

Ελαφρύτατες διαδρομές

Κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$

Συνάρτηση βάρους $w : E \rightarrow \mathbf{R}$

Ελαφρύτατη διαδρομή από το u στο v :

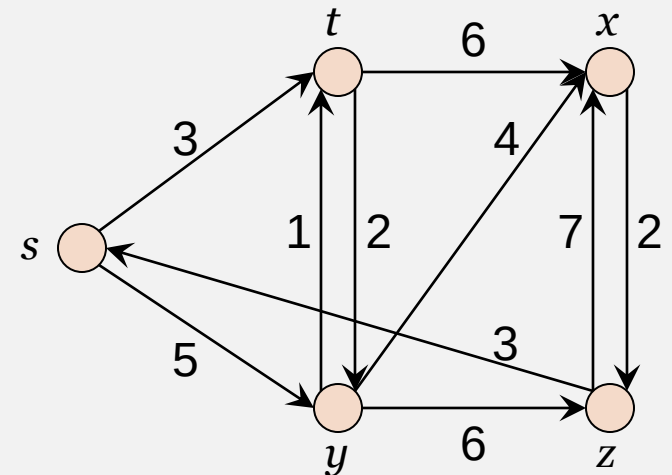
διαδρομή $p = (v_0, v_1, \dots, v_k)$

με $v_0 = u, v_k = v$ και ελάχιστο βάρος

$$w(p) = \sum_{i=1}^k w(v_{i-1}, v_i)$$

Βάρος ελαφρύτατης διαδρομής

$$\delta(u, v) = \begin{cases} \min\{w(p) : u \xrightarrow{p} v\} & \text{εάν υπάρχει διαδρομή από το } u \text{ στο } v \\ \infty & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$



Ελαφρύτατες διαδρομές

Κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$

Συνάρτηση βάρους $w : E \rightarrow \mathbf{R}$

Ελαφρύτατη διαδρομή από το u στο v :

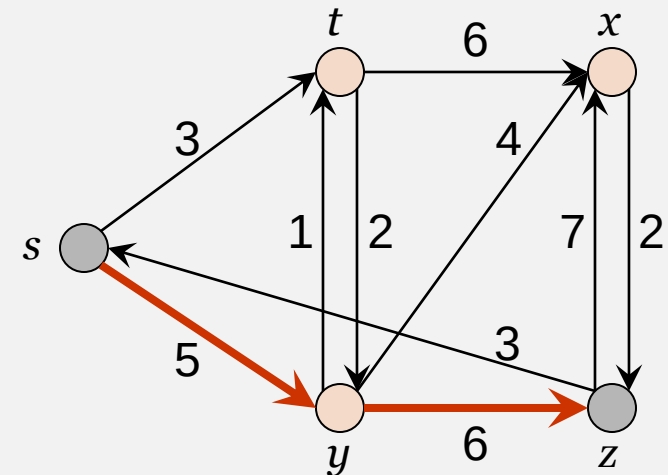
διαδρομή $p = (v_0, v_1, \dots, v_k)$

με $v_0 = u, v_k = v$ και ελάχιστο βάρος

$$w(p) = \sum_{i=1}^k w(v_{i-1}, v_i)$$

Βάρος ελαφρύτατης διαδρομής

$$\delta(u, v) = \begin{cases} \min\{w(p) : u \xrightarrow{p} v\} & \text{εάν υπάρχει διαδρομή από το } u \text{ στο } v \\ \infty & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$



Ελαφρύτατες διαδρομές

Κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$

Συνάρτηση βάρους $w : E \rightarrow \mathbf{R}$

Ελαφρύτατη διαδρομή από το u στο v :

