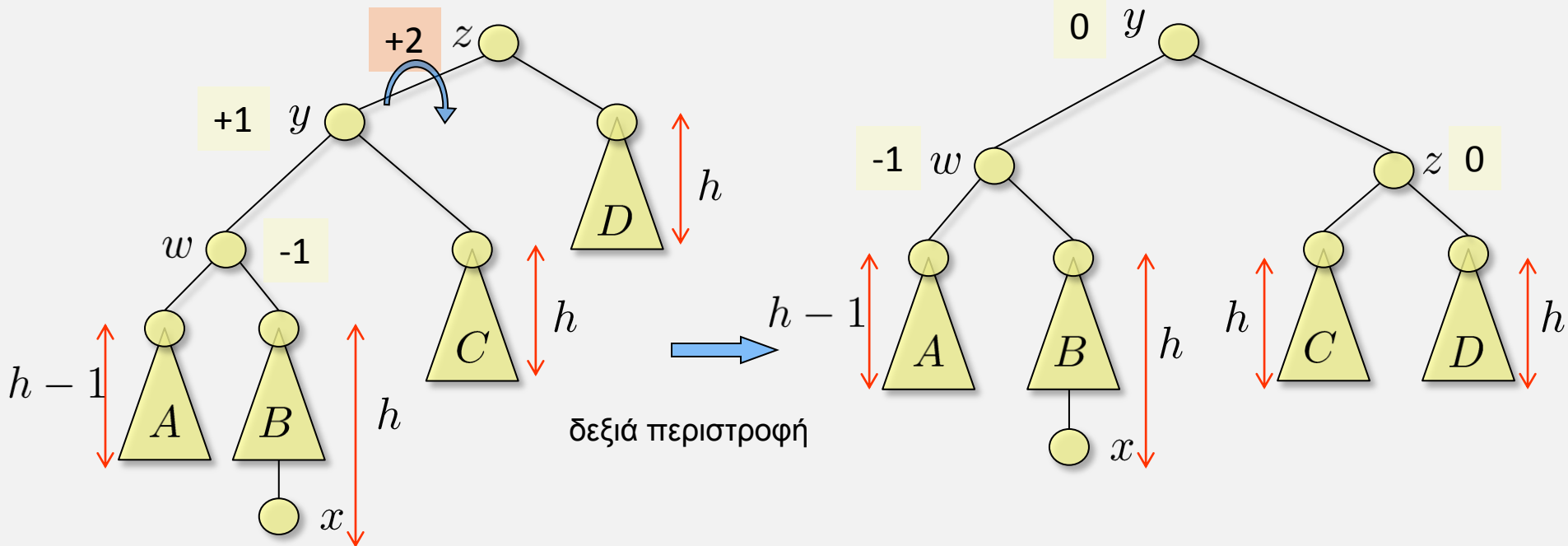
Περίπτωση LL: y = αριστερό παιδί του z και w = αριστερό παιδί του y



Δένδρα AVL

Αποκατάσταση ισορροπίας μετά από εισαγωγή

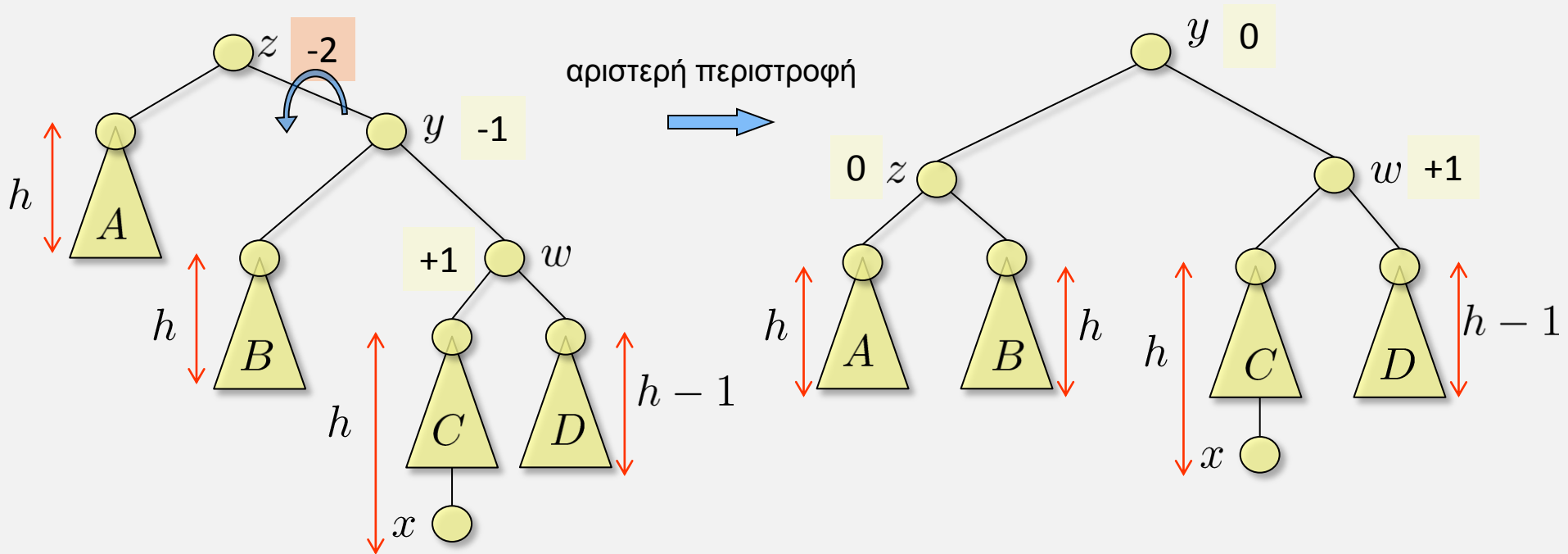
Περίπτωση LL: y = αριστερό παιδί του z και w = αριστερό παιδί του y



Δένδρα AVL

Αποκατάσταση ισορροπίας μετά από εισαγωγή

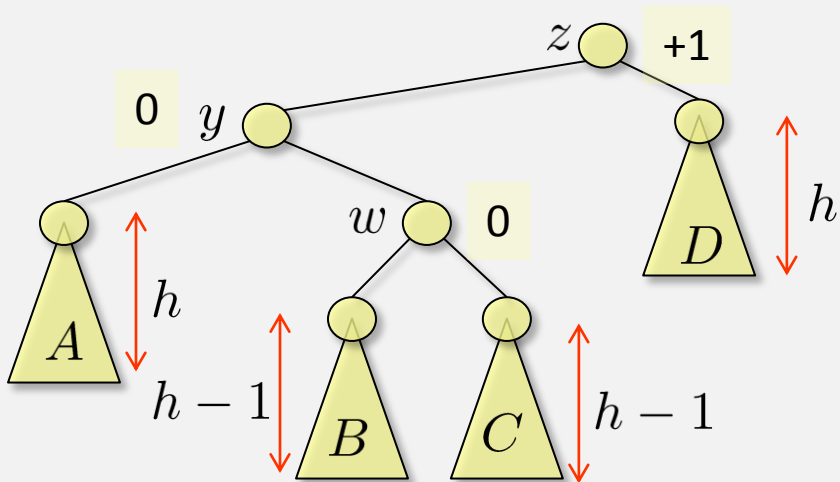
Περίπτωση RR: y = δεξί παιδί του z και w = δεξί παιδί του y



Δένδρα AVL

Αποκατάσταση ισορροπίας μετά από εισαγωγή

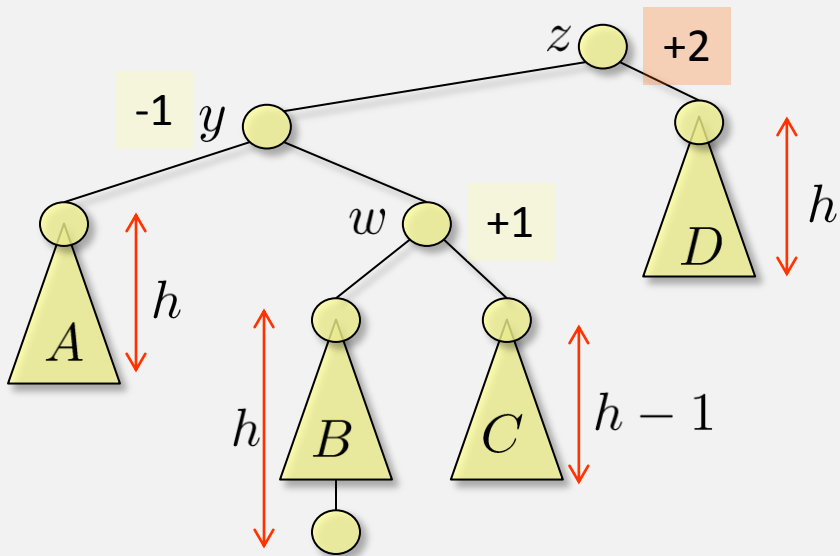
Περίπτωση LR: y = αριστερό παιδί του z και w = δεξί παιδί του y



Δένδρα AVL

Αποκατάσταση ισορροπίας μετά από εισαγωγή

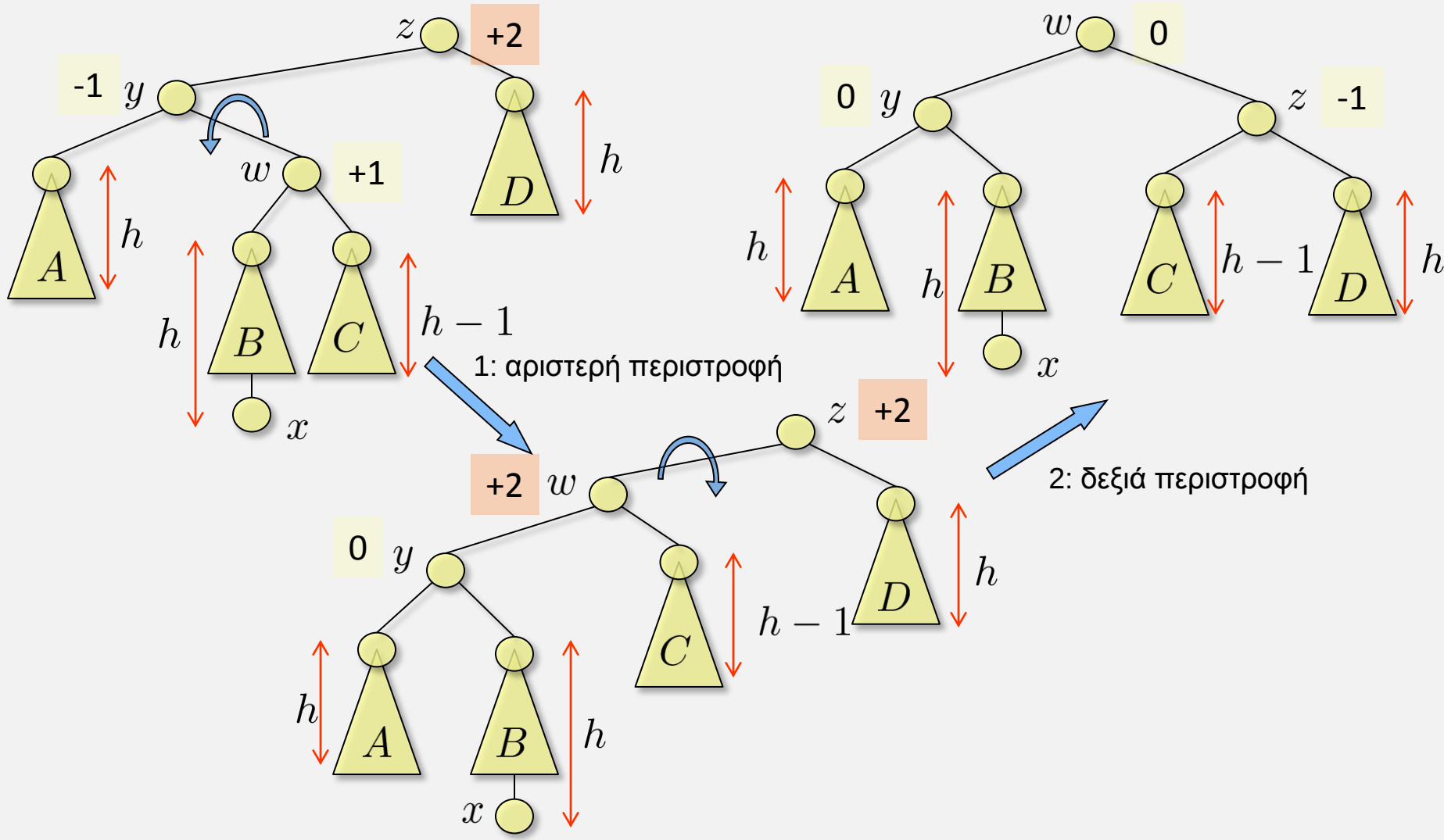
Περίπτωση LR: y = αριστερό παιδί του z και w = δεξί παιδί του y



