4-44: Θεωρία Υπολογισμού

Λύσεις της 4ης Ομάδας Προτεινομένων Ασκήσεων

Άσκηση 1

Έστω μια ΓΧΣ $G = (V, T, R, S)$ όπου καθένας από τους κανόνες παραγωγής έχει μία από τις εξής τρεις μορφές $A \to wB$ ή $A \to Bw$ ή $A \to w$, όπου A, B είναι μεταβλητές και $w \in T^*$. Είναι η γλώσσα $L(G)$ απαραίτητα κανονική ή όχι; Αποδείξτε την απάντησή σας ή δώστε ένα αντιπαράδειγμα.

Λύση

(Σημειώνεται ότι γραμματικές χωρίς συμφραζόμενα με κανόνες της μορφής $A \to wB$ ή $A \to w$ αναφέρονται ως *δεξιά γραμμικές* και παράγουν κανονικές γλώσσες. Αντίστοιχα, γραμματικές με κανόνες της μορφής $A \to Bw$ ή $A \to w$ αναφέρονται ως *αριστερά γραμμικές* και επίσης παράγουν κανονικές γλώσσες.)

Η μορφή των κανόνων της γραμματικής G αποτελεί συνδυασμό της μορφής των κανόνων των δεξιά γραμμικών και των αριστερά γραμμικών γραμματικών χωρίς συμφραζόμενα. Παρά το γεγονός ότι οι δεξιά και οι αριστερά γραμμικές γραμματικές παράγουν κανονικές γλώσσες, αποδεικνύεται ότι η γλώσσα $L(G)$ που παράγεται από την G δεν είναι απαραίτητα κανονική. Θεωρήστε ως αντιπαράδειγμα τη γραμματική

$G' = (V', T', R', S)$
όπου σύνολο μεταβλητών $= \{S, X\}$
σύνολο τερματικών συμβόλων $T' = \{a, b\}$
$R' = \{\, S \to aX, \;\; X \to Sb, \;\; S \to e \,\}$.

Η γραμματική αυτή παράγει τη γλώσσα $\{\, a^i b^i \mid i \geq 0 \,\}$, η οποία, όπως έχουμε δει, δεν είναι κανονική. (Παρατηρήστε ότι οι κανόνες $S \to aX$, $X \to Sb$ είναι ισοδύναμοι με τον κανόνα $S \to aSb$.)

Άσκηση 2

Αποδείξτε ότι οι παρακάτω γλώσσες είναι χωρίς συμφραζόμενα:

(α) $\{\, a^m b^n \mid m \geq n \geq 0 \,\}$

(β) $\{\, uawb \mid u, w \in \{a, b\}^*, \; |u| = |w| \geq 0 \,\}$

(γ) $\{\, a^m b^n \mid 0 \leq n \leq m \leq 2n \,\}$

Λύση

Για να δείξουμε ότι καθεμία από τις δοθείσες γλώσσες είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα, μπορούμε είτε να περιγράψουμε γραμματικές χωρίς συμφραζόμενα που τις παράγουν, είτε αυτόματα στοίβας που τις αποδέχονται, είτε να αξιοποιήσουμε τις ιδότητες κλειστότητας των γλωσσών χωρίς συμφραζόμενα.

(α) *[Η άσκηση 3.1.9(α) της μετάφρασης του βιβλίου των Lewis και Παπαδημητρίου]* Θα περιγράψουμε μια γραμματική χωρίς συμφραζόμενα για τη συγκεκριμένη γλώσσα. Η γραμματική μας θα πρέπει να εξασφαλίζει ότι οι παραγόμενες συμβολοσειρές είναι της μορφής $a^m b^n$ και ότι το πλήθος m των a είναι τουλάχιστον ίσο με το πλήθος n των b. Αρκεί λοιπόν να παράγουμε τις συμβολοσειρές αντιστοιχίζοντας κάθε b σε ένα διαφορετικό a (και πιο συγκεκριμένα, το δεξιότερο b στο αριστερότερο a, το 2ο b από δεξιά στο 2ο a από αριστερά, κ.ο.κ., και το n-οστό b από δεξιά στο n-οστό a από αριστερά), και να δώσουμε τη δυνατότητα να απομένουν οσαδήποτε a στο μέσον. Η ακόλουθη γραμματική επιτυγχάνει το επιθυμητό:

$G = (V, T, R, S)$
όπου σύνολο μεταβλητών $= \{S, A\}$
σύνολο τερματικών συμβόλων $T = \{a, b\}$
$R = \{\, S \to aSb, \quad S \to A, \quad A \to aA, \quad A \to e \,\}.$

Ο κανόνας παραγωγής $S \to aSb$ εξασφαλίζει το ταίριασμα των b με τα a όπως περιγράφηκε παραπάνω, ενώ ο $S \to A$ παράγει τα a που ενδεχομένως απομένουν στο μέσον της συμβολοσειράς. Παρατηρήστε ότι η μεταβλητή A παράγει όλες τις συμβολοσειρές από οσαδήποτε a.

Ένας εναλλακτικός τρόπος ταιριάσματος των b με τα a οδηγεί σε μία άλλη γραμματική χωρίς συμφραζόμενα για τη γλώσσα αυτού του υποερωτήματος. Συγκεκριμένα, ταιριάζουμε το $(m-n+1)$-οστό a με το n-οστό b, το $(m-n+2)$-οστό a με το $(n-1)$-οστό b, κ.ο.κ., το m-οστό a με το 1ο b, ενώ έχουν απομείνει στην αρχή $m - n \geq 0$ a. Τα παραπάνω οδηγούν στην εξής γραμματική:

$G' = (V', T, R', S)$
όπου σύνολο μεταβλητών $= \{S, A, X\}$
σύνολο τερματικών συμβόλων $T = \{a, b\}$
$R' = \{\, S \to AX, \quad X \to aXb, \quad X \to e, \quad A \to aA, \quad A \to e \,\}.$

Τέλος, ένας εναλλακτικός τρόπος απόδειξης ότι η γλώσσα $L_{(\alpha)}$ του συγκεκριμένου υποερωτήματος είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα βασίζεται στην ιδιότητα της κλειστότητας των γλωσσών χωρίς συμφραζόμενα ως προς την παράθεση. Πιο αναλυτικά, $L_{(\alpha)} = \mathcal{L}(a^*)\,\{\, a^i\, b^i \mid i \geq 0 \,\}$. Η γλώσσα $\mathcal{L}(a^*)$ είναι κανονική, άρα είναι και γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα, ενώ επίσης γνωρίζουμε ότι η $\{\, a^i\, b^i \mid i \geq 0 \,\}$ είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα. Καθώς η $L_{(\alpha)}$ είναι η παράθεση αυτών των δύο γλωσσών και οι γλώσσες χωρίς συμφραζόμενα είναι κλειστές ως προς την παράθεση, προκύπτει ότι η $L_{(\alpha)}$ είναι επίσης γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα.