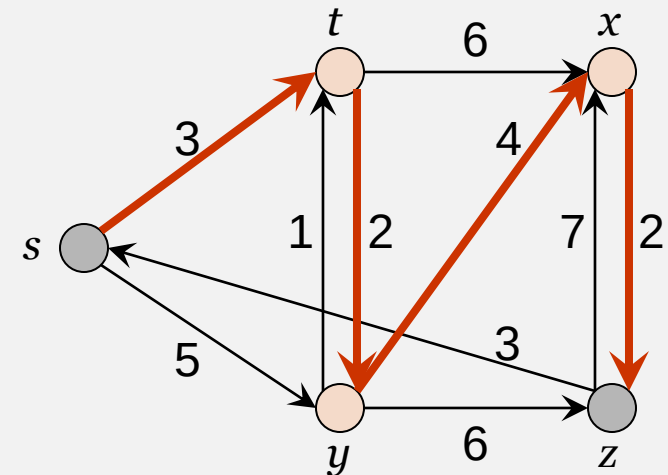
διαδρομή $p = (v_0, v_1, \dots, v_k)$

με $v_0 = u, v_k = v$ και ελάχιστο βάρος

$$w(p) = \sum_{i=1}^k w(v_{i-1}, v_i)$$

Βάρος ελαφρύτατης διαδρομής

$$\delta(u, v) = \begin{cases} \min\{w(p) : u \xrightarrow{p} v\} & \text{εάν υπάρχει διαδρομή από το } u \text{ στο } v \\ \infty & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$



Ελαφρύτατες διαδρομές

Κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$

Συνάρτηση βάρους $w : E \rightarrow \mathbf{R}$

Ελαφρύτατη διαδρομή από το u στο v :

διαδρομή $p = (v_0, v_1, \dots, v_k)$

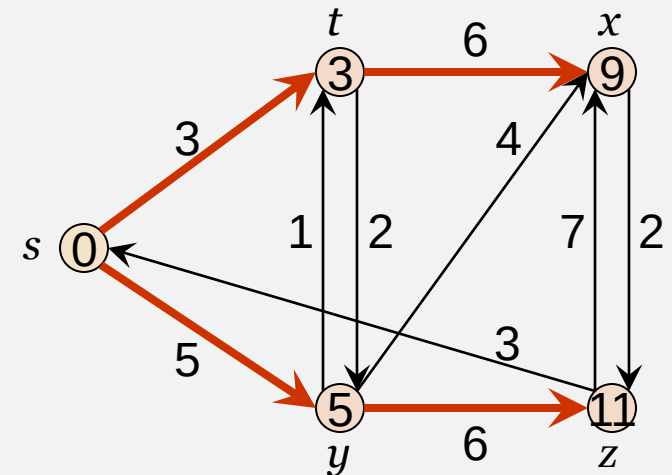
με $v_0 = u, v_k = v$ και ελάχιστο βάρος

$$w(p) = \sum_{i=1}^k w(v_{i-1}, v_i)$$

Βάρος ελαφρύτατης διαδρομής

$$\delta(u, v) = \begin{cases} \min\{w(p) : u \xrightarrow{p} v\} & \text{εάν υπάρχει διαδρομή από το } u \text{ στο } v \\ \infty & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Θέλουμε να βρούμε όλες τις ελαφρύτερες διαδρομές από το s προς κάθε άλλο κόμβο



Ελαφρύτατες διαδρομές

Κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$

Συνάρτηση βάρους $w : E \rightarrow \mathbf{R}$

Ελαφρύτατη διαδρομή από το u στο v :

διαδρομή $p = (v_0, v_1, \dots, v_k)$

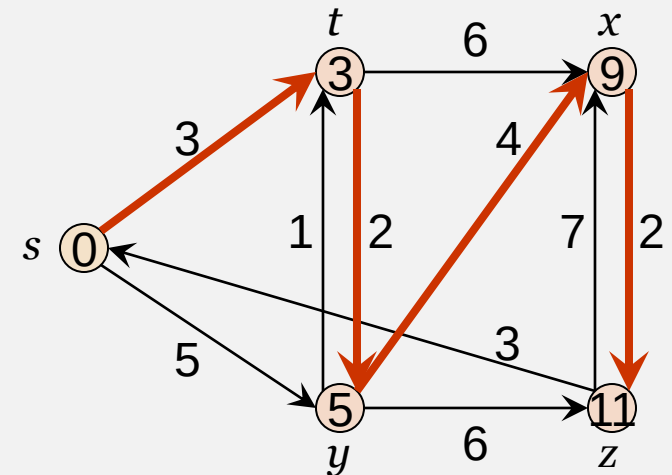
με $v_0 = u, v_k = v$ και ελάχιστο βάρος

$$w(p) = \sum_{i=1}^k w(v_{i-1}, v_k)$$

Βάρος ελαφρύτατης διαδρομής

$$\delta(u, v) = \begin{cases} \min\{w(p) : u \xrightarrow{p} v\} & \text{εάν υπάρχει διαδρομή από το } u \text{ στο } v \\ \infty & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