Δένδρα AVL

Αποκατάσταση ισορροπίας μετά από εισαγωγή

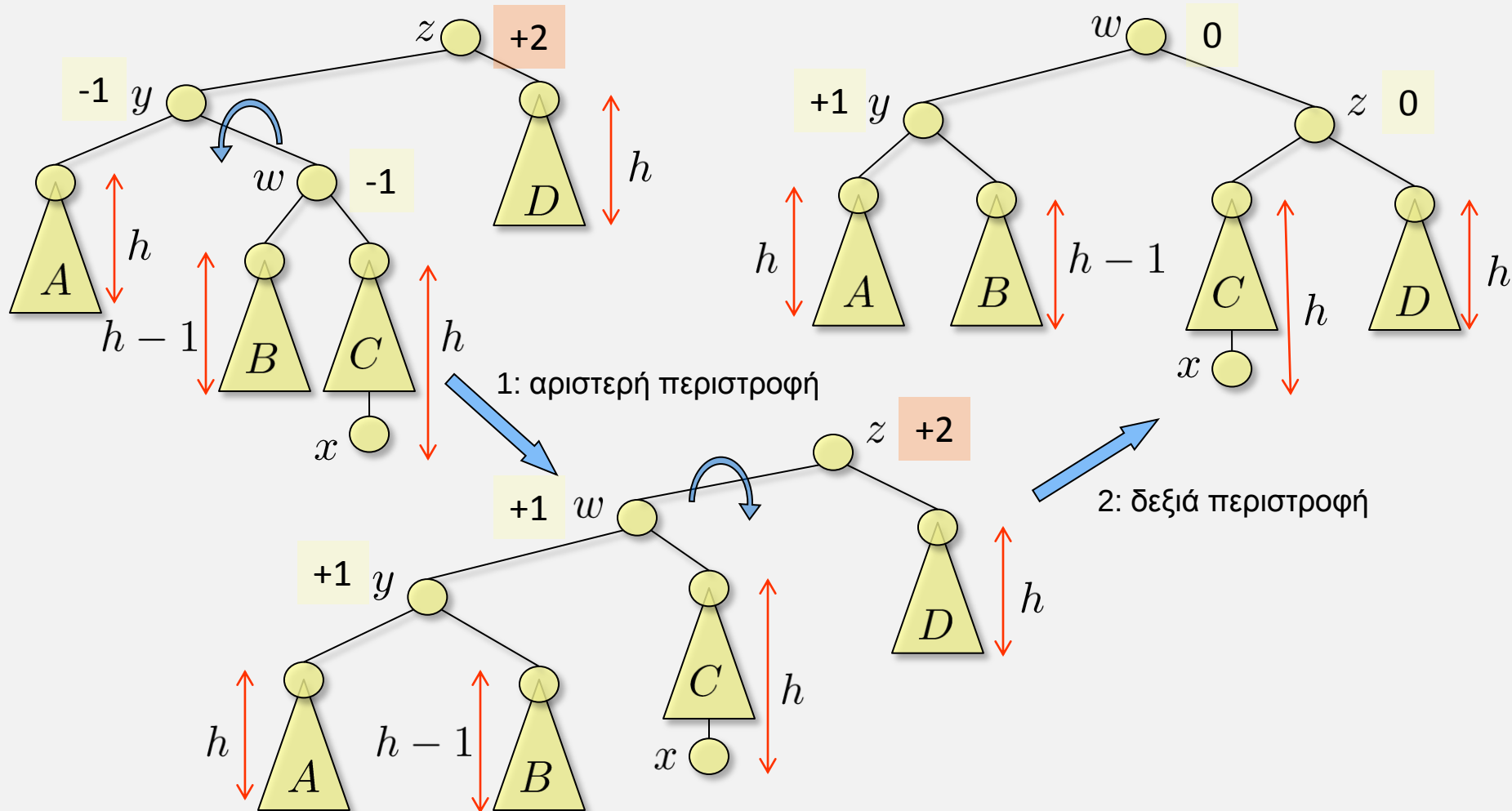
Περίπτωση LR: y = αριστερό παιδί του z και w = δεξί παιδί του y



Δένδρα AVL

Αποκατάσταση ισορροπίας μετά από εισαγωγή

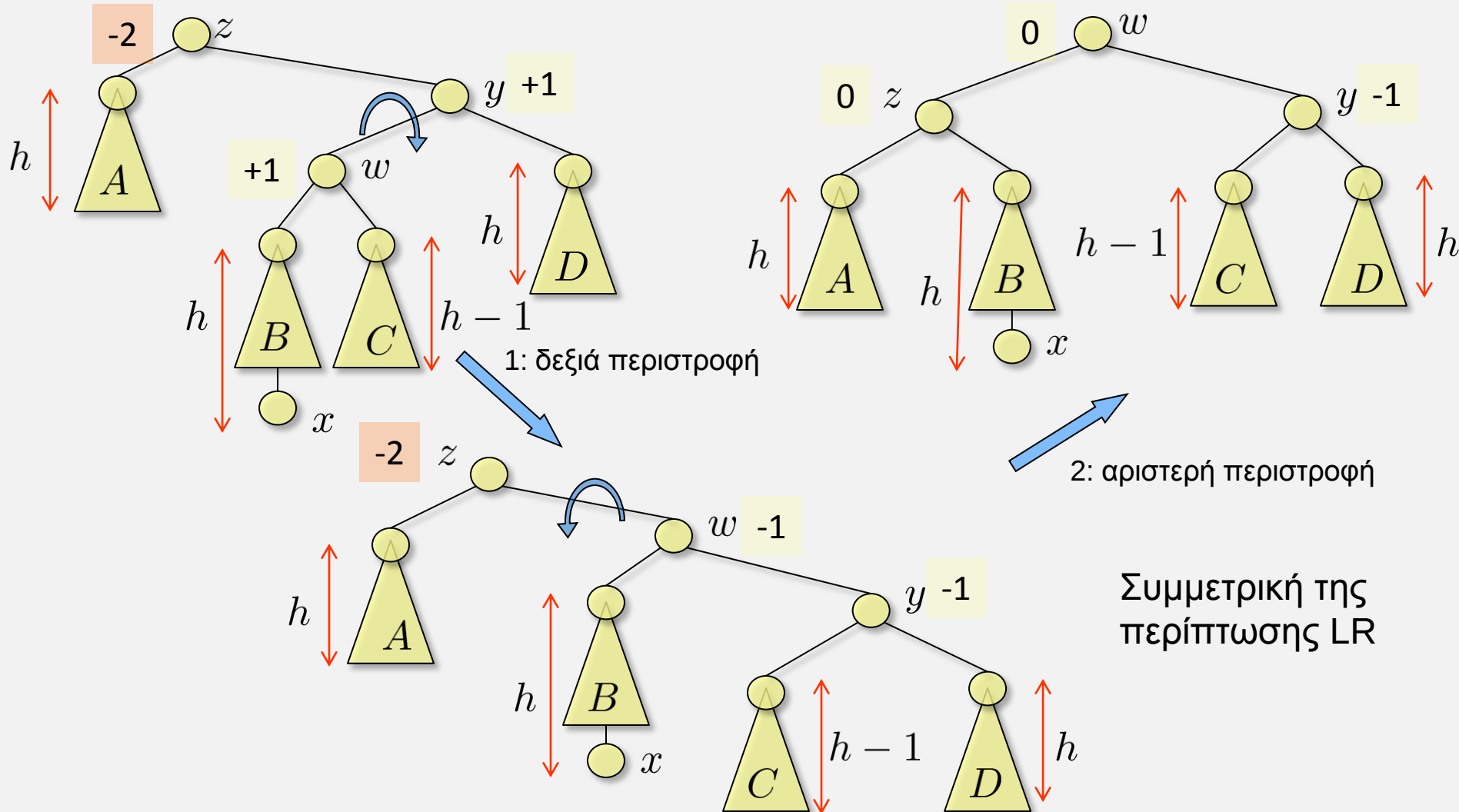
Περίπτωση LR: y = αριστερό παιδί του z και w = δεξί παιδί του y



Δένδρα AVL

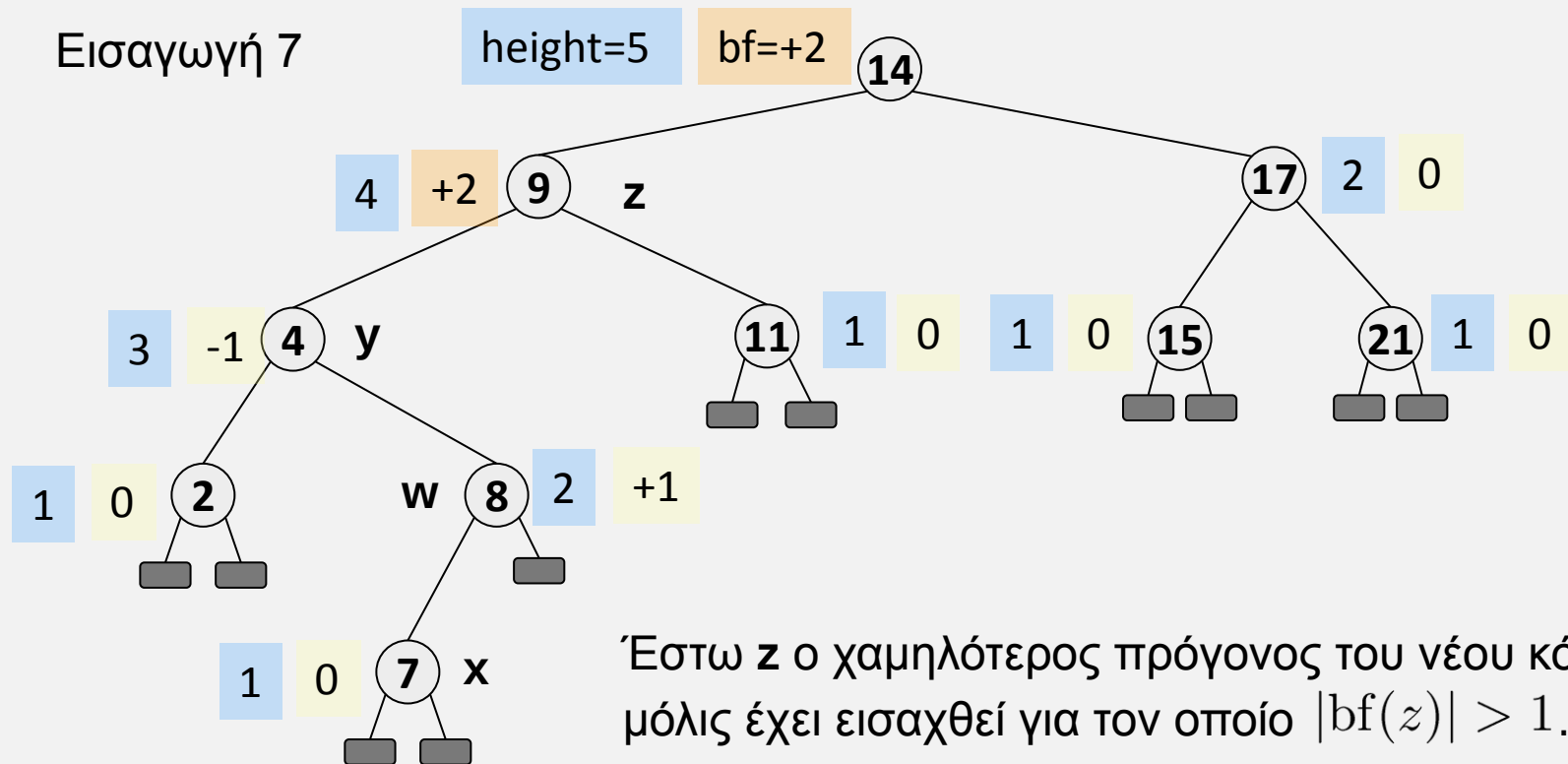
Αποκατάσταση ισορροπίας μετά από εισαγωγή

Περίπτωση RL: y = δεξί παιδί του z και w = αριστερό παιδί του y



Δένδρα AVL

Εισαγωγή 7



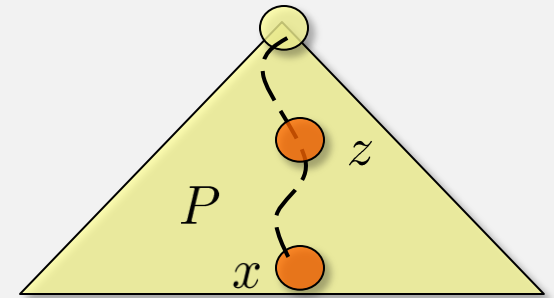
Έστω z ο χαμηλότερος πρόγονος του νέου κόμβου x που μόλις έχει εισαχθεί για τον οποίο $|\text{bf}(z)| > 1$. Τότε :

- Πριν την εισαγωγή του x ισχύει $|\text{bf}(z)| = 1$
- Για κάθε πρόγονο v του x στο μονοπάτι από τον y στον x , πριν την εισαγωγή του x ισχύει $\text{bf}(v) = 0$

Δένδρα AVL

Αποκατάσταση ισορροπίας μετά από εισαγωγή

Έστω x ο κόμβος που μόλις έχει εισαχθεί και έστω P το μονοπάτι εισαγωγής του x από τη ρίζα



Κρίσιμος κόμβος : Ο χαμηλότερος πρόγονος z του x για τον οποίο $|\text{bf}(z)| = 1$ πριν την εισαγωγή

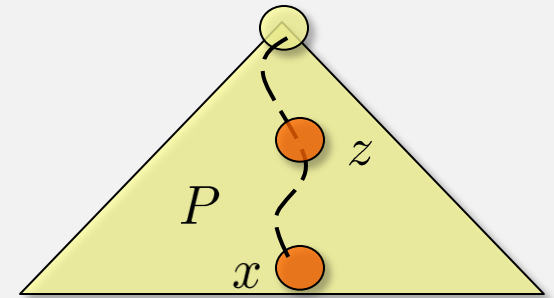
- Πριν την εισαγωγή του x ισχύει $\text{bf}(v) = 0$ για κάθε κόμβο v στο P με μικρότερο ύψος από τον z
- Ο κρίσιμος κόμβος μετά την εισαγωγή έχει $\text{bf}(z)$ ίσο με 0 ή $+2$ ή -2
- Μετά την εισαγωγή (και την απλή ή διπλή περιστροφή αν χρειαστεί) το ύψος του κρίσιμου κόμβου δεν αλλάζει
- Άρα για κάθε κόμβο v στο P με μεγαλύτερο ύψος από τον z το $\text{bf}(v)$ δεν αλλάζει μετά την εισαγωγή (και την απλή ή διπλή περιστροφή αν χρειαστεί)

Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι μια απλή ή μια διπλή περιστροφή αρκεί για να αποκαταστήσει την ισορροπία του δένδρου

Δένδρα AVL

Αποκατάσταση ισορροπίας μετά από εισαγωγή

Έστω x ο κόμβος που μόλις έχει εισαχθεί και έστω P το μονοπάτι εισαγωγής του x από τη ρίζα



Κρίσιμος κόμβος : Ο χαμηλότερος πρόγονος z του x για τον οποίο $|\text{bf}(z)| = 1$ πριν την εισαγωγή

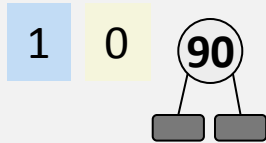
Εάν γίνει περιστροφή, αυτή σχετίζεται με τον κρίσιμο κόμβο z και μπορεί να είναι:

- Μια απλή περιστροφή μεταξύ του z και του κόμβου-παιδιού του y στο μονοπάτι που ακολουθήθηκε για την εισαγωγή
- Μια διπλή περιστροφή μεταξύ του κρίσιμου κόμβου z , του κόμβου-παιδιού του y και του κόμβου-εγγονού του w στο μονοπάτι για την εισαγωγή

Καθώς ο αλγόριθμος κατεβαίνει προς το ζητούμενο φύλλο, αρκεί να θυμάται μόνο τον τελευταίο κρίσιμο κόμβο z . Μετά την εισαγωγή, ξεκινώντας από τον κρίσιμο κόμβο ακολουθεί και πάλι το ίδιο μονοπάτι προς τον κόμβο x που εισήχθη και διορθώνει τα bf . Τέλος, αν χρειάζεται κάνει τις περιστροφές.