(β) *[Η άσκηση 3.1.9(δ) της μετάφρασης του βιβλίου των Lewis και Παπαδημητρίου]* Στην περίπτωση αυτή θα πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι το μήκος της υποσυμβολοσειράς u είναι ίσο με το μήκος της υποσυμβολοσειράς w. Αυτό το επιτυγχάνουμε ταιριάζοντας το 1ο σύμβολο της u (είτε είναι a είτε b) με το τελευταίο της w (πάλι είτε είναι a είτε b), το 2ο της u με το προτελευταίο της w, κ.ο.κ., και το τελευταίο της u με το 1ο της w. Η αντίστοιχη γραμματική χωρίς συμφραζόμενα είναι:

$G = (V, T, R, S)$
όπου σύνολο μεταβλητών $= \{S, X\}$
σύνολο τερματικών συμβόλων $T = \{a, b\}$
$R = \{\, S \to Xb, \; X \to aXa, \; X \to aXb, \; X \to bXa, \; X \to bXb, \; X \to a \,\}.$

ή ισοδύναμα αλλά πιο συνοπτικά:

$G' = (V', T, R', S)$
όπου σύνολο μεταβλητών $= \{S, X, L\}$
σύνολο τερματικών συμβόλων $T = \{a, b\}$
$R' = \{\, S \to Xb, \quad X \to LXL, \quad X \to a, \quad L \to a, \quad L \to b\,\}.$

(γ) Θα πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι οι παραγόμενες συμβολοσειρές είναι της μορφής $a^m\, b^n$ και ότι $n \leq m \leq 2n$. Το τελευταίο εξασφαλίζεται φροντίζοντας να αντιστοιχίσουμε κάθε b είτε με 1 a είτε με 2 a. Η αντίστοιχη γραμματική χωρίς συμφραζόμενα είναι:

$G = (V, T, R, S)$
όπου σύνολο μεταβλητών $= \{S\}$
σύνολο τερματικών συμβόλων $T = \{a, b\}$
$R = \{\, S \to aSb, \quad S \to aaSb, \quad S \to e\,\}.$

Άσκηση 3

Έστω $L = \Big\{ ww \mid w \in \{a, b\}^* \Big\}$.
Βρείτε μια γραμματική χωρίς συμφραζόμενα για το συμπλήρωμα $\overline{L}$ της γλώσσας L.

Λύση

Είναι σημαντικό να παρατηρήσει κανείς ότι το συμπλήρωμα της γλώσσας L ισούται με την ένωση των εξής δύο συνόλων συμβολοσειρών:

1. *συμβολοσειρές από a και b περιττού μήκους.*
   Εάν S_1 είναι η μεταβλητή που παράγει αυτές τις συμβολοσειρές, τότε οι εξής κανόνες παραγωγής αρκούν για την παραγωγή όλων των συμβολοσειρών περιττού μήκους:
   $S_1 \to LLS_1$
   $S_1 \to L$
   $L \to a$
   $L \to b$
   Σημειώνεται ότι το συγκεκριμένο σύνολο συμβολοσειρών είναι μια κανονική γλώσσα και άρα θα μπορούσαμε να είχαμε βρει μια κανονική γραμματική χωρίς συμφραζόμενα (δεξιά ή αριστερά γραμμική, βλ. Άσκηση 3.1.10) που να παράγει αυτές τις συμβολοσειρές.

2. *συμβολοσειρές από a και b αρτίου μήκους που δεν είναι της μορφής ww.*
   Έστω z μια τέτοια συμβολοσειρά και έστω $|z| = 2k$ $(k > 0)$. Το γεγονός ότι η z δεν είναι της μορφής ww συνεπάγεται ότι θα υπάρχει κάποιο i, $1 \leq i \leq k$, τέτοιο ώστε το i-οστό και το $(k+i)$-οστό σύμβολο της z να είναι διαφορετικά, δηλαδή, το ένα να είναι a και το άλλο να είναι b.

   Θα πρέπει φυσικά να διακρίνουμε δύο περιπτώσεις ανάλογα με το εάν το i-οστό σύμβολο είναι a και το $(k+i)$-οστό είναι b ή εάν το i-οστό σύμβολο είναι b και το $(k+i)$-οστό είναι a, αλλά το πιο σημαντικό είναι να εξασφαλίσουμε ότι πράγματι θα "συγκρίνουμε" το i-οστό με το $(k+i)$-οστό σύμβολο της z και όχι κάποιο άλλο ζεύγος συμβόλων. Για να το πετύχουμε αυτό, παρατηρούμε ότι πριν το i-οστό σύμβολο της z υπάρχουν $i-1$ σύμβολα, μεταξύ του i-οστού και του $(k+i)$-οστού υπάρχουν $k-i+i-1=k-1$ σύμβολα, ενώ μετά το $(k+i)$-οστό υπάρχουν $k-i$ σύμβολα, δηλαδή,

$$z \;=\; \underbrace{\sigma_1\cdots\sigma_{i-1}}_{i-1}\,\sigma_i\,\underbrace{\sigma_{i+1}\cdots\sigma_k\,\sigma'_1\cdots\sigma'_{i-1}}_{k-1}\,\sigma'_i\,\underbrace{\sigma'_{i+1}\cdots\sigma'_k}_{k-i}$$

και αυτό ισχύει μόνον για ζεύγη συμβόλων στις θέσεις i και $k+i$, για κάποιο i, $1 \le i \le k$.