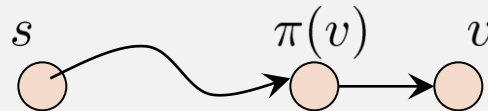
Θέλουμε να βρούμε όλες τις ελαφρύτερες διαδρομές από το s προς κάθε άλλο κόμβο



Ελαφρύτατες διαδρομές

Προκάτοχος

$\pi(v)$ ο κόμβος που προηγείται του v στην ελαφρύτατη διαδρομή από το s



Γράφημα προκατόχων G_π

Αποτελείται από τους κόμβους v για τους οποίους υπάρχει μονοπάτι από το s

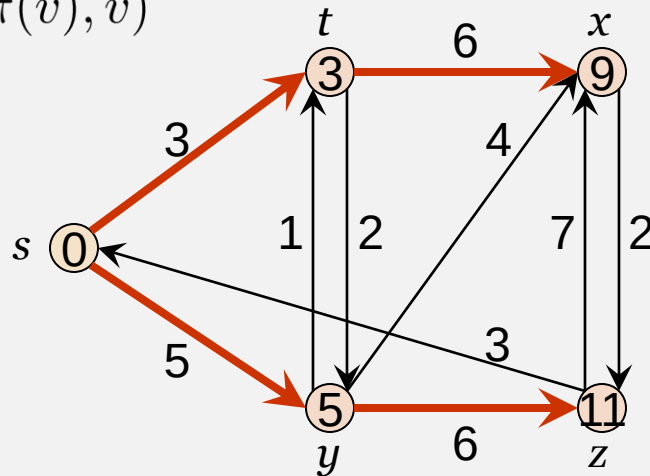
και από τις ακμές $(\pi(v), v)$

$$\pi(t) = s$$

$$\pi(y) = s$$

$$\pi(x) = t$$

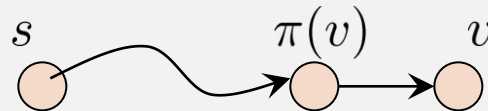
$$\pi(z) = y$$



Ελαφρύτατες διαδρομές

Προκάτοχος

$\pi(v)$ ο κόμβος που προηγείται του v στην ελαφρύτατη διαδρομή από το s



Γράφημα προκατόχων G_π

Αποτελείται από τους κόμβους v για τους οποίους υπάρχει μονοπάτι από το s

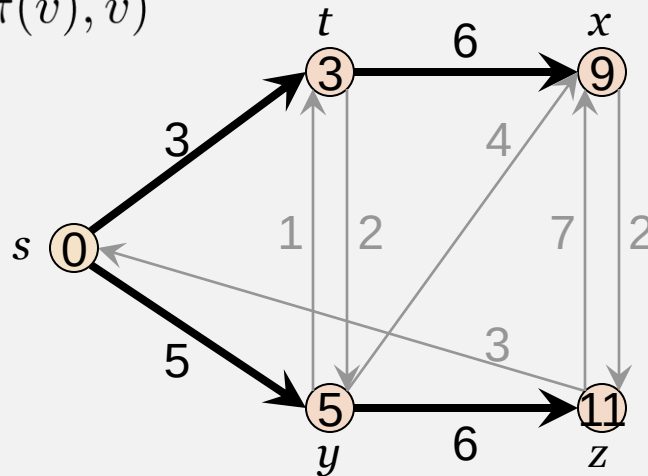
και από τις ακμές $(\pi(v), v)$

$$\pi(t) = s$$

$$\pi(y) = s$$

$$\pi(x) = t$$

$$\pi(z) = y$$



- Το γράφημα G_π είναι δένδρο με ρίζα το s
- Το μονοπάτι του G_π από το s στο v είναι ελαφρύτατη διαδρομή στο G από το s στο v

Ελαφρύτατες διαδρομές

Προκάτοχος

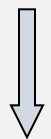
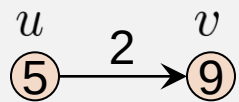
$\pi(v)$ ο κόμβος που προηγείται του v στην ελαφρύτατη διαδρομή από το s