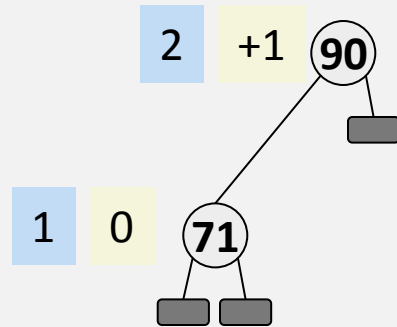
Δένδρα AVL

Εισαγωγή κατά σειρά των κλειδιών 90 71 64 2 4 12 5 21 19 52



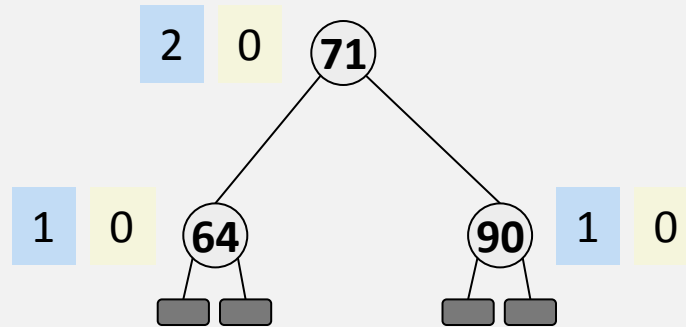
Δένδρα AVL

Εισαγωγή κατά σειρά των κλειδιών 90 71 64 2 4 12 5 21 19 52



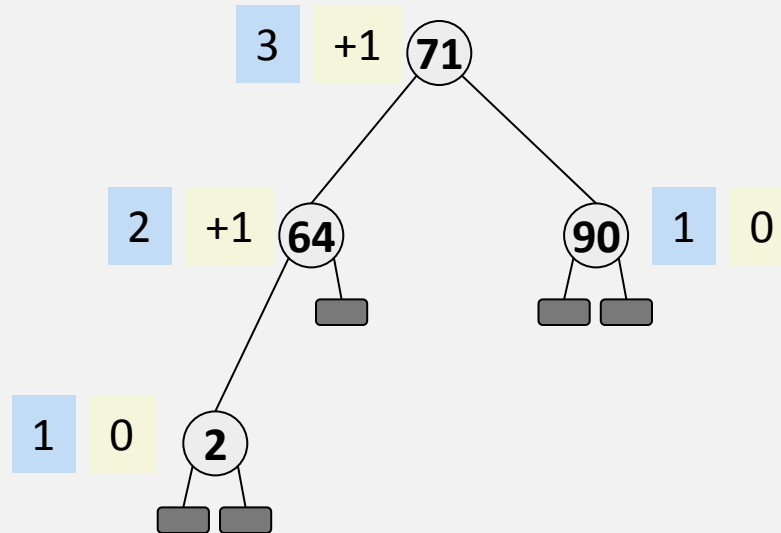
Δένδρα AVL

Εισαγωγή κατά σειρά των κλειδιών 90 71 64 2 4 12 5 21 19 52



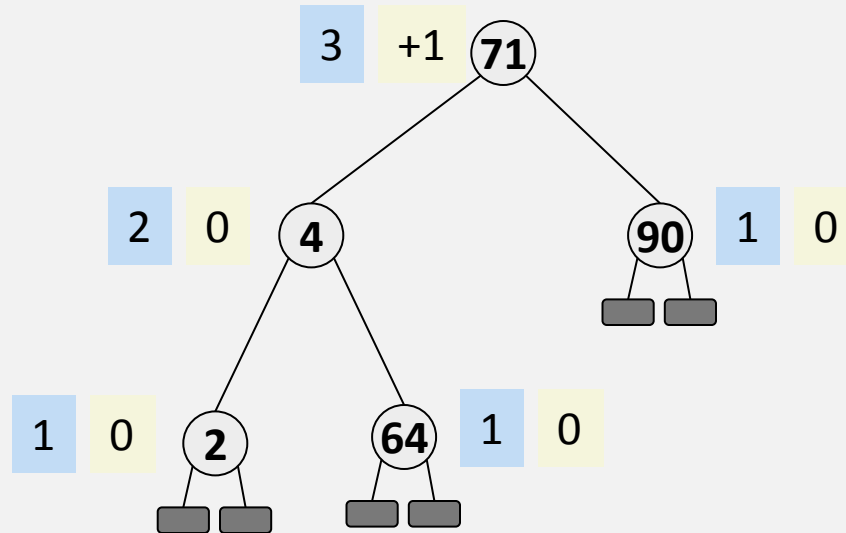
Δένδρα AVL

Εισαγωγή κατά σειρά των κλειδιών 90 71 64 2 4 12 5 21 19 52



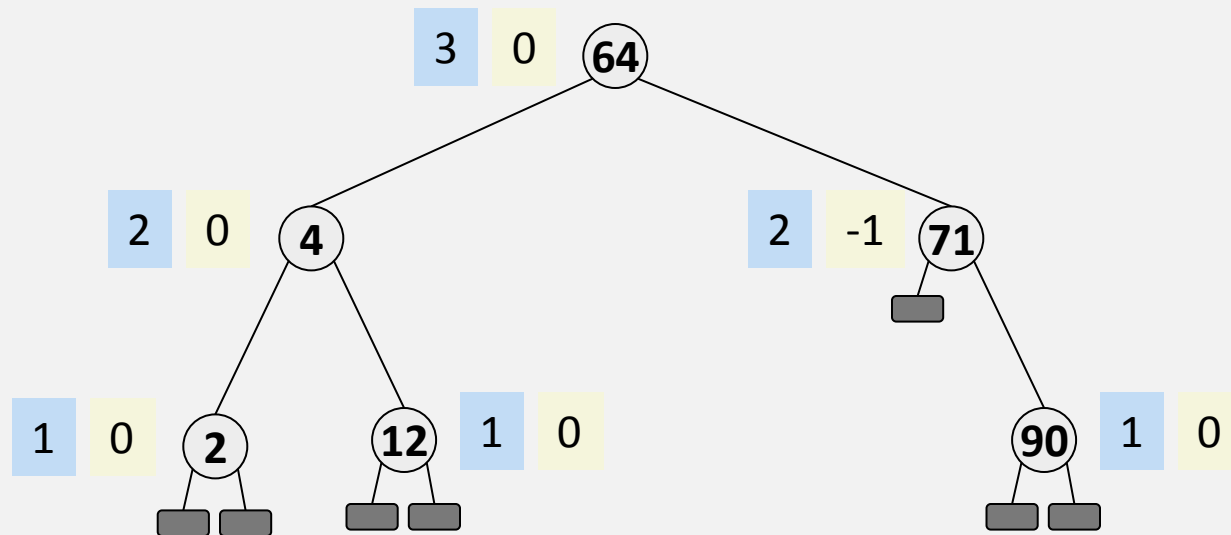
Δένδρα AVL

Εισαγωγή κατά σειρά των κλειδιών 90 71 64 2 4 12 5 21 19 52



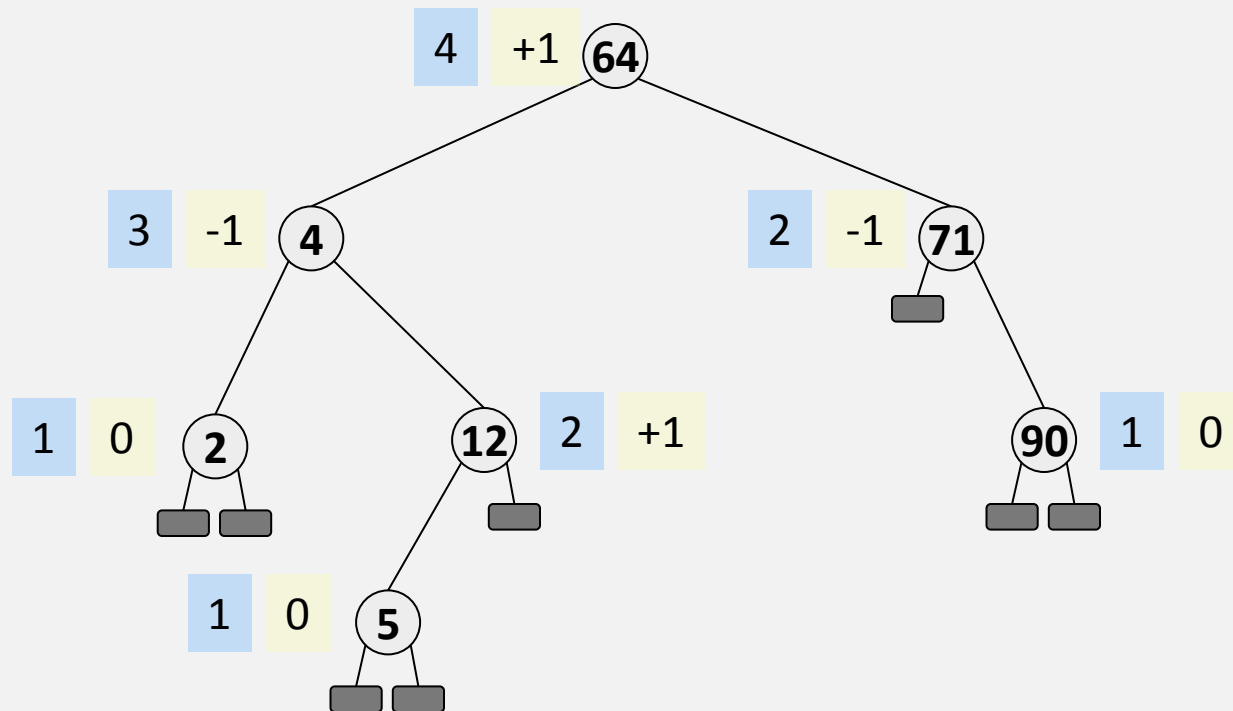
Δένδρα AVL

Εισαγωγή κατά σειρά των κλειδιών 90 71 64 2 4 12 5 21 19 52