Έτσι, για να εξασφαλίσουμε ότι το συνολικό πλήθος συμβόλων αριστερότερα του i-οστού και δεξιότερα του $(k+i)$-οστού είναι ίσο με το πλήθος συμβόλων μεταξύ του i-οστού και του $(k+i)$-οστού, αρκεί να θεωρήσουμε την εξής διαμέριση των $k-i$ συμβόλων μεταξύ του i-οστού και του $(k+i)$-οστού συμβόλου της z

$$z \;=\; \underbrace{\sigma_1\cdots\sigma_{i-1}}_{i-1}\,\sigma_i\,\underbrace{\sigma_{i+1}\cdots}_{i-1}\;\underbrace{\cdots\sigma'_{i-1}}_{k-i}\,\sigma'_i\,\underbrace{\sigma'_{i+1}\cdots\sigma'_k}_{k-i}$$

και να αντιστοιχίσουμε ένα προς ένα (i) τα $i-1$ σύμβολα αριστερά του i-οστού συμβόλου με τα $i-1$ σύμβολα στις θέσεις $i+1, i+2, \ldots, 2i-1$ και (ii) τα $k-i$ σύμβολα δεξιότερα του $(k+i)$-οστού συμβόλου με τα $k-i$ σύμβολα στις θέσεις $2i, 2i+1, \ldots, k+i-1$. Καθώς θα πρέπει να καλύψουμε όλες τις πιθανές περιπτώσεις, δηλαδή, για οποιαδήποτε τιμή του $i = 1, 2, \ldots, k$, για οποιαδήποτε τιμή του k, αλλά και περιπτώσεις συμβολοσειρών που διαφέρουν σε οσαδήποτε ζεύγη αντιστοίχων ψηφίων, καταλήγουμε στους εξής κανόνες παραγωγής για τις συμβολοσειρές αρτίου μήκους:

$$\begin{aligned}
&S_2 \to AB\\
&S_2 \to BA\\
&A \to LAL\\
&A \to a\\
&B \to LBL\\
&B \to b\\
&L \to a\\
&L \to b
\end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι η μεταβλητή A παράγει όλες τις συμβολοσειρές από το αλφάβητο $\{a, b\}$ που είναι περιττού μήκους και έχουν μεσαίο σύμβολο a ενώ η B παράγει όλες τις συμβολοσειρές από το αλφάβητο $\{a, b\}$ που είναι επίσης περιττού μήκους αλλά έχουν μεσαίο σύμβολο b.

Συνολικά, η τελική γραμματική χωρίς συμφραζόμενα για το συμπλήρωμα $\overline{L}$ της L είναι:

$G = (V, T, R, S)$

όπου σύνολο μεταβλητών $= \{S, S_1, S_2, A, B, L\}$

σύνολο τερματικών συμβόλων $T = \{a, b\}$

$$\begin{aligned}
R = \{\, & S \to S_1, \quad S \to S_2,\\
& S_1 \to LLS_1, \quad S_1 \to L,\\
& S_2 \to AB, \quad S_2 \to BA,\\
& A \to LAL, \quad A \to a, \quad B \to LBL, \quad B \to b, \quad L \to a, \quad L \to b\,\}.
\end{aligned}$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι λόγω του ορισμού των συμβολοσειρών που παράγονται από τις μεταβλητές A και B και δεδομένου ότι το μεσαίο σύμβολο μιας συμβολοσειράς περιττού μήκους από a και b είναι είτε a είτε b, όλες οι συμβολοσειρές περιττού μήκους από a και b (περίπτωση 1) μπορούν να παραχθούν από τις μεταβλητές A και B. Με βάση αυτήν την παρατήρηση, μια εναλλακτική γραμματική για τη γλώσσα $\overline{L}$ είναι:

$G = (V, T, R, S)$
όπου σύνολο μεταβλητών $= \{S, S_2, A, B, L\}$
σύνολο τερματικών συμβόλων $T = \{a, b\}$
$R = \{\, S \to A,\ \ S \to B,\ \ S \to S_2,\ \ S_2 \to AB,\ \ S_2 \to BA,$
$A \to LAL,\ \ A \to a,\ \ B \to LBL,\ \ B \to b,\ \ L \to a,\ \ L \to b \,\}.$

Άσκηση 4

Θεωρήστε τη ΓΧΣ $G = (V, T, R, S)$ με σύνολο μεταβλητών $\{S, A\}$, σύνολο τερματικών συμβόλων $T = \{a, b\}$ και $R = \{\, S \to AA,\ A \to AAA,\ A \to bA,\ A \to Ab,\ A \to a \,\}$.

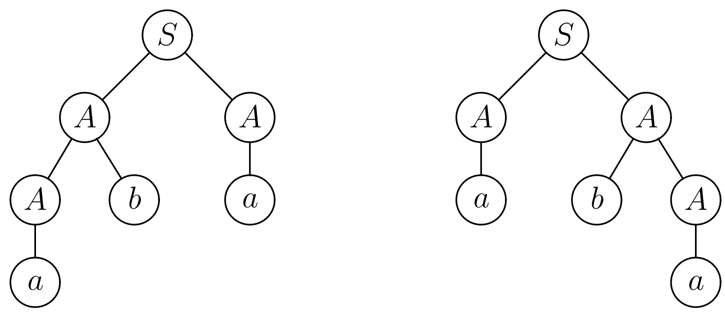
(α) Δείξτε ότι η γραμματική είναι διφορούμενη (πολύτροπη) δίνοντας δύο διαφορετικά συντακτικά δέντρα για τη συμβολοσειρά aba.

(β) Δώστε τις αριστερότερες παραγωγές για τα συντακτικά δέντρα του (α).

(γ) Δείξτε ότι η $L(G)$ δεν είναι εγγενώς διφορούμενη (εγγενώς πολυτροπική).

Λύση

(α) Τα δύο συντακτικά δέντρα για τη συμβολοσειρά aba δίδονται στο σχήμα.



(β) Οι αντίστοιχες δύο αριστερότερες παραγωγές έχουν ως εξής:

$$S \implies AA \implies AbA \implies abA \implies aba$$
$$S \implies AA \implies aA \implies abA \implies aba$$

(γ) Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει μια μη διφορούμενη (μονότροπη) γραμματική χωρίς συμφραζόμενα για τη γλώσσα $L(G)$. Χρησιμοποιώντας επαγωγή στο μήκος της παραγωγής μιας συμβολοσειράς w από μεταβλητές και τερματικά σύμβολα, μπορούμε να δείξουμε ότι το συνολικό πλήθος των A και a στην w είναι άρτιος αριθμός τουλάχιστον ίσος με 2. Συνεπώς, η $L(G)$ είναι η γλώσσα των συμβολοσειρών από a και b στις οποίες το πλήθος των a είναι άρτιος αριθμός τουλάχιστον ίσος με 2. Μια μη διφορούμενη γραμματική για αυτή τη γλώσσα είναι η $G' = (V', T, R', S)$ όπου

σύνολο μεταβλητών $= \{S, B\}$
σύνολο τερματικών συμβόλων $T = \{a, b\}$
$R' = \{\, S \to BaBaS,\ \ S \to BaBaB,\ \ B \to bB,\ \ B \to e \,\}.$

Παρατηρήστε ότι η μεταβλητή B παράγει όλες τις συμβολοσειρές από οσαδήποτε b.