Προεκτίμηση ελαφρύτατης διαδρομής

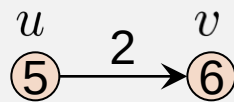
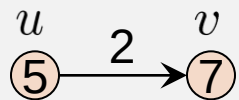
$d(v)$ άνω φράγμα του βάρους της ελαφρύτατης διαδρομής από το s στο v

Αρχικοποίηση : $\pi(v) \leftarrow \text{ΚΕΝΟ}, d(v) \leftarrow \infty, \forall v \in V - s$
 $d(s) \leftarrow 0$

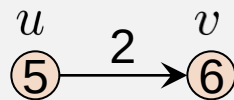
Χαλάρωση



ΧΑΛΑΡΩΣΗ(u, v, w)



ΧΑΛΑΡΩΣΗ(u, v, w)



ΧΑΛΑΡΩΣΗ(u, v, w)

αν $d(v) > d(u) + w(u, v)$

τότε $d(v) \leftarrow d(u) + w(u, v)$

$\pi(v) \leftarrow u$

Μετά την αρχικοποίηση πραγματοποιούμε μια αλληλουχία πράξεων χαλάρωσης.

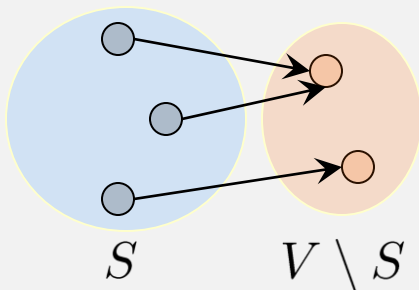
Ελαφρύτατες διαδρομές

Αλγόριθμος Dijkstra

Χρησιμοποιείται όταν τα βάρη είναι μη αρνητικά : $w(u, v) \geq 0, \forall (u, v) \in E$

Διατηρούμε σύνολο κόμβων S για τους οποίους έχει υπολογιστεί το τελικό βάρος της ελαφρύτατης διαδρομής από το s

Σε κάθε επανάληψη επιλέγουμε έναν κόμβο $u \in V \setminus S$ που να έχει την ελάχιστη προεκτίμηση ελαφρύτατης διαδρομής $d(u)$, προσθέτουμε το u στο S και χαλαρώνουμε τις ακμές που εκκινούν από αυτόν.



Χρησιμοποιούμε μια ουρά προτεραιότητας Q με κλειδιά τις τιμές $d(u), \forall u \in V \setminus S$