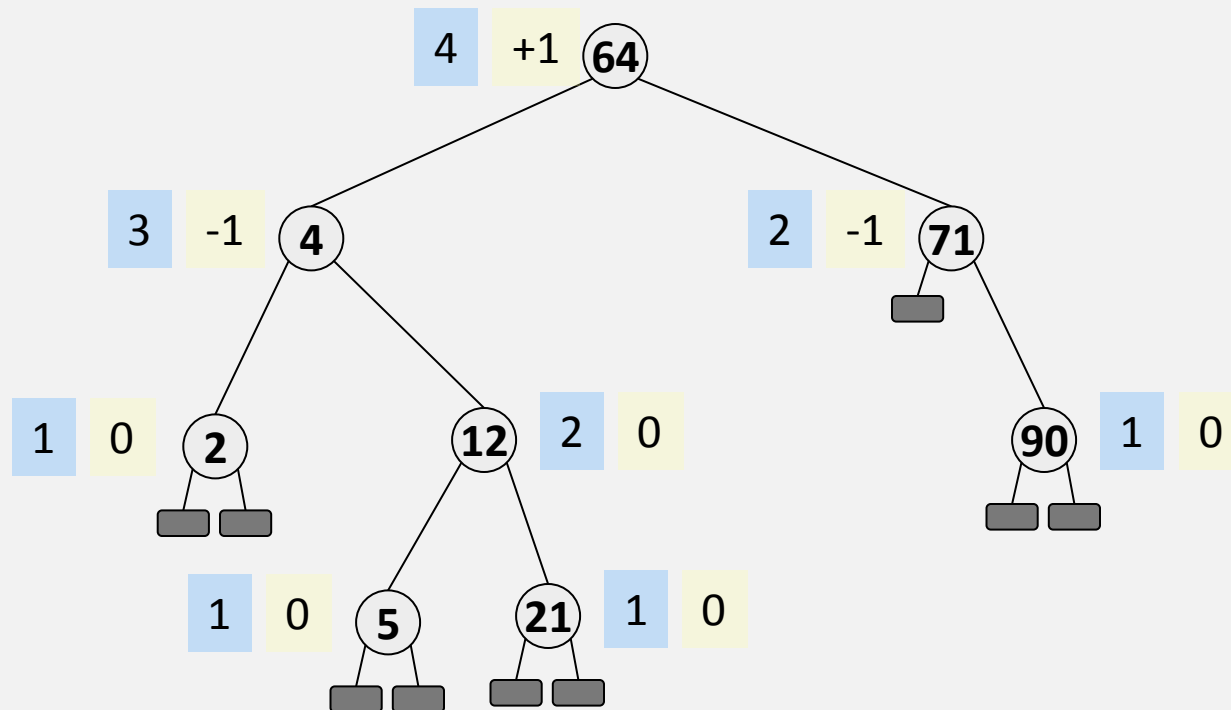
Δένδρα AVL

Εισαγωγή κατά σειρά των κλειδιών 90 71 64 2 4 12 5 21 19 52



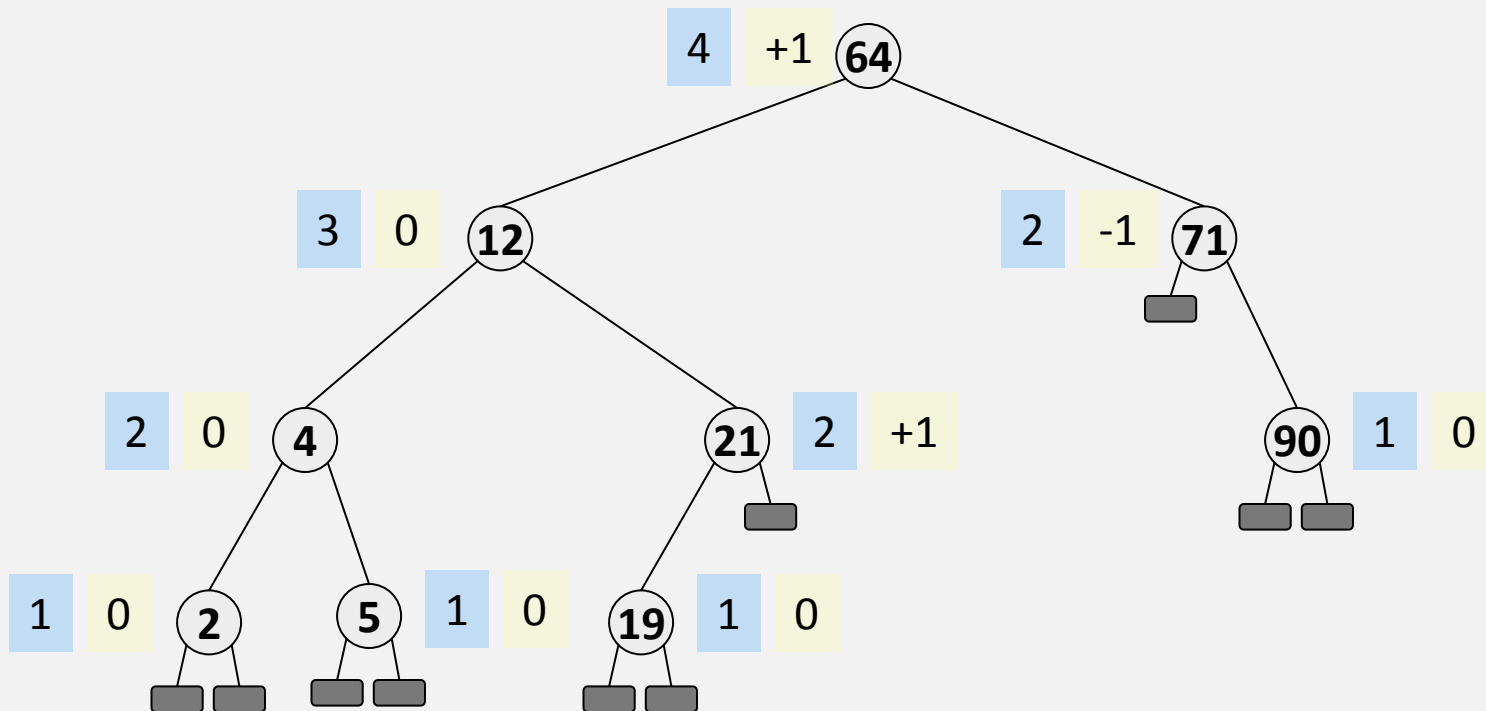
Δένδρα AVL

Εισαγωγή κατά σειρά των κλειδιών 90 71 64 2 4 12 5 21 19 52



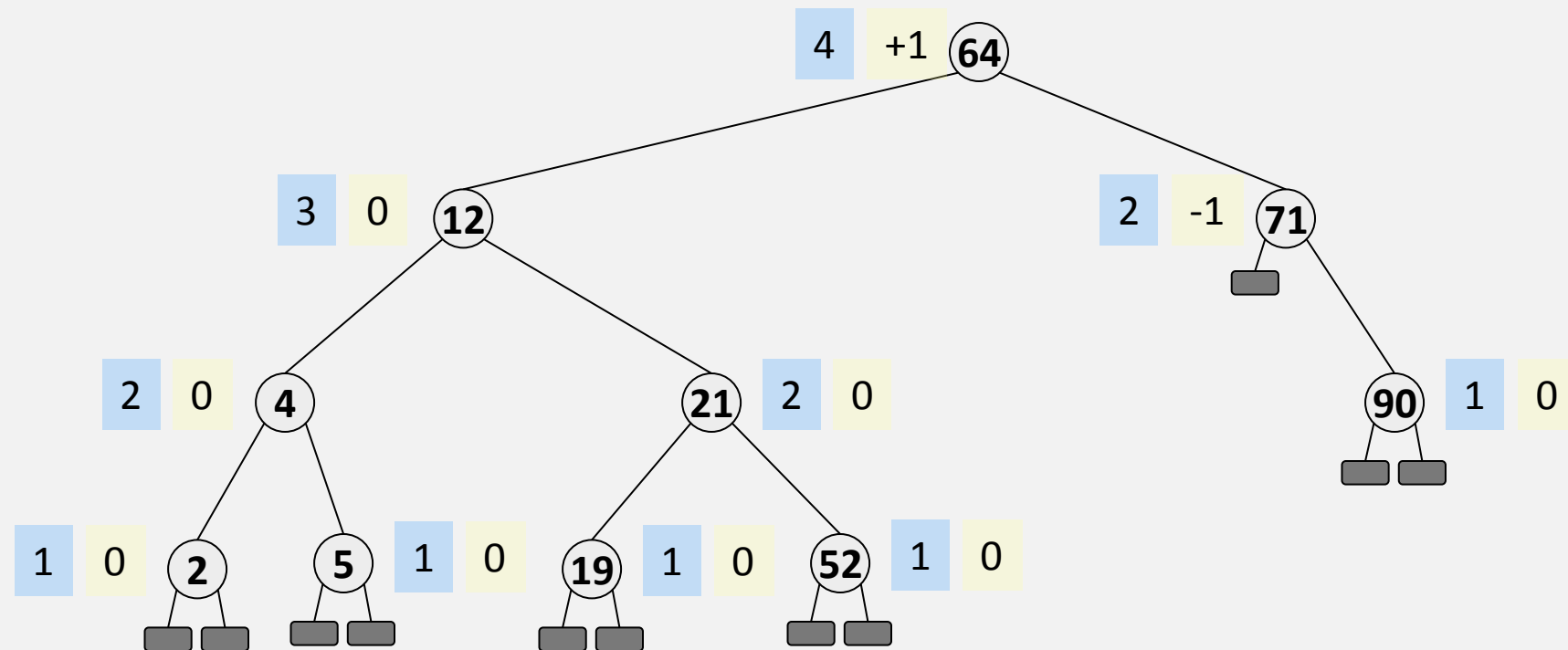
Δένδρα AVL

Εισαγωγή κατά σειρά των κλειδιών 90 71 64 2 4 12 5 21 19 52



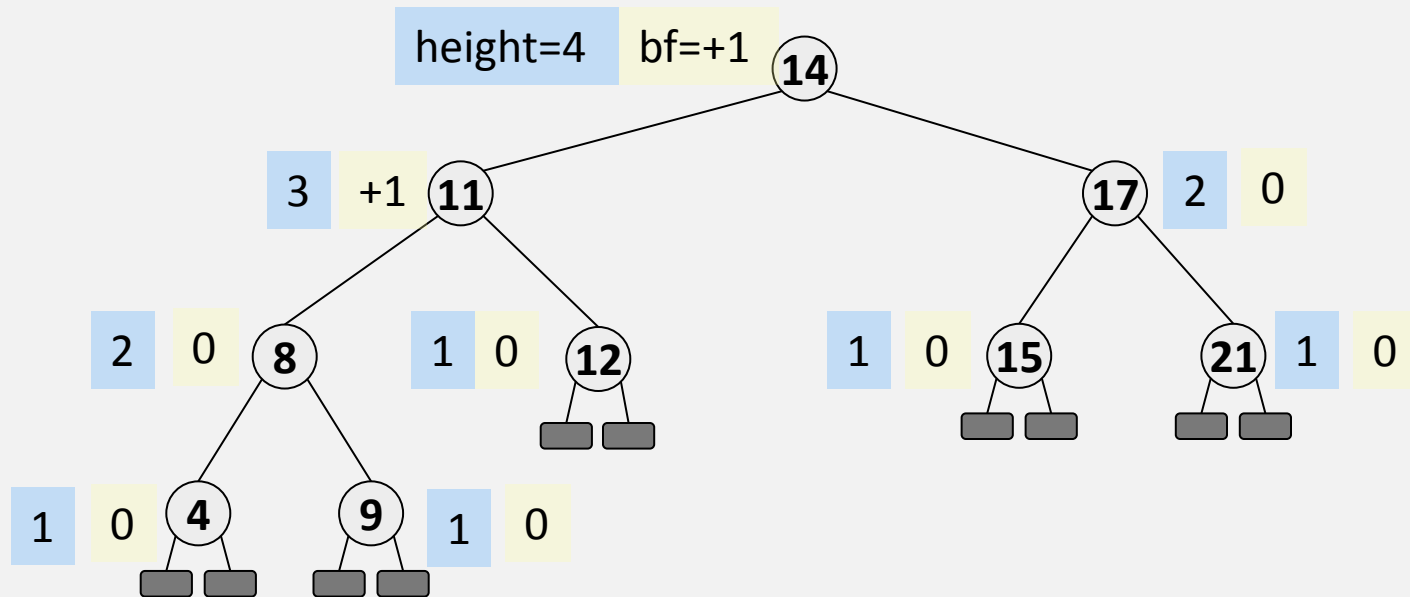
Δένδρα AVL

Εισαγωγή κατά σειρά των κλειδιών 90 71 64 2 4 12 5 21 19 52



Δένδρα AVL

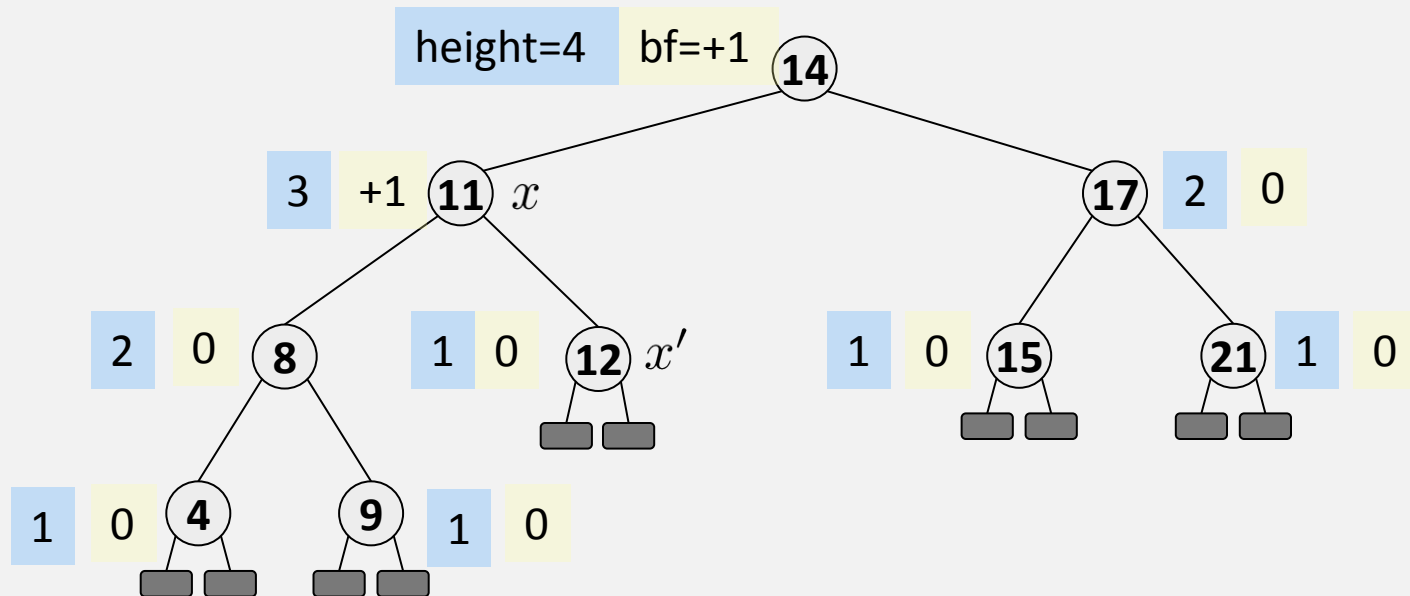
Διαγραφή 11



Δένδρα AVL

Διαγραφή 11

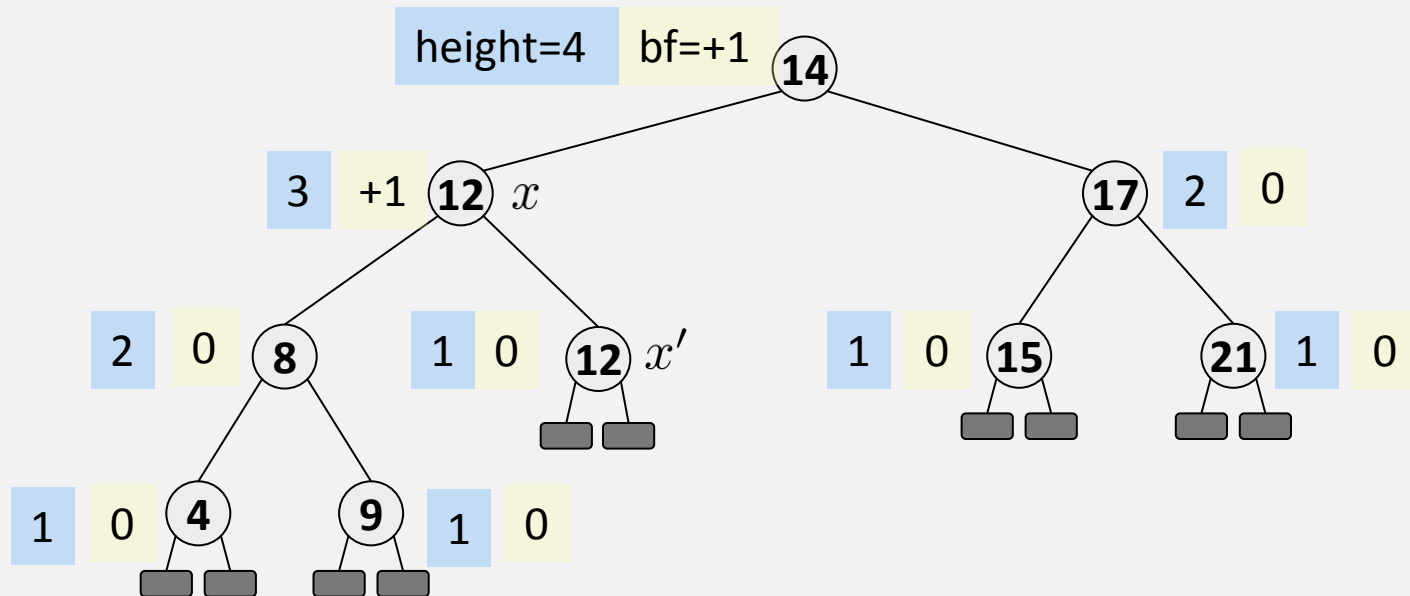
Αντιγράφουμε στον κόμβο x το κλειδί του διαδόχου x' και διαγράφουμε τον x'