Άσκηση 5

Βρείτε μια γραμματική χωρίς συμφραζόμενα για τη γλώσσα

$$L' = \{w \in \{a,b\}^* \mid (\text{πλήθος των } a \text{ στην } w) = (\text{πλήθος των } b \text{ στην } w)\,\}.$$

Λύση

Πρώτα-πρώτα, σημειώνουμε ότι το αρχικό σύμβολο S της γραμματικής θα πρέπει να παράγει όλες τις συμβολοσειρές της γλώσσας L' και μόνον αυτές.

Έστω w μια συμβολοσειρά της γλώσσας L'. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(α) *κανένα πρόθεμα της w (εκτός από την ίδια την w) δεν περιέχει ίσο πλήθος από a και b*: Τότε, είτε το πρώτο σύμβολο της w θα είναι a και το τελευταίο b είτε το πρώτο σύμβολο θα είναι b και το τελευταίο a. Αυτό συνεπάγεται ότι στο τμήμα της w από το 2ο σύμβολο έως και το προτελευταίο, το πλήθος των a είναι ίσο με το πλήθος των b και άρα αυτό το τμήμα παράγεται από το σύμβολο S. Τα παραπάνω οδηγούν στους εξής δύο κανόνες παραγωγής:

$$S \to aSb$$
$$S \to bSa$$

(β) *κάποιο πρόθεμα της w (εκτός από την ίδια την w) περιέχει ίσο πλήθος από a και b*: Τότε, η συμβολοσειρά w είναι η παράθεση δύο συμβολοσειρών σε καθεμία από τις οποίες το πλήθος των a είναι ίσο με το πλήθος των b και άρα καθεμία από αυτές τις δύο υπο-συμβολοσειρές παράγεται από το σύμβολο S. Αυτό οδηγεί στον εξής κανόνα παραγωγής:

$$S \to SS$$

Τέλος δεν θα πρέπει να ξεχάσουμε και τον κανόνα

$$S \to e$$

που λειτουργεί ως "αρχική συνθήκη" στους αναδρομικούς κανόνες παραγωγής που δώσαμε νωρίτερα και εξασφαλίζει την παραγωγή των συμβολοσειρών της γλώσσας L'.

Συνολικά, η τελική γραμματική χωρίς συμφραζόμενα για τη γλώσσα L' είναι:

$G = (V, T, R, S)$
όπου σύνολο μεταβλητών $= \{S\}$
σύνολο τερματικών συμβόλων $T = \{a, b\}$
$R = \{\, S \to aSb, \quad S \to bSa, \quad S \to SS, \quad S \to e\,\}.$

Άλλες σωστές λύσεις είναι επίσης οι εξής:

$G_1 = (V, T, R_1, S)$
όπου σύνολο μεταβλητών $= \{S\}$
σύνολο τερματικών συμβόλων $T = \{a, b\}$
$R_1 = \{\, S \to aSbS, \quad S \to bSaS, \quad S \to e\,\}$

και

$G_2 = (V, T, R_2, S)$
όπου σύνολο μεταβλητών $= \{S\}$
σύνολο τερματικών συμβόλων $T = \{a, b\}$

$R_2 = \{\, S \to SaSbS,\quad S \to SbSaS,\quad S \to e \,\}$.

Προσοχή: Η γραμματική

$G' = (V, T, R', S)$

όπου σύνολο μεταβλητών $= \{S\}$

σύνολο τερματικών συμβόλων $T = \{a, b\}$

$R' = \{\, S \to aSb,\quad S \to bSa,$

$S \to abS,\quad S \to baS,\quad S \to Sab,\quad S \to Sba,\quad S \to e \,\}$

αν και παράγει συμβολοσειρές που ανήκουν στη γλώσσα L', δεν παράγει όλες τις συμβολοσειρές της L'. Παραδείγματος χάριν, δεν παράγει τη συμβολοσειρά $bbaaaabb$.

Άσκηση 6

Θεωρήστε το αυτόματο στοίβας $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$ με $K = \{s, f\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{a\}$, $F = \{f\}$, και $\Delta = \Big\{\big((s,a,e),(s,a)\big),\ \big((s,a,e),(f,e)\big),\ \big((s,b,e),(s,a)\big),\ \big((f,a,a),(f,e)\big),\ \big((f,b,a),(f,e)\big)\Big\}$ το οποίο αποδέχεται τη γλώσσα $L(M)$ με τελική κατάσταση <u>και</u> κενή στοίβα.

(α) Δώστε όλες τις δυνατές μεταβάσεις του M με είσοδο aba.

(β) Δείξτε ότι aa, $abb \notin L(M)$, ενώ baa, bab, $baaaa \in L(M)$.

(γ) Ποια είναι η γλώσσα $L(M)$ που αποδέχεται το M; (Δε χρειάζεται να αποδείξετε την απάντησή σας.)

Λύση

(α) Το ακόλουθο σχήμα δίδει όλες τις συνολικές καταστάσεις λειτουργίας του αυτόματου M με είσοδο aba (το σύμβολο $\underline{\quad}$ δηλώνει τη βάση της στοίβας).

$$(s,\ aba,\ \underline{\quad}) \vdash (s,\ ba,\ \underline{\ a\ }) \vdash \left(s,\ a,\ \begin{matrix} a \\ \underline{\ a\ } \end{matrix}\right) \vdash \left(s,\ e,\ \begin{matrix} a \\ a \\ \underline{\ a\ } \end{matrix}\right)$$

$$\left(s,\ a,\ \begin{matrix} a \\ \underline{\ a\ } \end{matrix}\right) \vdash \left(f,\ e,\ \begin{matrix} a \\ \underline{\ a\ } \end{matrix}\right)$$

$$(s,\ aba,\ \underline{\quad}) \vdash (f,\ ba,\ \underline{\quad})$$

(β) Για να δείξουμε ότι μια συμβολοσειρά z δεν γίνεται αποδεκτή από το αυτόματο, θα πρέπει να ελέγξουμε εξαντλητικά όλες τις εναλλακτικές μεταβάσεις του αυτόματου M με είσοδο τη συμβολοσειρά z και να δείξουμε ότι σε καμία περίπτωση το αυτόματο δεν οδηγείται σε συνολική κατάσταση αποδοχής (δηλ., $(p,\ e,\ \underline{\quad})$ όπου η p είναι τελική κατάσταση). Αντίθετα, για να δείξουμε ότι η z είναι αποδεκτή, αρκεί να δείξουμε μια ακολουθία συνολικών καταστάσεων κατά τη λειτουργία του αυτόματου η οποία οδηγεί από την αρχική συνολική κατάσταση $(s,\ z,\ \underline{\quad})$ σε συνολική κατάσταση αποδοχής. Έτσι έχουμε:

$$(s,\, aa,\, \underline{\quad}) \vdash \begin{cases} (s,\, a,\, \underline{\;a\;}) \vdash \begin{cases} (s,\, e,\, \begin{array}{c} a \\ \underline{\;a\;} \end{array}) \\ (f,\, e,\, \underline{\;a\;}) \end{cases} \\ (f,\, a,\, \underline{\quad}) \end{cases}$$

$$(s,\, abb,\, \underline{\quad}) \vdash \begin{cases} (s,\, bb,\, \underline{\;a\;}) \vdash (s,\, b,\, \begin{array}{c} a \\ \underline{\;a\;} \end{array}) \vdash (s,\, e,\, \begin{array}{c} a \\ a \\ \underline{\;a\;} \end{array}) \\ (f,\, bb,\, \underline{\quad}) \end{cases}$$

Από τα παραπάνω, αποδεικνύεται ότι $aa \notin L(M)$ και $abb \notin L(M)$ καθώς καμία από τις συνολικές καταστάσεις δεν ταυτίζεται με τη συνολική κατάσταση αποδοχής $(f, e, \underline{\quad})$.

Αντίθετα, $baa, bab, baaaa \in L(M)$ καθώς:

$$(s,\, baa,\, \underline{\quad}) \vdash (s,\, aa,\, \underline{\;a\;}) \vdash (f,\, a,\, \underline{\;a\;}) \vdash (f,\, e,\, \underline{\quad})$$

$$(s,\, bab,\, \underline{\quad}) \vdash (s,\, ab,\, \underline{\;a\;}) \vdash (f,\, b,\, \underline{\;a\;}) \vdash (f,\, e,\, \underline{\quad})$$

$$(s,\, baaaa,\, \underline{\quad}) \vdash (s,\, aaaa,\, \underline{\;a\;}) \vdash (s,\, aaa,\, \begin{array}{c} a \\ \underline{\;a\;} \end{array}) \vdash (f,\, aa,\, \begin{array}{c} a \\ \underline{\;a\;} \end{array}) \vdash$$
$$\vdash (f,\, a,\, \underline{\;a\;}) \vdash (f,\, e,\, \underline{\quad})$$

(γ) Η γλώσσα $L(M)$ που αποδέχεται το αυτόματο M είναι το σύνολο όλων των συμβολοσειρών από το αλφάβητο $\{a, b\}$ οι οποίες είναι περιττού μήκους και έχουν μεσαίο σύμβολο a. Παρατηρήστε ότι από την κατάσταση s με τις μεταβάσεις $\big((s, a, e), (s, a)\big)$ και $\big((s, b, e), (s, a)\big)$, το αυτόματο ωθεί ένα a στη στοίβα για κάθε σύμβολο που διαβάζεται (είτε αυτό είναι a είτε b), με τη μετάβαση $\big((s, a, e), (f, e)\big)$, το αυτόματο για a μεταβαίνει στην κατάσταση f χωρίς να ωθήσει κάποιο σύμβολο στη στοίβα, ενώ τέλος με τις $\big((f, a, a), (f, e)\big)$ και $\big((f, b, a), (f, e)\big)$ και εφόσον τα υπόλοιπα σύμβολα στην είσοδο είναι ίσα σε πλήθος με τα a που έχουν ωθηθεί στη στοίβα, το αυτόματο αδειάζει τη στοίβα φτάνοντας στο τέλος της συμβολοσειράς εισόδου.

Άσκηση 7

Κατασκευάστε ένα αυτόματο στοίβας που να αποδέχεται τη γλώσσα

$$L = \{\, w \in \{a, b\}^* \mid w = w^R \,\}.$$

Λύση

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(α) *συμβολοσειρές αρτίου μήκους:* Οι συμβολοσειρές αυτές είναι της μορφής xx^R όπου $x \in \{a, b\}^*$. Τα ακόλουθα αυτόματα στοίβας αποδέχονται όλες αυτές τις συμβολοσειρές.

(i) Αποδοχή με τελική κατάσταση <u>και</u> κενή στοίβα.

$M_1 = (K_1,\, \Sigma_1,\, \Gamma_1,\, \Delta_1,\, s_1,\, F_1)$

όπου $K_1 = \{s_1, f_1\}$

$\Sigma_1 = \{a, b\}$

$$
\begin{aligned}
\Gamma_1 &= \{a,b\}\\
F_1 &= \{f_1\}\\
\Delta_1 &= \Big\{\Big((s_1,a,e),(s_1,a)\Big),\ \Big((s_1,b,e),(s_1,b)\Big),\\
&\qquad \Big((s_1,e,e),(f_1,e)\Big),\\
&\qquad \Big((f_1,a,a),(f_1,e)\Big),\ \Big((f_1,b,b),(f_1,e)\Big)\Big\}
\end{aligned}
$$

(ii) Αποδοχή με τελική κατάσταση.

$N_1 = (K_1',\, \Sigma_1,\, \Gamma_1',\, \Delta_1',\, s_0,\, F_1')$

όπου

$$
\begin{aligned}
K_1' &= \{s_0,s_1,f_1,h_1\}\\
\Sigma_1 &= \{a,b\}\\
\Gamma_1' &= \{a,b,\$\}\\
F_1' &= \{h_1\}\\
\Delta_1' &= \Big\{\Big((s_0,e,e),(s_1,\$)\Big),\ \Big((s_1,a,e),(s_1,a)\Big),\ \Big((s_1,b,e),(s_1,b)\Big),\\
&\qquad \Big((s_1,e,e),(f_1,e)\Big),\\
&\qquad \Big((f_1,a,a),(f_1,e)\Big),\ \Big((f_1,b,b),(f_1,e)\Big),\\
&\qquad \Big((f_1,e,\$),(h_1,e)\Big)\Big\}
\end{aligned}
$$

(β) *συμβολοσειρές περιττού μήκους:* Οι συμβολοσειρές αυτές είναι της μορφής $x\sigma x^R$ όπου $x \in \{a,b\}^*$ και $\sigma \in \{a,b\}$. Με βάση τα αυτόματα για την προηγούμενη περίπτωση, εύκολα κατασκευάζουμε τα εξής αυτόματα στοίβας που αποδέχονται αυτές τις συμβολοσειρές:

(i) Αποδοχή με τελική κατάσταση <u>και</u> κενή στοίβα.