Ελαφρύτατες διαδρομές

Αλγόριθμος Dijkstra

αρχικοποίηση των $\pi(v)$ και $d(v)$, $\forall v \in V$

$S \leftarrow \emptyset$

$Q \leftarrow V$

ενόσω $Q \neq \emptyset$

$u \leftarrow \text{ΕΞΑΓΩΓΗΕΛΑΧΙΣΤΟΥ}(Q)$

$S \leftarrow S \cup \{u\}$

για κάθε ακμή $(u, v) \in E$

$\text{ΧΑΛΑΡΩΣΗ}(u, v, w)$

Ελαφρύτατες διαδρομές

Αλγόριθμος Dijkstra

αρχικοποίηση των $\pi(v)$ και $d(v)$, $\forall v \in V$

$S \leftarrow \emptyset$

$Q \leftarrow V$

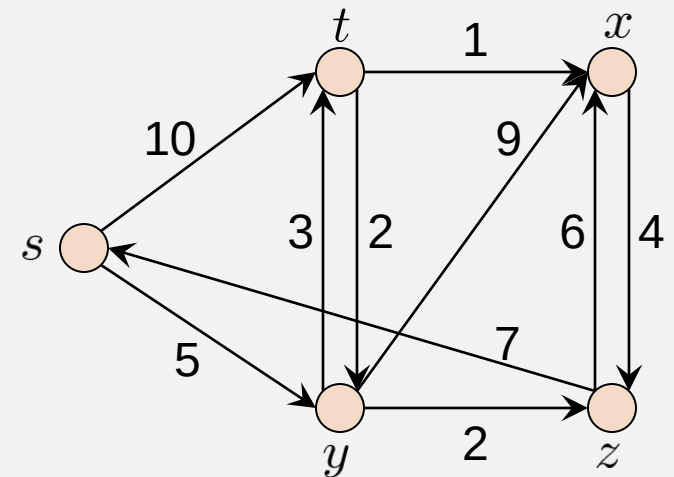
ενόσω $Q \neq \emptyset$

$u \leftarrow \text{ΕΞΑΓΩΓΗΕΛΑΧΙΣΤΟΥ}(Q)$

$S \leftarrow S \cup \{u\}$

για κάθε ακμή $(u, v) \in E$

$\text{ΧΑΛΑΡΩΣΗ}(u, v, w)$



Ελαφρύτατες διαδρομές

Αλγόριθμος Dijkstra

αρχικοποίηση των $\pi(v)$ και $d(v)$, $\forall v \in V$

$S \leftarrow \emptyset$

$Q \leftarrow V$

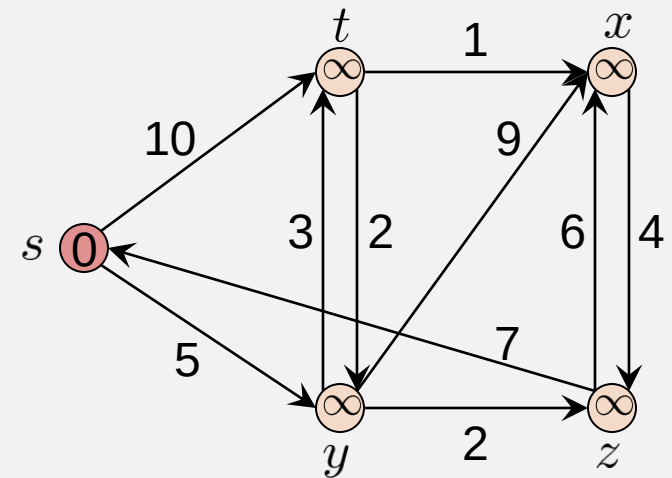
ενόσω $Q \neq \emptyset$

$u \leftarrow \text{ΕΞΑΓΩΓΗΕΛΑΧΙΣΤΟΥ}(Q)$

$S \leftarrow S \cup \{u\}$

για κάθε ακμή $(u, v) \in E$

$\text{ΧΑΛΑΡΩΣΗ}(u, v, w)$



Ελαφρύτατες διαδρομές

Αλγόριθμος Dijkstra

αρχικοποίηση των $\pi(v)$ και $d(v)$, $\forall v \in V$

$S \leftarrow \emptyset$

$Q \leftarrow V$

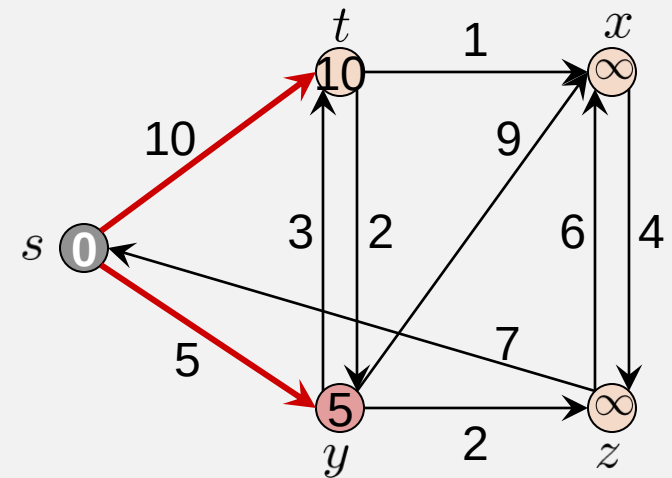
ενόσω $Q \neq \emptyset$

$u \leftarrow \text{ΕΞΑΓΩΓΗΕΛΑΧΙΣΤΟΥ}(Q)$