Δένδρα AVL

Διαγραφή 11

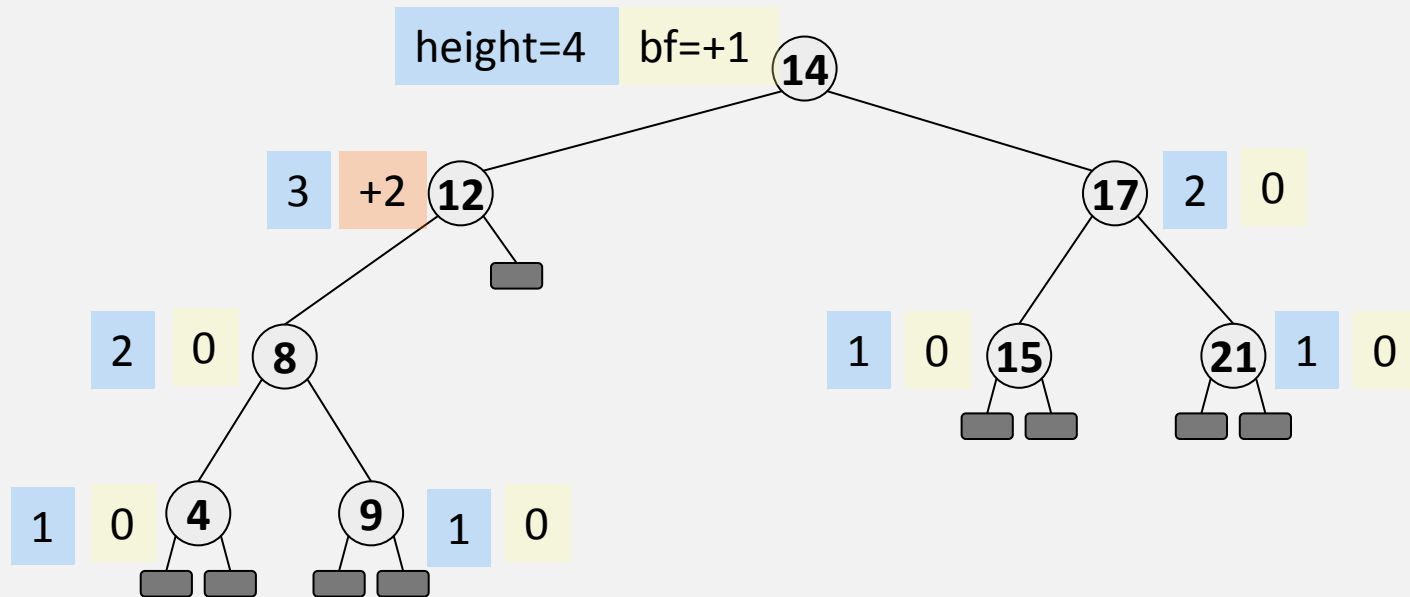
Αντιγράφουμε στον κόμβο x το κλειδί του διαδόχου x' και διαγράφουμε τον x'



Δένδρα AVL

Διαγραφή 11

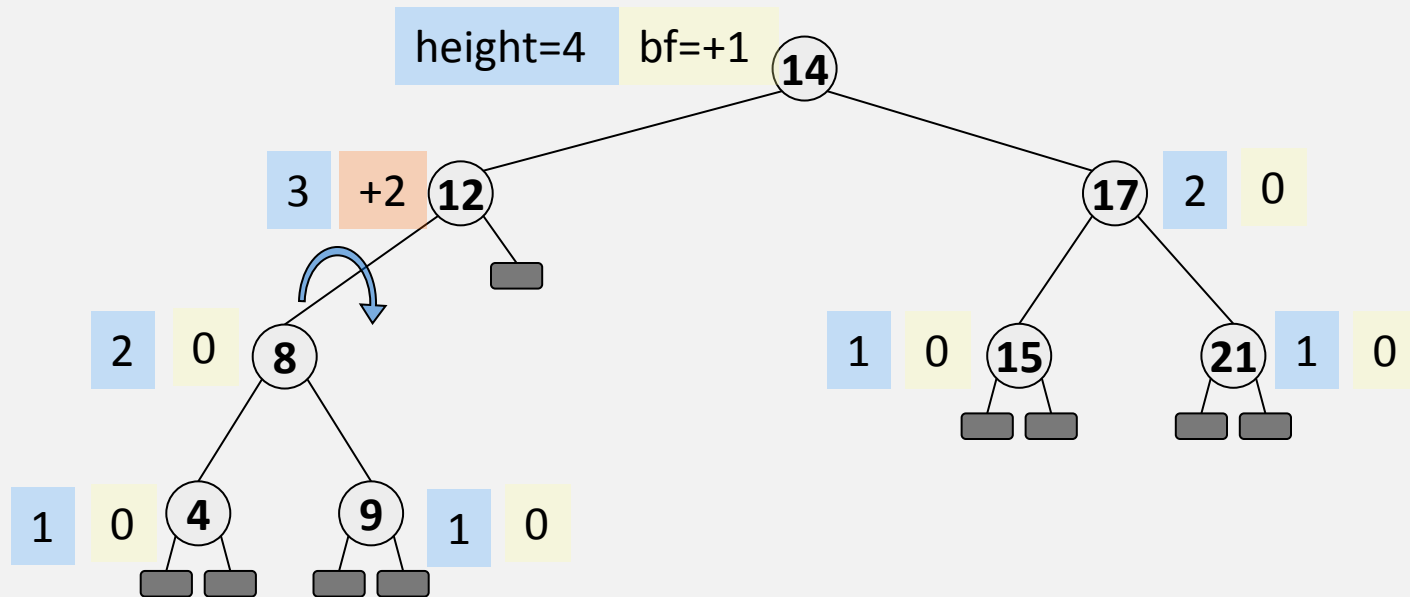
Παραβιάζεται η συνθήκη ισορροπίας στον κόμβο 12



Δένδρα AVL

Διαγραφή 11

Παραβιάζεται η συνθήκη ισορροπίας στον κόμβο 12

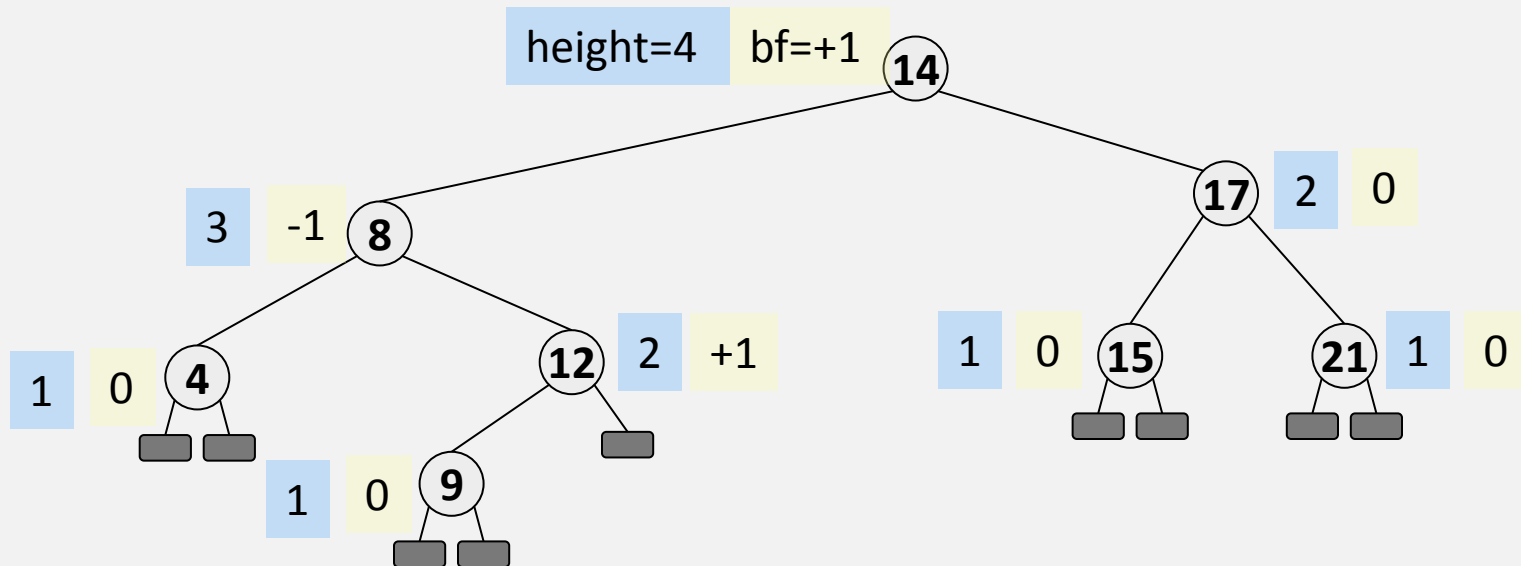


Εκτελούμε απλή περιστροφή του 8

Δένδρα AVL

Διαγραφή 11

Αποκαταστάθηκε η συνθήκη ισορροπίας



Δένδρα AVL

Διαγραφή κόμβου x σε δένδρο AVL

Αρχικά, εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο διαγραφής όπως στο απλό δυαδικό δένδρο αναζήτησης, διαγράφοντας τον κόμβο x' όπου:

- 1) $x'=x$ αν ο x είναι φύλλο
- 2) x' =παιδί του x αν ο x έχει μόνο ένα παιδί
- 3) x' =διάδοχος του x αν ο x έχει 2 παιδιά

(Στις περιπτώσεις 2 και 3 αντιγράφουμε τα περιεχόμενα του x' στον x πριν τη διαγραφή.)

Κατόπιν, ελέγχουμε τις τιμές του **bf**: το **bf** του κόμβου-γονέα z του κόμβου x' που διαγράφεται αλλάζει.

Δένδρα AVL

Διαγραφή κόμβου x σε δένδρο AVL

Αν το $\mathbf{bf}(z)$ του κόμβου-γονέα z του κόμβου x' που διαγράφεται αλλάζει

- από 0 σε $+1$ ή σε -1 , τότε ο αλγόριθμος τερματίζει.
- από $+1$ ή -1 σε 0 , το ύψος του z μειώνεται και άρα και το $\mathbf{bf}$ άλλων προγόνων του x' ενδεχομένως αλλάζει.
- από $+1$ ή -1 σε $+2$ ή -2 , τότε γίνεται μία ή περισσότερες περιστροφές.

Στη χειρότερη περίπτωση, μπορεί να χρειαστεί να γίνουν περιστροφές σε όλους τους κόμβους στο μονοπάτι από τον κόμβο z έως τη ρίζα. Το είδος των περιστροφών εξαρτάται από τις δύο πρώτες ακμές του μονοπατιού που καθορίζει το ύψος του εκάστοτε κόμβου με $\mathbf{bf} = +2$ ή -2 .

Ολόκληρο το μονοπάτι πρέπει να αποθηκευτεί και να ακολουθηθεί από τον κόμβο z προς τη ρίζα μέχρι να βρεθεί κάποιος κόμβος v με $\mathbf{bf}(v)=0$. Το $\mathbf{bf}(v)$ γίνεται $+1$ ή -1 , αλλά το ύψος του δεν αλλάζει, και από εκεί και μετά, το $\mathbf{bf}$ των κόμβων έως τη ρίζα δεν αλλάζει.

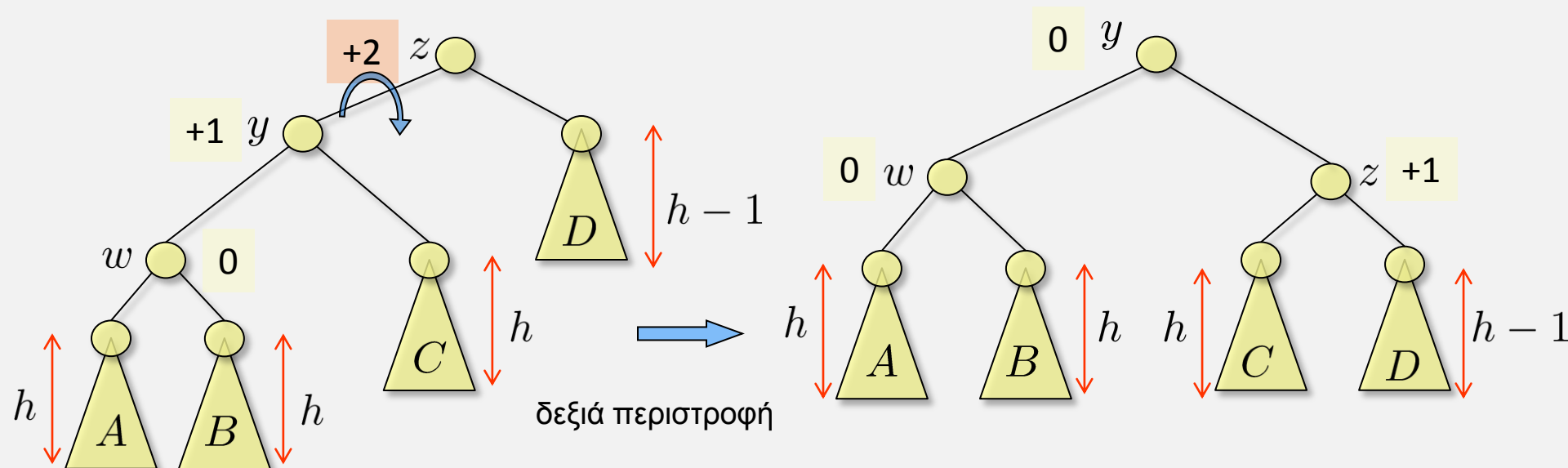
Δένδρα AVL

Αποκατάσταση ισορροπίας μετά από διαγραφή

Έστω z ο χαμηλότερος κόμβος που παραβιάζει τη συνθήκη ισορροπίας. Έστω y το παιδί του z με το μεγαλύτερο ύψος και έστω w το παιδί του y με το μεγαλύτερο ύψος. Σε περίπτωση που ο y έχει δύο παιδιά με το ίδιο ύψος επιλέγουμε το παιδί w του y για το οποίο οι σύνδεσμοι (z,y) και (y,w) έχουν την ίδια φορά.