$M_2 = (K_2,\, \Sigma_2,\, \Gamma_2,\, \Delta_2,\, s_2,\, F_2)$

όπου

$$
\begin{aligned}
K_2 &= \{s_2,f_2\}\\
\Sigma_2 &= \{a,b\}\\
\Gamma_2 &= \{a,b\}\\
F_2 &= \{f_2\}\\
\Delta_2 &= \Big\{\Big((s_2,a,e),(s_2,a)\Big),\ \Big((s_2,b,e),(s_2,b)\Big),\\
&\qquad \Big((s_2,a,e),(f_2,e)\Big),\ \Big((s_2,b,e),(f_2,e)\Big),\\
&\qquad \Big((f_2,a,a),(f_2,e)\Big),\ \Big((f_2,b,b),(f_2,e)\Big)\Big\}
\end{aligned}
$$

(ii) Αποδοχή με τελική κατάσταση.

$N_2 = (K_2',\, \Sigma_2,\, \Gamma_2',\, \Delta_2',\, s_0',\, F_2')$

όπου

$$
\begin{aligned}
K_2' &= \{s_0',s_2,f_2,h_2\}\\
\Sigma_2 &= \{a,b\}\\
\Gamma_2' &= \{a,b,\$\}\\
F_2' &= \{h_2\}\\
\Delta_2' &= \Big\{\Big((s_0',e,e),(s_2,\$)\Big),\ \Big((s_2,a,e),(s_2,a)\Big),\ \Big((s_2,b,e),(s_2,b)\Big),\\
&\qquad \Big((s_2,a,e),(f_2,e)\Big),\ \Big((s_2,b,e),(f_2,e)\Big),\\
&\qquad \Big((f_2,a,a),(f_2,e)\Big),\ \Big((f_2,b,b),(f_2,e)\Big),\\
&\qquad \Big((f_2,e,\$),(h_2,e)\Big)\Big\}
\end{aligned}
$$

Τότε, αυτόματα στοίβας που αποδέχονται τη γλώσσα που μας ενδιαφέρει, δηλαδή, όλες τις συμβολοσειρές των περιπτώσεων (α) και (β) είναι τα εξής:

(i) Αποδοχή με τελική κατάσταση <u>και</u> κενή στοίβα.

$M = (K,\, \Sigma,\, \Gamma,\, \Delta,\, s,\, F)$

$$
\begin{array}{lll}
\text{όπου } K & = & \{s, s_1, s_2, f_1, f_2\} \\
\Sigma & = & \{a, b\} \\
\Gamma & = & \{a, b\} \\
F & = & \{f_1, f_2\} \\
\Delta & = & \Big\{ \big((s,e,e),(s_1,e)\big),\ \big((s,e,e),(s_2,e)\big), \qquad \textit{“μπες στην } s_1 \textit{ ή την } s_2\textit{”} \\
 & & \big((s_1,a,e),(s_1,a)\big),\ \big((s_1,b,e),(s_1,b)\big), \qquad \textit{όπως στο } M_1 \\
 & & \big((s_1,e,e),(f_1,e)\big), \qquad \text{- - -} \gg \text{- - -} \\
 & & \big((f_1,a,a),(f_1,e)\big),\ \big((f_1,b,b),(f_1,e)\big), \qquad \text{- - -} \gg \text{- - -} \\
 & & \big((s_2,a,e),(s_2,a)\big),\ \big((s_2,b,e),(s_2,b)\big), \qquad \textit{όπως στο } M_2 \\
 & & \big((s_2,a,e),(f_2,e)\big),\ \big((s_2,b,e),(f_2,e)\big), \qquad \text{- - -} \gg \text{- - -} \\
 & & \big((f_2,a,a),(f_2,e)\big),\ \big((f_2,b,b),(f_2,e)\big)\Big\} \qquad \text{- - -} \gg \text{- - -}
\end{array}
$$

Σημείωση: Ένα πιο “συνοπτικό” αυτόματο στοίβας που αποδέχεται τη γλώσσα L με τελική κατάσταση και κενή στοίβα είναι το εξής:

$M' = (K',\, \Sigma',\, \Gamma',\, \Delta',\, s,\, F')$

$$
\begin{array}{lll}
\text{όπου } K' & = & \{s, f\} \\
\Sigma' & = & \{a, b\} \\
\Gamma' & = & \{a, b\} \\
F' & = & \{f\} \\
\Delta' & = & \Big\{\big((s,a,e),(s,a)\big),\ \big((s,b,e),(s,b)\big), \\
 & & \big((s,a,e),(f,e)\big),\ \big((s,b,e),(f,e)\big),\ \big((s,e,e),(f,e)\big), \\
 & & \big((f,a,a),(f,e)\big),\ \big((f,b,b),(f,e)\big)\Big\}
\end{array}
$$

Παρατηρήστε ότι οι μεταβάσεις $\big((s,a,e),(s,a)\big)$ και $\big((s,b,e),(s,b)\big)$ ωθούν σύμβολα στη στοίβα, οι μεταβάσεις $\big((s,a,e),(f,e)\big)$ και $\big((s,b,e),(f,e)\big)$ επιτρέπουν τη μετάβαση από την κατάσταση s στην f για το μεσαίο σύμβολο καρκινικών συμβολοσειρών περιττού μήκους, η μετάβαση $\big((s,e,e),(f,e)\big)$ επιτρέπει τη μετάβαση από την κατάσταση s στην f στο μέσο καρκινικών συμβολοσειρών αρτίου μήκους, ενώ τέλος οι μεταβάσεις $\big((f,a,a),(f,e)\big)$ και $\big((f,b,b),(f,e)\big)$ εκτελούν το “ταίριασμα” συμβόλων.

(ii) Αποδοχή με τελική κατάσταση.