$S \leftarrow S \cup \{u\}$

για κάθε ακμή $(u, v) \in E$

$\text{ΧΑΛΑΡΩΣΗ}(u, v, w)$



Ελαφρύτατες διαδρομές

Αλγόριθμος Dijkstra

αρχικοποίηση των $\pi(v)$ και $d(v)$, $\forall v \in V$

$S \leftarrow \emptyset$

$Q \leftarrow V$

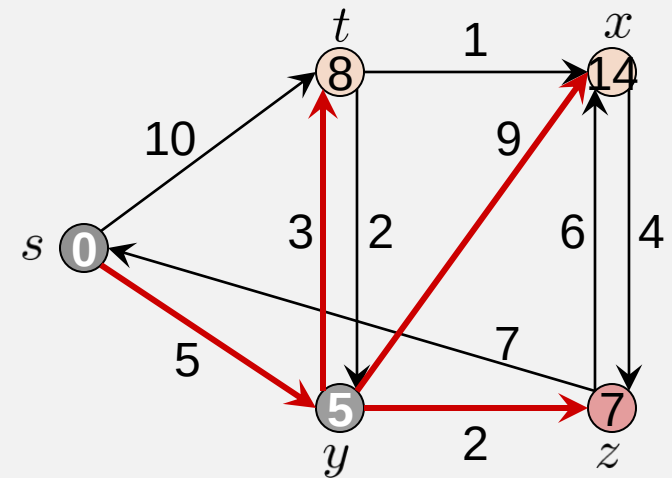
ενόσω $Q \neq \emptyset$

$u \leftarrow \text{ΕΞΑΓΩΓΗΕΛΑΧΙΣΤΟΥ}(Q)$

$S \leftarrow S \cup \{u\}$

για κάθε ακμή $(u, v) \in E$

$\text{ΧΑΛΑΡΩΣΗ}(u, v, w)$



Ελαφρύτατες διαδρομές

Αλγόριθμος Dijkstra

αρχικοποίηση των $\pi(v)$ και $d(v)$, $\forall v \in V$

$S \leftarrow \emptyset$

$Q \leftarrow V$

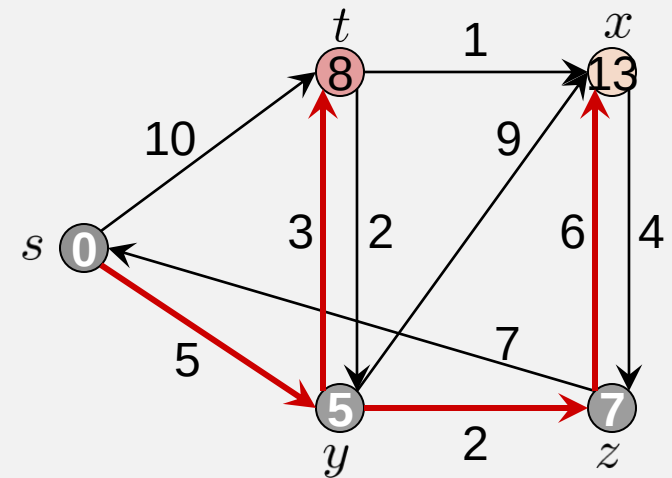
ενόσω $Q \neq \emptyset$

$u \leftarrow \text{ΕΞΑΓΩΓΗΕΛΑΧΙΣΤΟΥ}(Q)$

$S \leftarrow S \cup \{u\}$

για κάθε ακμή $(u, v) \in E$

$\text{ΧΑΛΑΡΩΣΗ}(u, v, w)$



Ελαφρύτατες διαδρομές

Αλγόριθμος Dijkstra

αρχικοποίηση των $\pi(v)$ και $d(v)$, $\forall v \in V$

$S \leftarrow \emptyset$

$Q \leftarrow V$

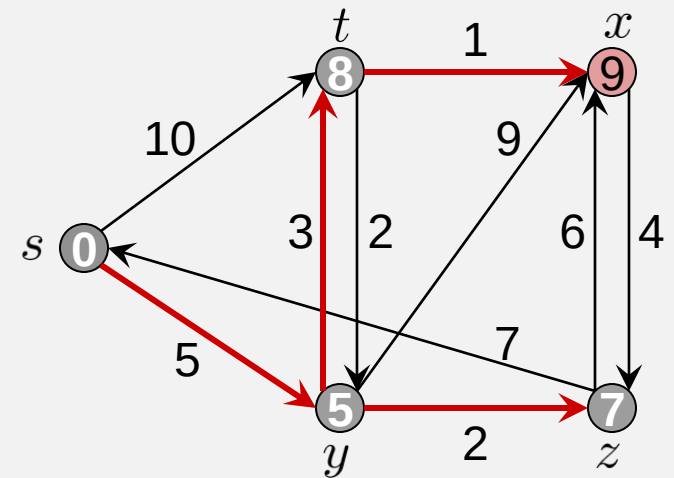
ενόσω $Q \neq \emptyset$

$u \leftarrow \text{ΕΞΑΓΩΓΗΕΛΑΧΙΣΤΟΥ}(Q)$

$S \leftarrow S \cup \{u\}$

για κάθε ακμή $(u, v) \in E$

$\text{ΧΑΛΑΡΩΣΗ}(u, v, w)$



Ελαφρύτατες διαδρομές

Αλγόριθμος Dijkstra

αρχικοποίηση των $\pi(v)$ και $d(v)$, $\forall v \in V$