Εφαρμόζουμε τις περιπτώσεις LL, RR, LR ή RL ανάλογα με τη θέση των z , y και w , όπως και την εισαγωγή

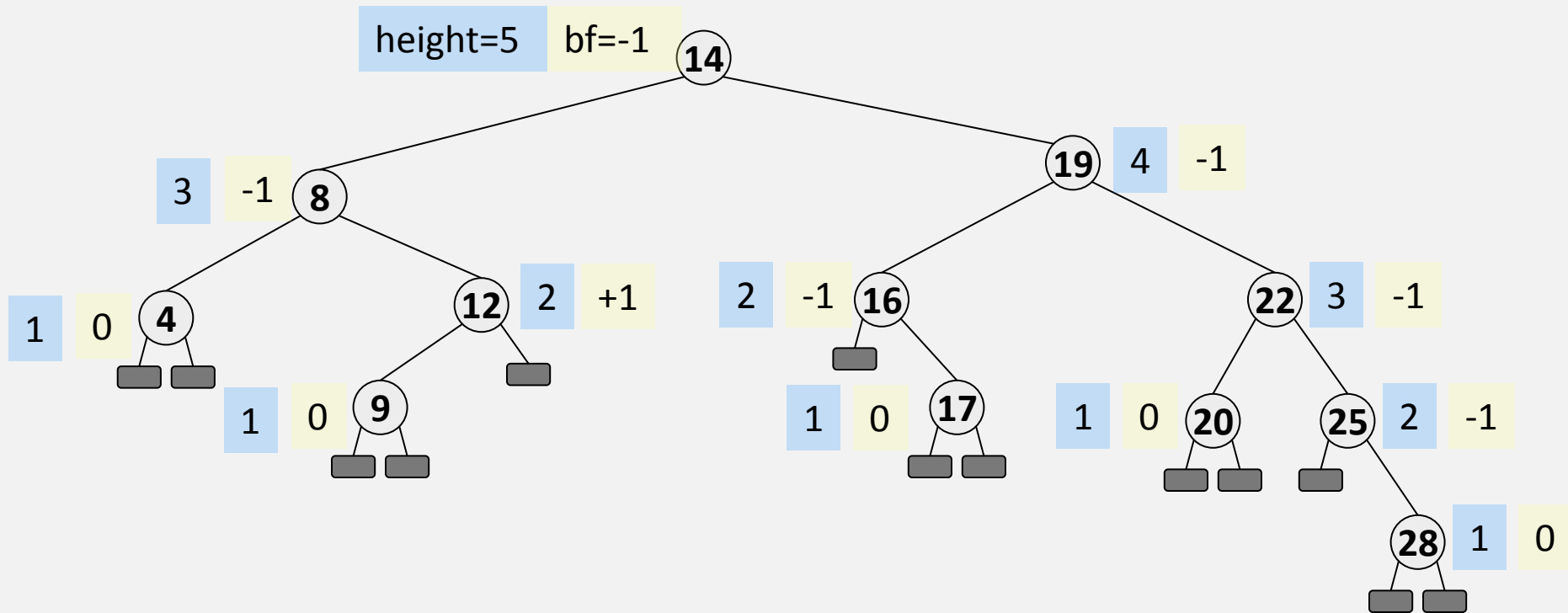
Π.χ. περίπτωση LL: y = αριστερό παιδί του z και w = αριστερό παιδί του y



Δένδρα AVL

Παράδειγμα που οδηγεί σε πολλαπλές περιστροφές

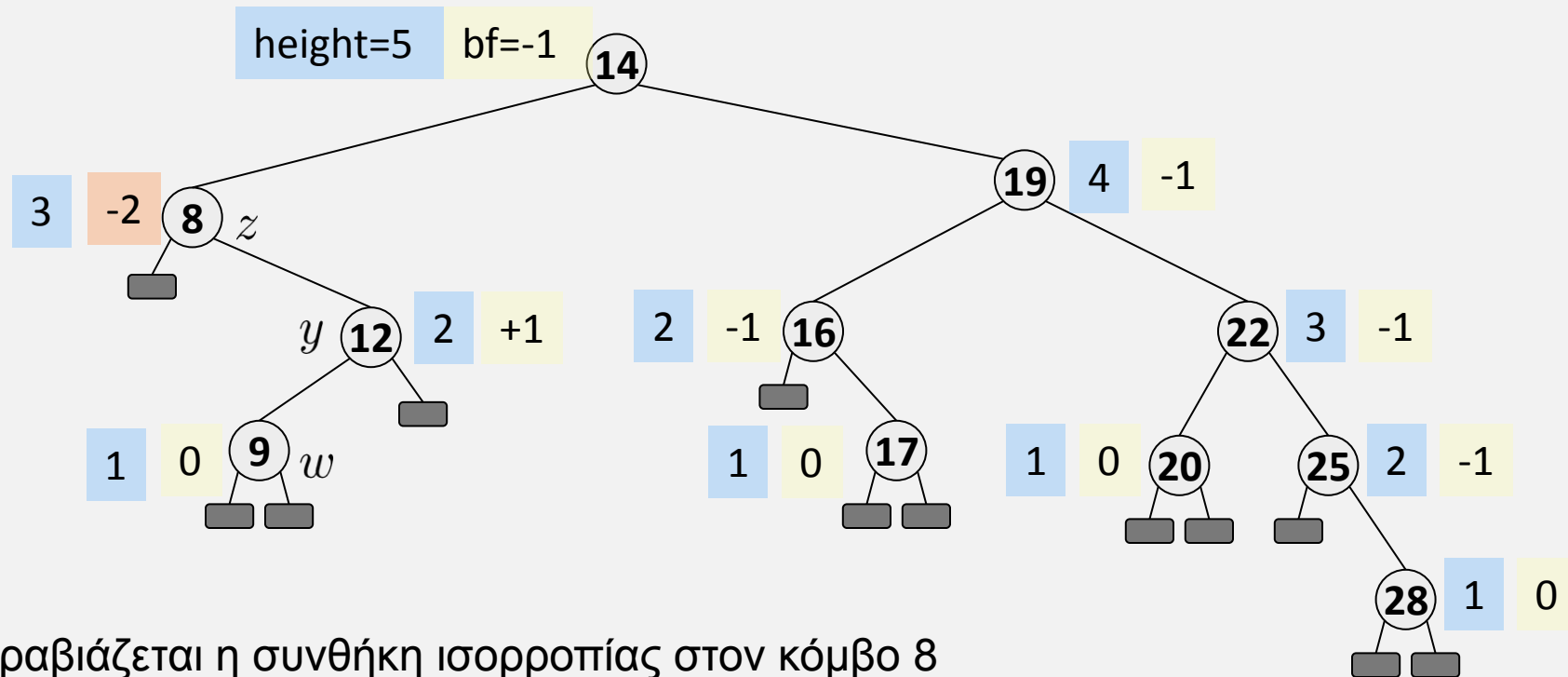
Διαγραφή 4



Δένδρα AVL

Παράδειγμα που οδηγεί σε πολλαπλές περιστροφές

Διαγραφή 4



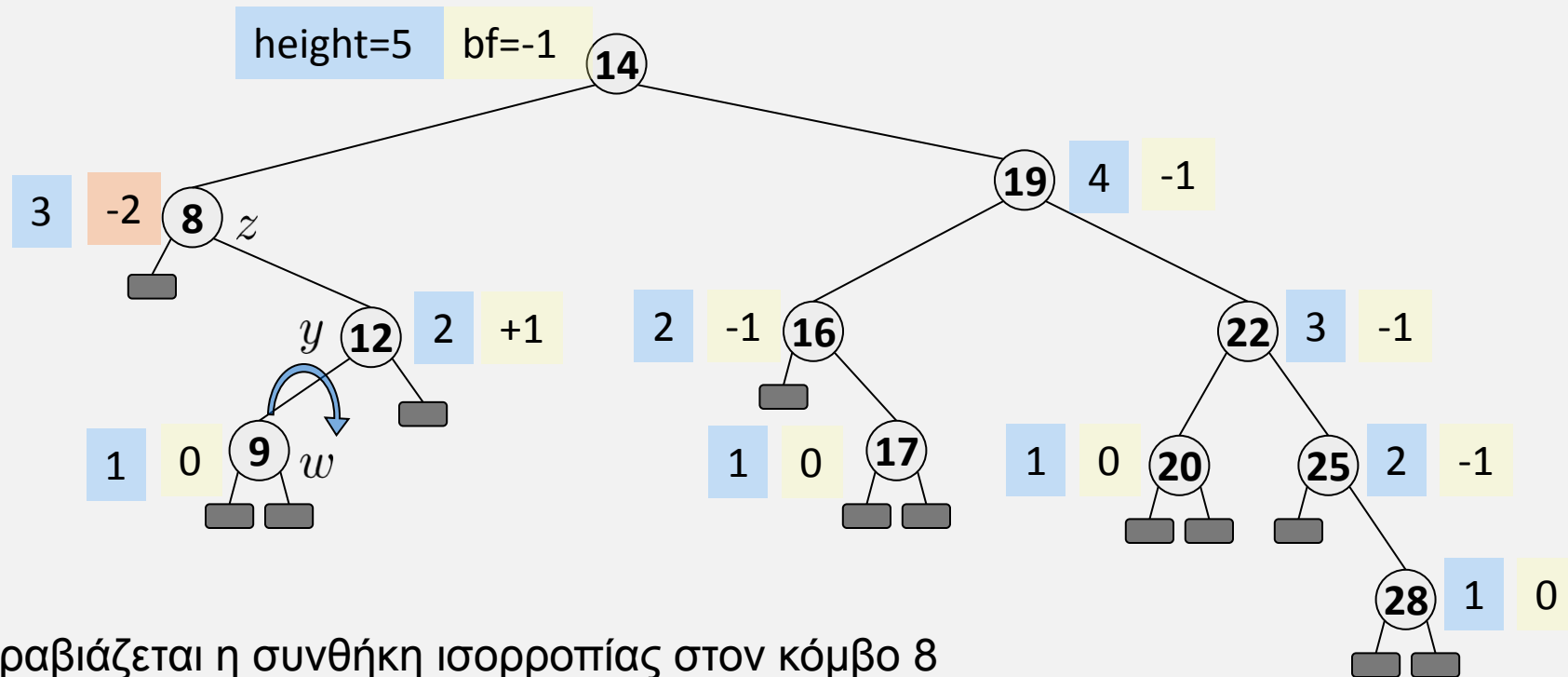
Παραβιάζεται η συνθήκη ισορροπίας στον κόμβο 8

Περίπτωση RL: διπλή περιστροφή

Δένδρα AVL

Παράδειγμα που οδηγεί σε πολλαπλές περιστροφές

Διαγραφή 4



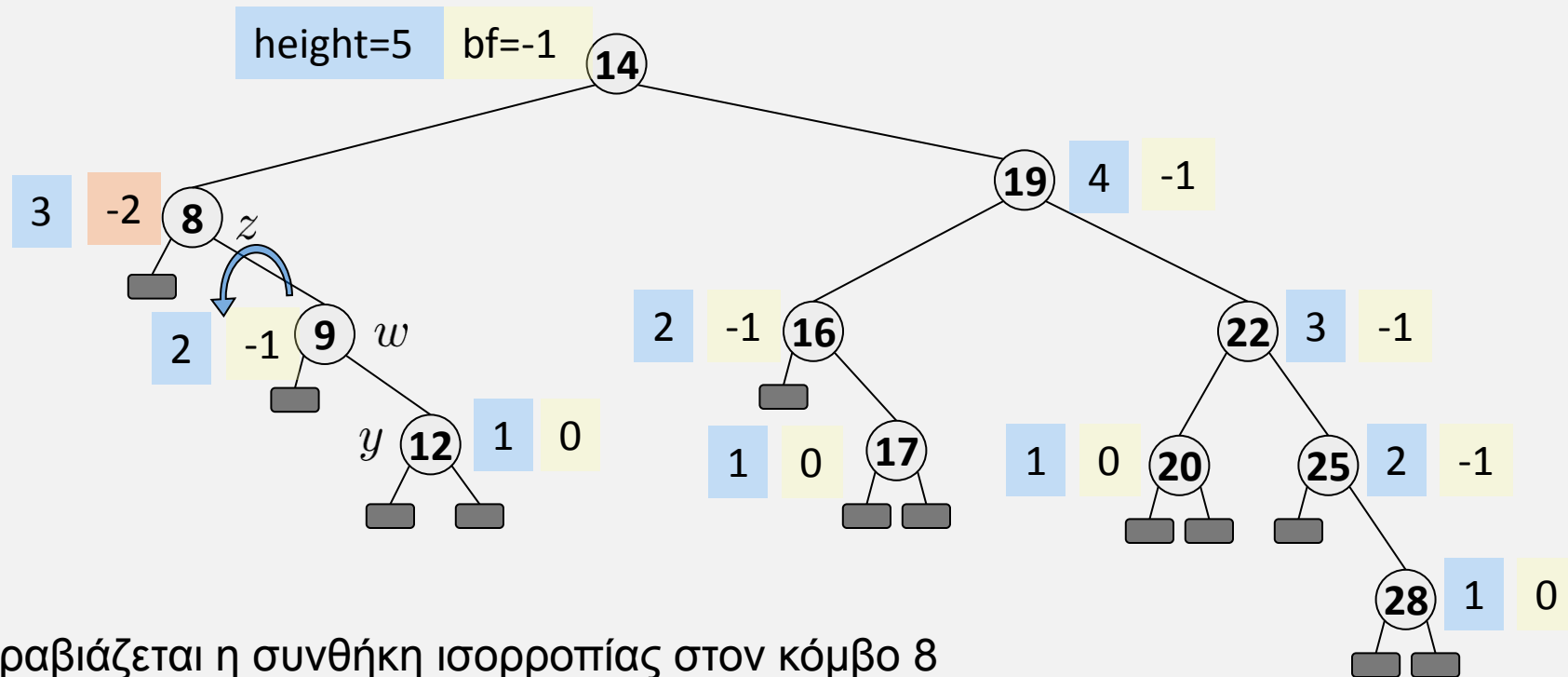
Παραβιάζεται η συνθήκη ισορροπίας στον κόμβο 8