Εντελώς αντίστοιχα έχουμε το αυτόματο

$N = (K,\, \Sigma,\, \Gamma,\, \Delta,\, s,\, F)$

$$
\begin{array}{lll}
\text{όπου } K & = & \{s, s_0, s_0', s_1, s_2, f_1, f_2, h_1, h_2\} \\
\Sigma & = & \{a, b\} \\
\Gamma & = & \{a, b, \$\} \\
F & = & \{h_1, h_2\} \\
\Delta & = & \Big\{ \big((s,e,e),(s_0,e)\big),\ \big((s,e,e),(s_0',e)\big), \qquad \textit{“μπες στην } s_0 \textit{ ή την } s_0'\textit{”}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\Big((s_0,e,e),(s_1,\$)\Big), & \textit{όπως στο } N_1 \\
\Big((s_1,a,e),(s_1,a)\Big),\ \Big((s_1,b,e),(s_1,b)\Big), & - - - \gg - - - \\
\Big((s_1,e,e),(f_1,e)\Big), & - - - \gg - - - \\
\Big((f_1,a,a),(f_1,e)\Big),\ \Big((f_1,b,b),(f_1,e)\Big), & - - - \gg - - - \\
\Big((f_1,e,\$),(h_1,e)\Big), & - - - \gg - - - \\
\Big((s_0',e,e),(s_2,\$)\Big), & \textit{όπως στο } N_2 \\
\Big((s_2,a,e),(s_2,a)\Big),\ \Big((s_2,b,e),(s_2,b)\Big), & - - - \gg - - - \\
\Big((s_2,a,e),(f_2,e)\Big),\ \Big((s_2,b,e),(f_2,e)\Big), & - - - \gg - - - \\
\Big((f_2,a,a),(f_2,e)\Big),\ \Big((f_2,b,b),(f_2,e)\Big)\Big\} & - - - \gg - - - \\
\Big((f_2,e,\$),(h_2,e)\Big), & - - - \gg - - -
\end{array}
$$

ή πιο συνοπτικά το αυτόματο

$N' = (K',\, \Sigma',\, \Gamma',\, \Delta',\, s_0,\, F')$

όπου

$$
\begin{aligned}
K' &= \{s_0, s, f, h\} \\
\Sigma' &= \{a, b\} \\
\Gamma' &= \{a, b, \$\} \\
F' &= \{h\} \\
\Delta' &= \Big\{\Big((s_0,e,e),(s,\$)\Big), \\
&\quad \Big((s,a,e),(s,a)\Big),\ \Big((s,b,e),(s,b)\Big), \\
&\quad \Big((s,a,e),(f,e)\Big),\ \Big((s,b,e),(f,e)\Big),\ \Big((s,e,e),(f,e)\Big), \\
&\quad \Big((f,a,a),(f,e)\Big),\ \Big((f,b,b),(f,e)\Big), \\
&\quad \Big((f,e,\$),(h,e)\Big) \qquad\qquad \Big\}
\end{aligned}
$$

Άσκηση 8

Χρησιμοποιήστε την ιδιότητα της κλειστότητας των γλωσσσών χωρίς συμφραζόμενα ως προς την ένωση για να δείξετε ότι οι παρακάτω γλώσσες είναι χωρίς συμφραζόμενα:

(α) $\{\, a^m\, b^n \mid m \neq n \,\}$

(β) $\{a,b\}^* - \{\, a^n\, b^n \mid n \geq 0 \,\}$

Λύση

(α) Δεν είναι δύσκολο να δει κάποιος ότι

$$\{\, a^m\, b^n \mid m \neq n \,\} \;=\; \{\, a^m\, b^n \mid m < n \,\} \;\cup\; \{\, a^m\, b^n \mid m > n \,\}.$$

Συνεπώς, η γλώσσα $\{\, a^m\, b^n \mid m \neq n \,\}$ είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα, καθώς οι γλώσσες $\{\, a^m\, b^n \mid m < n \,\}$ και $\{\, a^m\, b^n \mid m > n \,\}$ είναι γλώσσες χωρίς συμφραζόμενα και δεδομένου ότι οι γλώσσες χωρίς συμφραζόμενα είναι κλειστές ως προς την ένωση.

(β) Παρατηρούμε ότι

$$
\begin{aligned}
&\{a,b\}^* - \{\, a^n\, b^n \mid n \geq 0 \,\} \\
&\qquad\qquad = \;\{\, w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ όχι της μορφής } a^p\, b^q \,\} \;\cup\; \{\, a^m\, b^n \mid m \neq n \,\}
\end{aligned}
$$

$$= \{ w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ περιέχει } ba \} \cup \{ a^m b^n \mid m \neq n \}.$$

Η γλώσσα $\{ w \in \{a,b\}^* \mid w$ περιέχει $ba \}$ είναι κανονική, άρα είναι και γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα, η γλώσσα $\{ a^m b^n \mid m \neq n \}$ είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα (υποερώτημα (α)), και συνεπώς η γλώσσα $\{a,b\}^* - \{ a^n b^n \mid n \geq 0 \}$ είναι επίσης γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα.

Άσκηση 9

Αποδείξτε ότι οι παρακάτω γλώσσες δεν είναι γλώσσες χωρίς συμφραζόμενα:

(α) $\{ www \mid w \in \{a,b\}^* \}$

(β) $\{ w \in \{a,b,c\}^* \mid w$ έχει ίδιο πλήθος a, b και $c \}$

Λύση

(α) Θα χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα Άντλησης για γλώσσες χωρίς συμφραζόμενα όπως το διατυπώσαμε στις διαλέξεις (δηλ., με τον περιορισμό $|vxy| \leq k$). Υποθέτουμε ότι η γλώσσα του υποερωτήματος, έστω $L_{(\alpha)}$, είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα και έστω k η σταθερά του Λήμματος Άντλησης για την $L_{(\alpha)}$.

Θεωρούμε την εξής συμβολοσειρά $w = ba^k bba^k bba^k b$ η οποία ανήκει στην $L_{(\alpha)}$ και έχει μήκος μεγαλύτερο από k.

Τότε, μπορούμε να χειριστούμε κάθε πιθανό χωρισμό της w υπό τους περιορισμούς του Λήμματος Άντλησης (δηλαδή, $w = uvxyz$ όπου $|vxy| \leq k$ και $|vy| \geq 1$) με βάση τις εξής δύο γενικές περιπτώσεις:

- ▷ *το v ή το y περιέχουν b:* Τότε, η μορφή της συμβολοσειράς w και ο περιορισμός $|vxy| \leq k$ συνεπάγονται ότι τα v και y περιέχουν συνολικά μόνον 1 ή 2 b. Όμως, τότε, η συμβολοσειρά uv^2xy^2z περιέχει $6+1$ ή $6+2$ b. Και στις δύο περιπτώσεις, το πλήθος των b δεν είναι πολλαπλάσιο του 3 και άρα η uv^2xy^2z δεν ανήκει στη γλώσσα $L_{(\alpha)}$.