$S \leftarrow \emptyset$

$Q \leftarrow V$

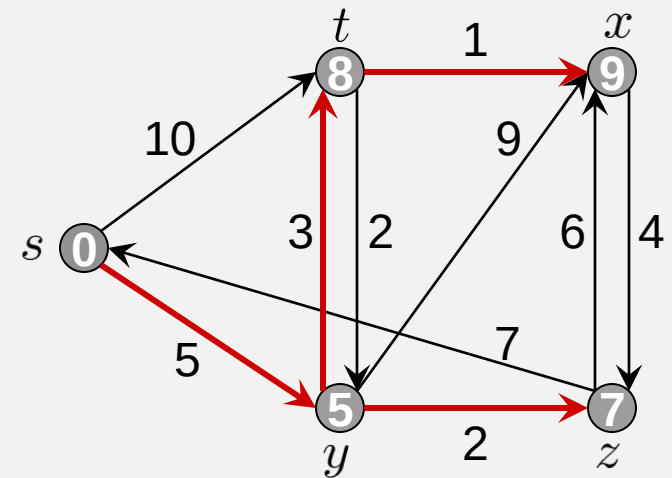
ενόσω $Q \neq \emptyset$

$u \leftarrow \text{ΕΞΑΓΩΓΗΕΛΑΧΙΣΤΟΥ}(Q)$

$S \leftarrow S \cup \{u\}$

για κάθε ακμή $(u, v) \in E$

$\text{ΧΑΛΑΡΩΣΗ}(u, v, w)$



Ελαφρύτατες διαδρομές

Αλγόριθμος Dijkstra

αρχικοποίηση των $\pi(v)$ και $d(v)$, $\forall v \in V$

$S \leftarrow \emptyset$

$Q \leftarrow V$

ενόσω $Q \neq \emptyset \quad \longleftarrow \quad |V|$ επαναλήψεις

$u \leftarrow \text{ΕΞΑΓΩΓΗΕΛΑΧΙΣΤΟΥ}(Q)$

$S \leftarrow S \cup \{u\}$

για κάθε ακμή $(u, v) \in E$

$\text{ΧΑΛΑΡΩΣΗ}(u, v, w) \quad \longleftarrow \quad |E|$ πράξεις

Ελαφρύτατες διαδρομές

Αλγόριθμος Dijkstra

αρχικοποίηση των $\pi(v)$ και $d(v)$, $\forall v \in V$

$S \leftarrow \emptyset$

$Q \leftarrow V$

ενόσω $Q \neq \emptyset \iff |V|$ επαναλήψεις

$u \leftarrow \text{ΕΞΑΓΩΓΗΕΛΑΧΙΣΤΟΥ}(Q)$

$S \leftarrow S \cup \{u\}$

για κάθε ακμή $(u, v) \in E$

$\text{ΧΑΛΑΡΩΣΗ}(u, v, w) \iff |E|$ πράξεις

$\text{ΧΑΛΑΡΩΣΗ}(u, v, w)$

αν $d(v) > d(u) + w(u, v)$

τότε $d(v) \leftarrow d(u) + w(u, v) \iff \text{ΜΕΙΩΣΗΚΛΕΙΔΙΟΥ}$

$\pi(v) \leftarrow u$

δομή Q

χρόνος εκτέλεσης

πίνακας

$O(|V|^2 + |E|)$

δυναμικός σωρός

$O(|E| \log |V|)$

σωρός Fibonacci

$O(|E| + |V| \log |V|)$