Περίπτωση RL: διπλή περιστροφή

Δένδρα AVL

Παράδειγμα που οδηγεί σε πολλαπλές περιστροφές

Διαγραφή 4



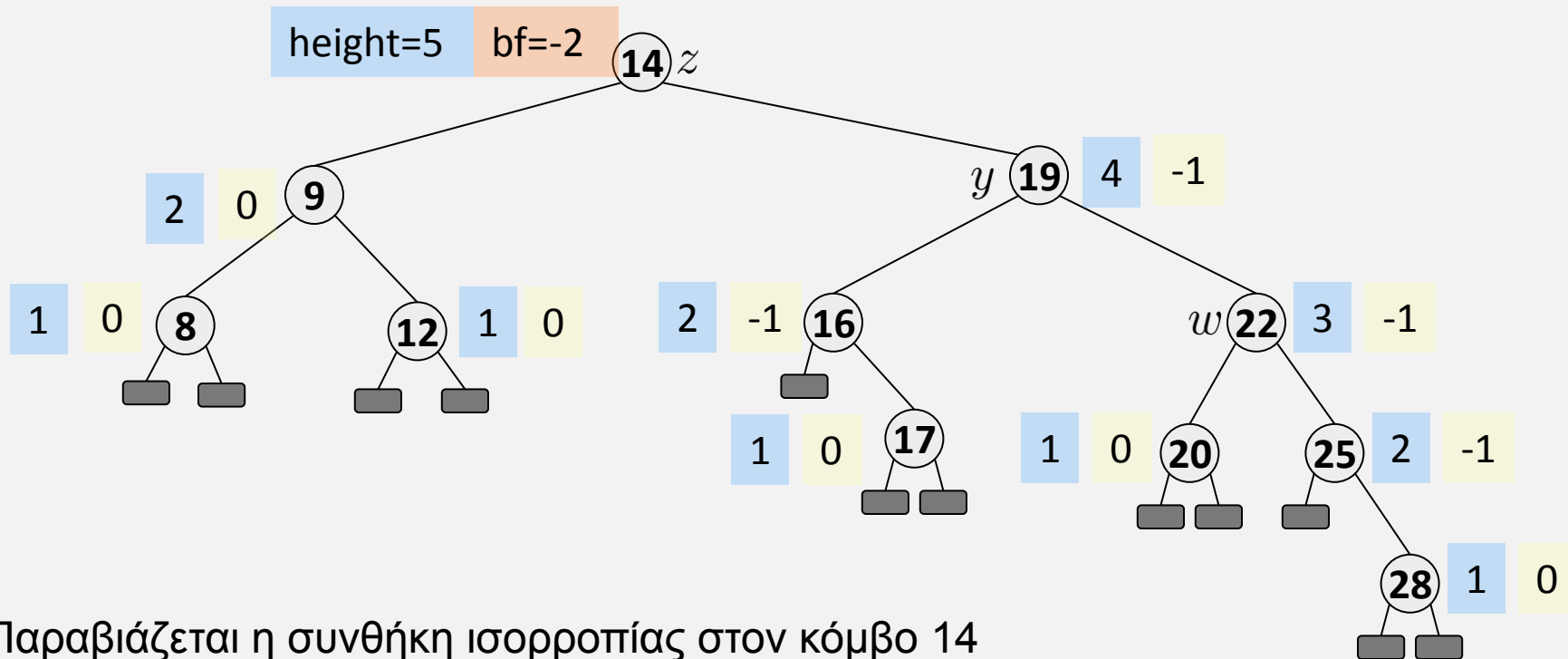
Παραβιάζεται η συνθήκη ισορροπίας στον κόμβο 8

Περίπτωση RL: διπλή περιστροφή

Δένδρα AVL

Παράδειγμα που οδηγεί σε πολλαπλές περιστροφές

Διαγραφή 4



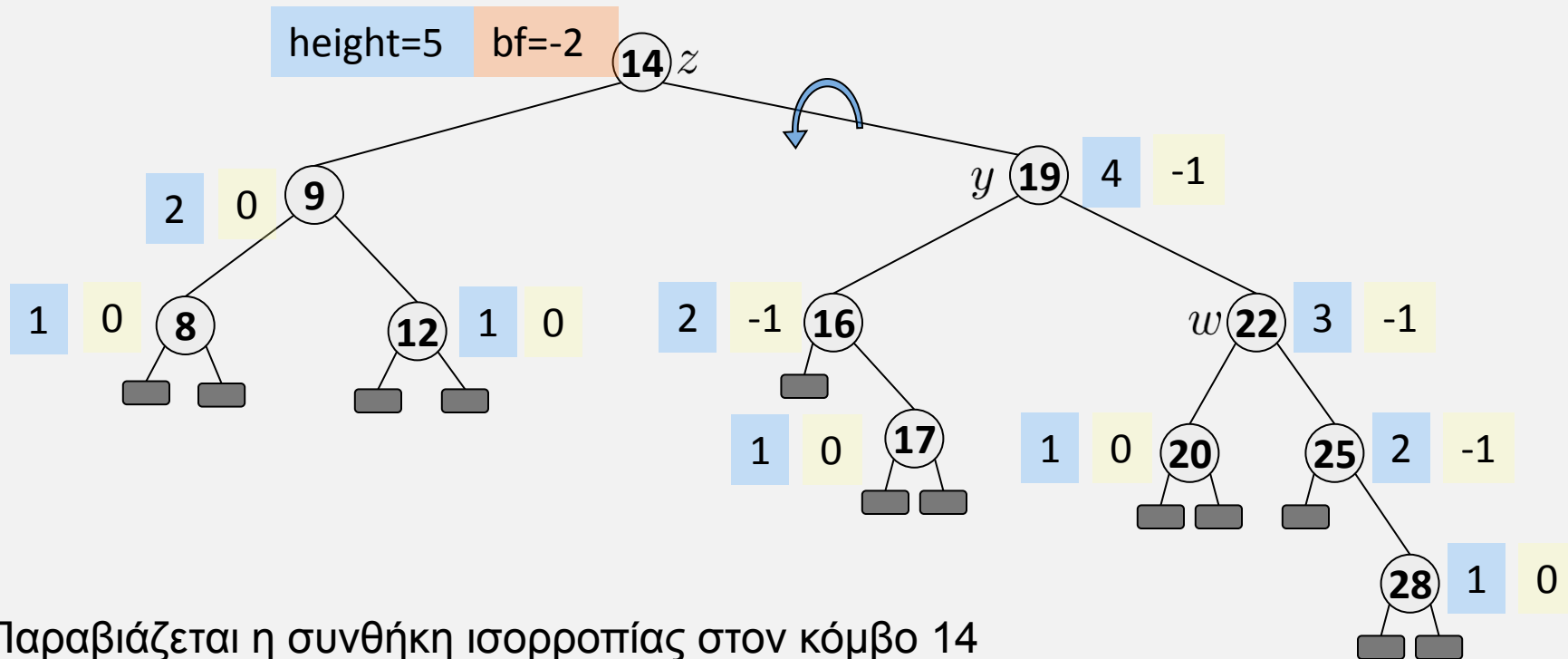
Παραβιάζεται η συνθήκη ισορροπίας στον κόμβο 14

Περίπτωση RR: απλή περιστροφή

Δένδρα AVL

Παράδειγμα που οδηγεί σε πολλαπλές περιστροφές

Διαγραφή 4



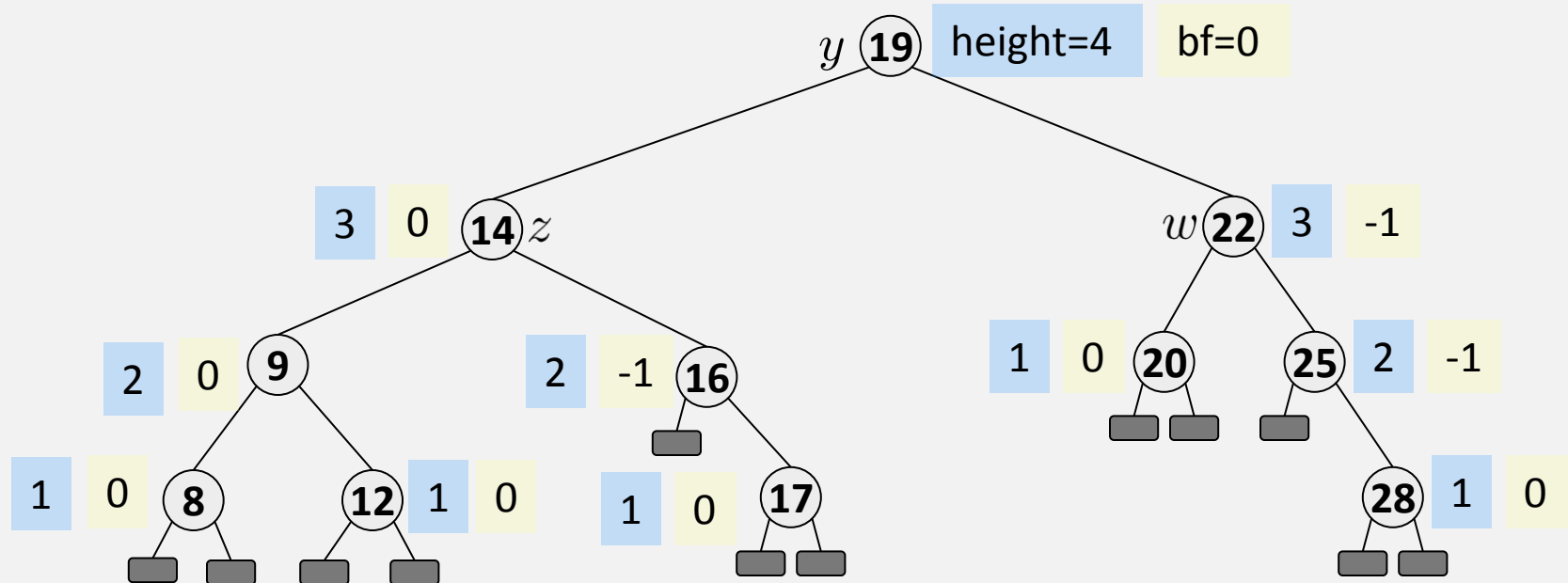
Παραβιάζεται η συνθήκη ισορροπίας στον κόμβο 14

