ΕΡΓΑΣΙΑ # 1

1) Αποδείξτε ότι ο πίνακας $\boldsymbol{B}=\begin{Bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 2 \end{Bmatrix}$ είναι θετικά ορισμένος.

   α) Χρησιμοποιώντας τον ορισμό
   β) Υπολογίζοντας τις ιδιοτιμές του
   γ) Αναλύοντάς τον σε παράγοντες Cholesky

2) Έστω συμμετρικός πραγματικός n x n πίνακας A . Δείξτε ότι:
   α) Έχει πραγματικές ιδιοτιμές
   β) Ότι $\frac{x^T A x}{x^T x} \geq \lambda$, όπου $x \neq 0$ και λ η ελαχίστη ιδιοτιμή του A.

3) Να αποδειχθεί η σχέση Sherman-Morrison-Woodbury:

$$[A+uv^T]^{-1}=A^{-1}-\frac{A^{-1} u v^T A^{-1}}{1+v^T A^{-1} u}$$

   όπου $A \in R^{n\,x\,n}$, $u, v \in R^n$ και $1+v^T A^{-1} u \neq 0$
   α) Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με $[A+u\,v^T]$ και εκτελώντας πράξεις
   β) Προσποιούμενοι ότι το δεξί μέλος δεν είναι γνωστό, πως καταλήγουμε σε αυτό;
   (Υπόδειξη: Ισχύει ότι: $[A+\lambda uv^T]^{-1}=[I+\lambda A^{-1} uv^T]^{-1} A^{-1}$. Αναπτύξτε το δεξί μέλος σε σειρά Taylor, και στο τέλος θέστε $\lambda=1$.)

4. Δίδεται η συνάρτηση: $q(x)=\frac{1}{2} x^T Q\, x$ με $Q \in R^{n\,x\,n}$ συμμετρικό και θετικά ορισμένο πίνακα και $x \in R^n$.
   α) Να βρεθεί η θέση του ελαχίστου x^*.
   β) Διερευνήστε εάν το παραπάνω ελάχιστο είναι τοπικό ή καθολικό.

5. Για τον πίνακα Q της προηγούμενης άσκησης θεωρείστε την συνάρτηση:

$$q(x)=\frac{1}{2} x^T Q\, x-b^T x .$$

   α) Να βρεθεί η θέση του ελαχίστου x^*.
   β) Διερευνήστε εάν το παραπάνω ελάχιστο είναι τοπικό ή καθολικό.