Περίπτωση RR: απλή περιστροφή

Δένδρα AVL

Παράδειγμα που οδηγεί σε πολλαπλές περιστροφές

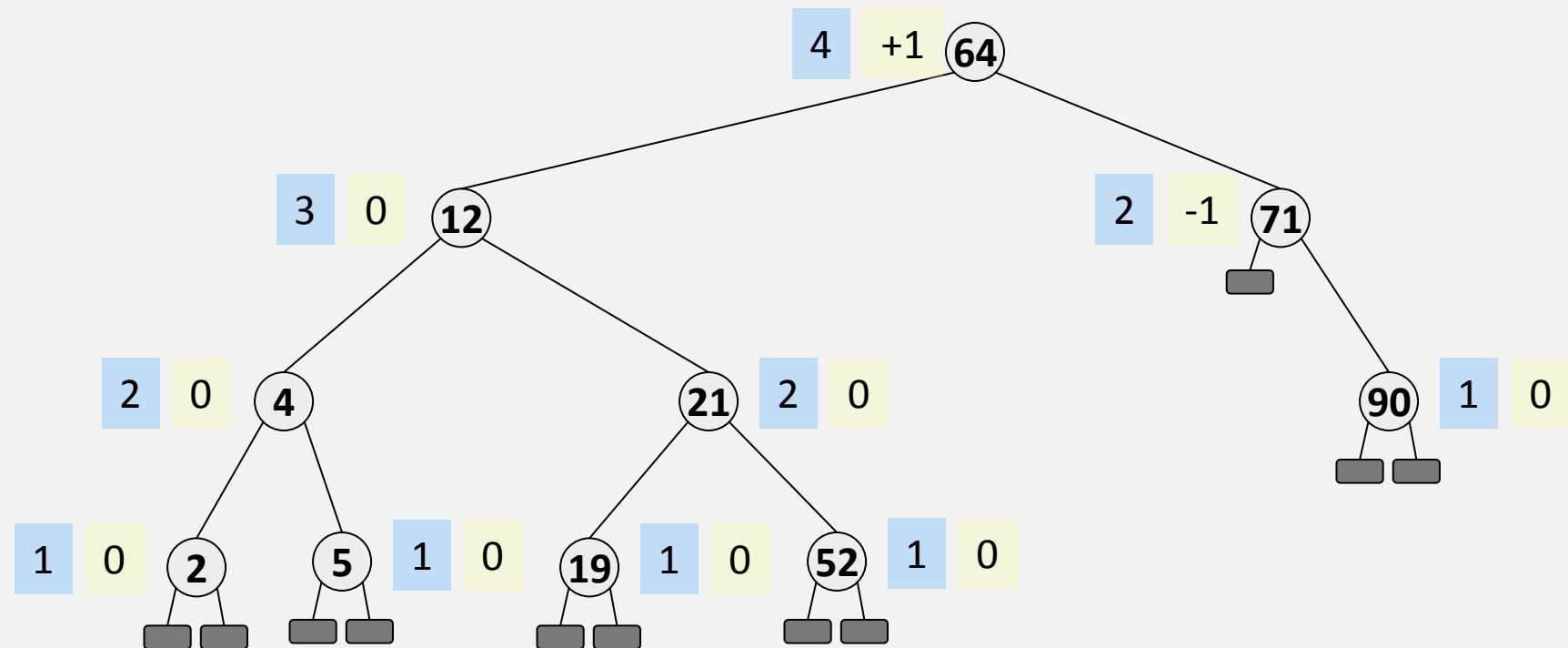
Διαγραφή 4



Αποκαταστάθηκε η συνθήκη ισορροπίας

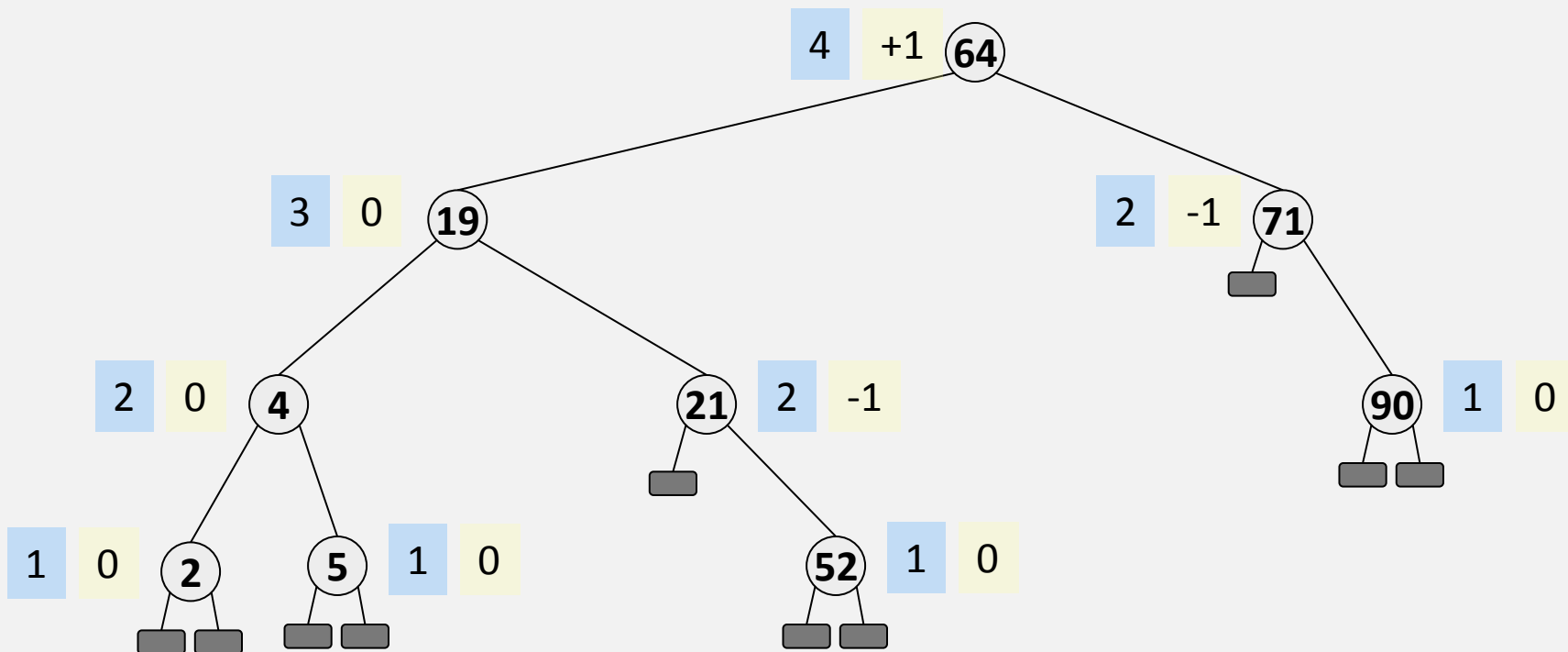
Δένδρα AVL

Διαγραφή κατά σειρά των κλειδιών 12 21 90 4 71 2 5



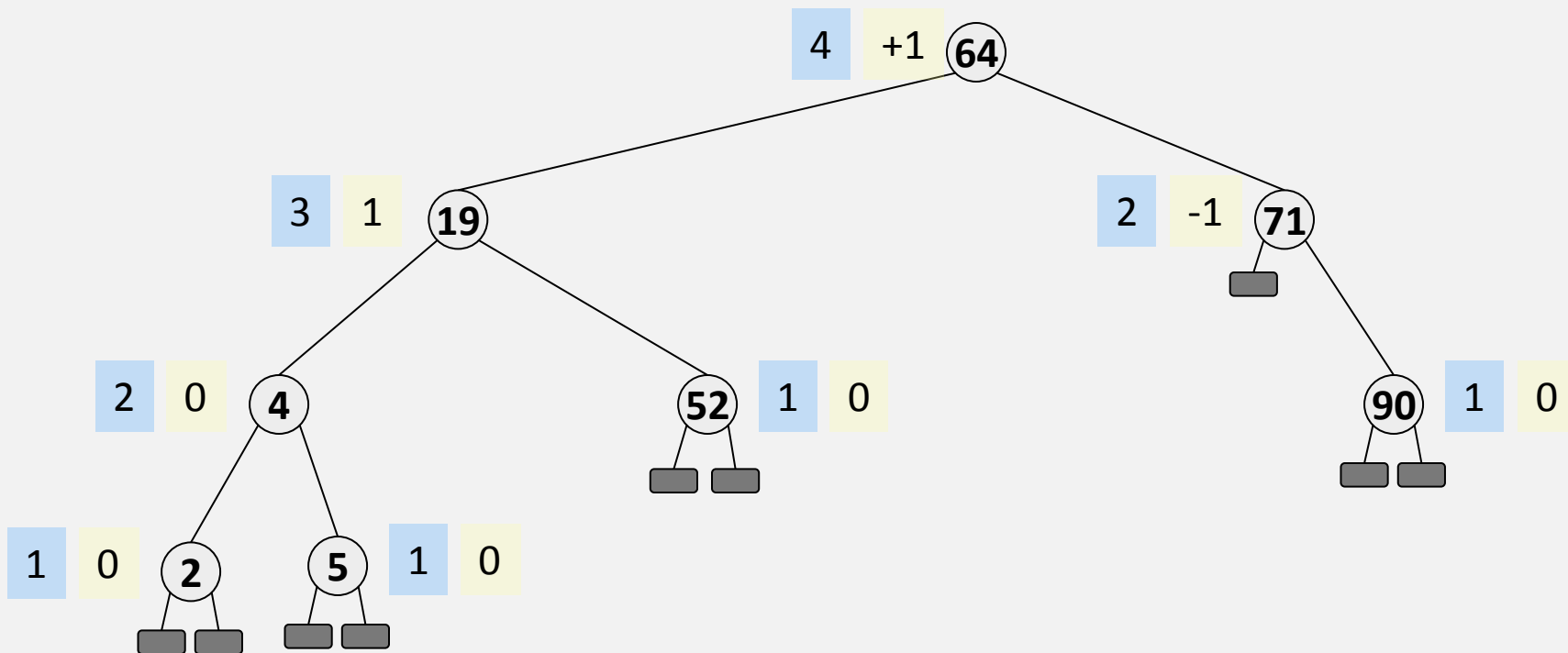
Δένδρα AVL

Διαγραφή κατά σειρά των κλειδιών 12 21 90 4 71 2 5



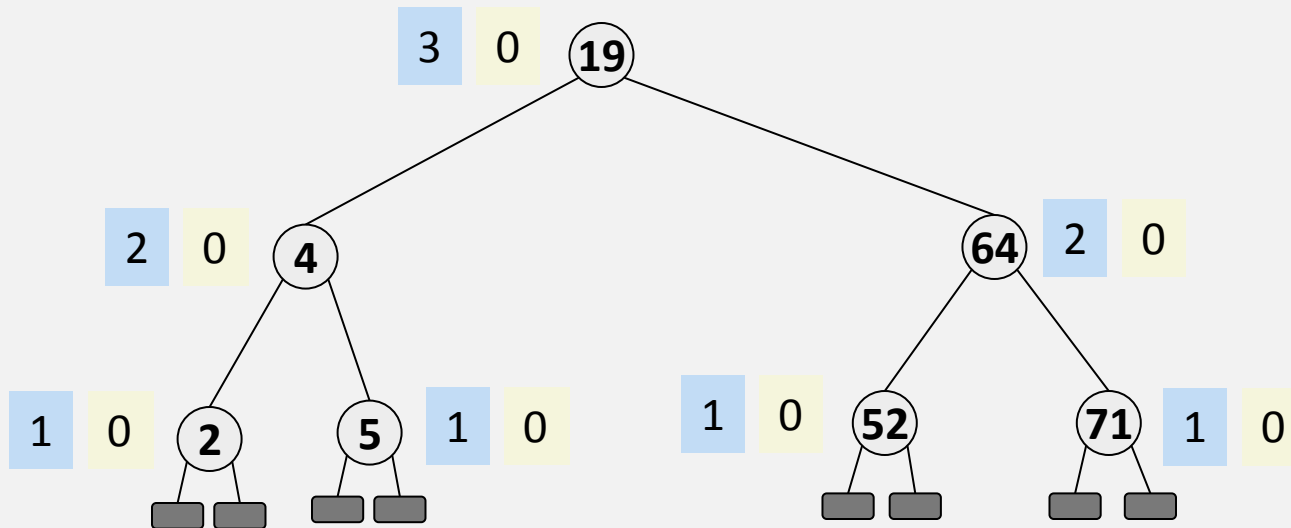
Δένδρα AVL

Διαγραφή κατά σειρά των κλειδιών 12 21 90 4 71 2 5



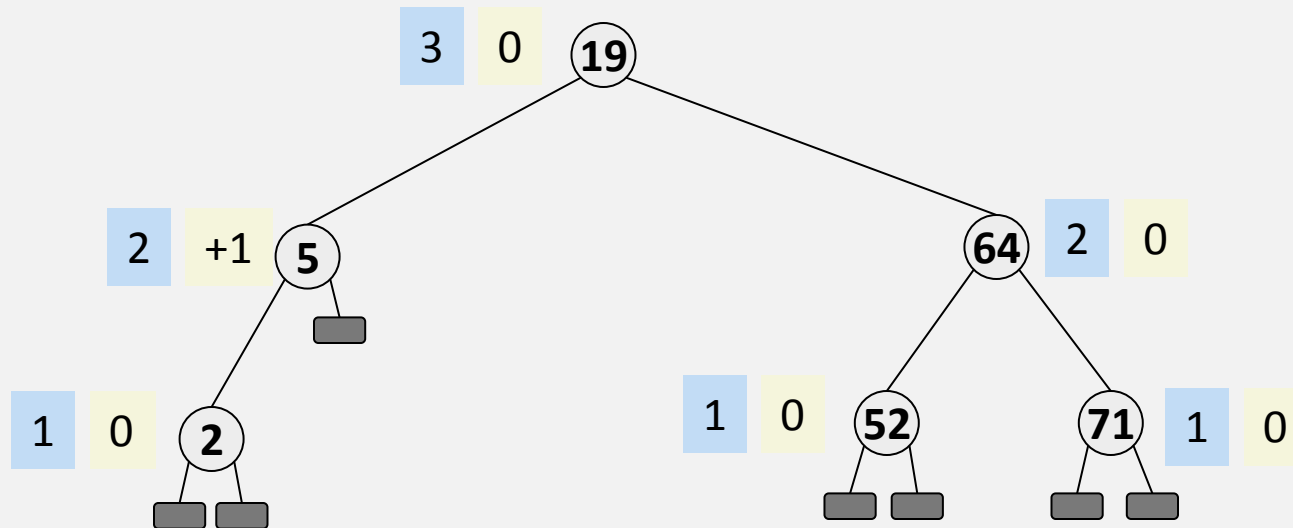
Δένδρα AVL

Διαγραφή κατά σειρά των κλειδιών 12 21 90 4 71 2 5



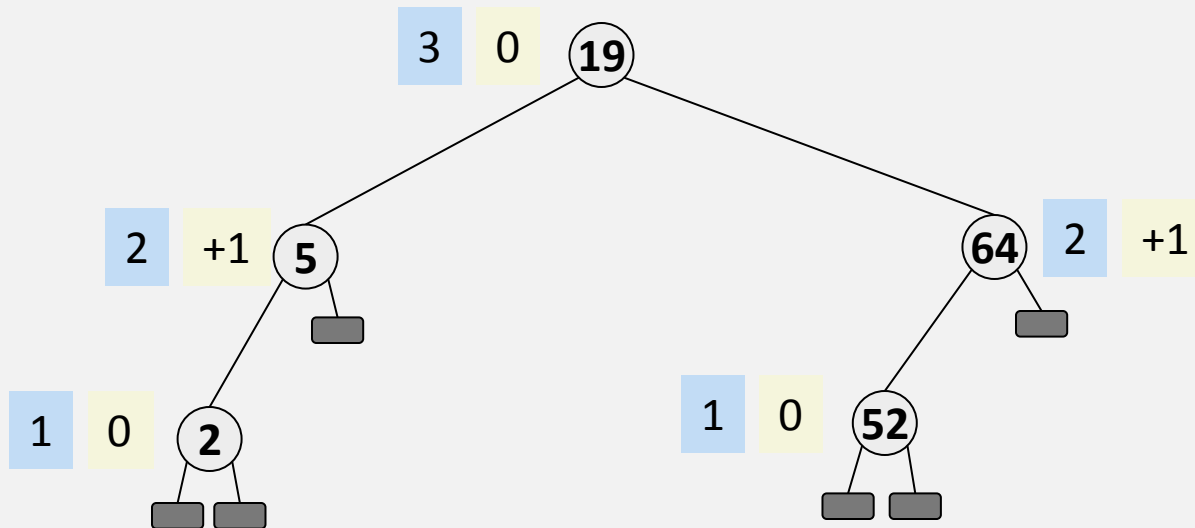
Δένδρα AVL

Διαγραφή κατά σειρά των κλειδιών 12 21 90 4 71 2 5



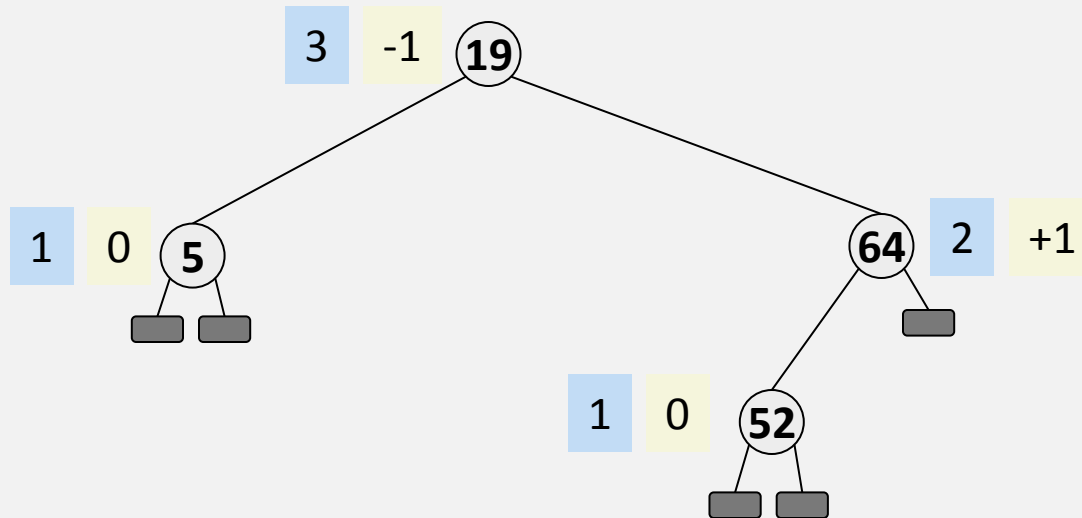
Δένδρα AVL

Διαγραφή κατά σειρά των κλειδιών 12 21 90 4 71 2 5



Δένδρα AVL

Διαγραφή κατά σειρά των κλειδιών 12 21 90 4 71 2 5



Δένδρα AVL

Διαγραφή κατά σειρά των κλειδιών 12 21 90 4 71 2 5