- ▷ *το v και το y περιέχουν μόνο a:* Τότε, για κάθε $i \geq 0$, η συμβολοσειρά uv^ixy^iz περιέχει ακριβώς 6 b. Επίσης, λόγω του περιορισμού $|vxy| \leq k$, είτε η πρώτη μέγιστη υποσυμβολοσειρά από a είτε η τρίτη μέγιστη υποσυμβολοσειρά από a της $ba^k bba^k bba^k b$ είτε και οι δύο δεν θα "αντλούνται", δηλαδή, για οποιαδήποτε τιμή του i, η συμβολοσειρά uv^ixy^iz είτε ξεκινά από ba^kbb είτε τελειώνει σε bba^kb ή και τα δύο. Καθώς $|vy| \geq 1$, έχουμε ότι $|uv^2xy^2z| > |uvxyz| = 3(k+2)$. Εάν μεν το μήκος της uv^2xy^2z δεν είναι πολλαπλάσιο του 3, τότε προφανώς $uv^2xy^2z \notin L_{(\alpha)}$. Εάν πάλι $|uv^2xy^2z| = 3\ell$, τότε $\ell > k+2$, ή ισοδύναμα $\ell \geq k+3$. Αλλά τότε, επειδή η συμβολοσειρά uv^2xy^2z είτε ξεκινά από ba^kbb είτε τελειώνει σε bba^kb ή και τα δύο, αυτή δεν μπορεί να ανήκει στη γλώσσα $L_{(\alpha)}$ καθώς είτε το 1ο τρίτο της είτε το 3ο τρίτο της ή και τα δύο περιέχουν 3 b ενώ η συνολική συμβολοσειρά περιέχει μόνον 6 b.

Άρα, και στις δύο περιπτώσεις, η συμβολοσειρά uv^2xy^2z δεν ανήκει στην $L_{(\alpha)}$. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με το Λήμμα Άντλησης για γλώσσες χωρίς συμφραζόμενα και άρα η υπόθεσή μας ότι η $L_{(\alpha)}$ είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα δεν είναι αληθής.

(β) Το γεγονός ότι η γλώσσα του συγκεκριμένου υποερώτηματος, έστω $L_{(\beta)}$, δεν είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα μπορεί να δειχθεί με βάση την παρατήρηση ότι

$$L_{(\beta)} \cap \mathcal{L}(a^* b^* c^*) = \{ a^n b^n c^n \mid n \geq 0 \}.$$

Έτσι, εάν υποθέσουμε ότι η γλώσσα $L_{(\beta)}$ είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα, τότε και η γλώσσα $\{ a^n b^n c^n \mid n \geq 0 \}$ θα πρέπει να είναι χωρίς συμφραζόμενα δεδομένου ότι οι γλώσσες χωρίς συμφραζόμενα είναι κλειστές ως προς την τομή με κανονικές γλώσσες. Αλλά αυτό οδηγεί σε άτοπο, καθώς είναι γνωστό ότι η γλώσσα $\{ a^n b^n c^n \mid n \geq 0 \}$ δεν είναι χωρίς συμφραζόμενα (*Lewis και Παπαδημητρίου*: Παράδειγμα 3.5.2, σελ. 201 & *Sipser*: Παράδειγμα 2.20, σελ. 145). Άρα, η γλώσσα $L_{(\beta)}$ δεν είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα.

Σημείωση: Το ότι η γλώσσα $L_{(\beta)}$ δεν είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα μπορεί επίσης να δειχθεί με χρήση του Λήμματος Άντλησης για γλώσσες χωρίς συμφραζόμενα όπως το διατυπώσαμε στις διαλέξεις και με επιλογή της συμβολοσειράς $w = a^k b^k c^k$ όπου k η σταθερά του Λήμματος Άντλησης για την $L_{(\beta)}$ υποθέτοντας ότι αυτή είναι χωρίς συμφραζόμενα.
Αντίθετα, το Λήμμα Άντλησης για γλώσσες χωρίς συμφραζόμενα όπως αυτό διατυπώνεται στο σύγγραμμα δεν μας επιτρέπει να δείξουμε ότι η $L_{(\beta)}$ δεν είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα, όποια συμβολοσειρά της και εάν χρησιμοποιήσουμε (λόγω έλλειψης του περιορισμού $|vxy| \leq k$).

Άσκηση 10

Δείξτε ότι το Λήμμα Άντλησης για γλώσσες χωρίς συμφραζόμενα δεν μας βοηθάει να δείξουμε ότι η γλώσσα $\{ a^i b^j c^k d^\ell \mid i = 0 \text{ ή } j = k = \ell \}$ δεν είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα.

Λύση

Ας προσπαθήσουμε να αποδείξουμε ότι η γλώσσα της συγκεκριμένης άσκησης, έστω L_{10}, δεν είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα χρησιμοποιώντας το Λήμμα Άντλησης για γλώσσες χωρίς συμφραζόμενα.
Υποθέτουμε ότι η L_{10} είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα και έστω t η σταθερά του Λήμματος Άντλησης για την L_{10}. Θα χρειαστεί να επιλέξουμε μια συμβολοσειρά w της L_{10} η οποία να έχει μήκος μεγαλύτερο από t. Καθώς η συμβολοσειρά w ανήκει στην L_{10}, θα είναι είτε της μορφής $b^p c^q d^r$, όπου $p, q, r \geq 0$, είτε της μορφής $a^p b^q c^q d^q$, όπου $p \geq 1$ και $q \geq 0$, ανάλογα με το εάν υπάρχουν a στην w ή όχι. Ας δούμε αναλυτικά αυτές τις δύο περιπτώσεις:

(α) $w = b^p c^q d^r$ όπου $p, q, r \geq 0$.
Τότε, εάν θεωρήσουμε τον χωρισμό της w σε $w = uvxyz$ όπου
$u = e$
$v =$ το πρώτο σύμβολο της w
$x = e$
$y = e$
$z =$ η συμβολοσειρά w χωρίς το πρώτο της σύμβολο
(ο χωρισμός αυτός είναι συμβατός με τους περιορισμούς $|vxy| \leq t$ και $|vy| \geq 1$ του Λήμματος Άντλησης), για κάθε $i \geq 0$, η συμβολοσειρά $uv^i xy^i z$ είναι της μορφής $b^{p'} c^{q'} d^{r'}$ και άρα ανήκει στην L_{10}.

(β) $w = a^p b^q c^q d^q$ όπου $p \geq 1$ και $q \geq 0$.
Τότε, εάν θεωρήσουμε τον χωρισμό της w σε $w = uvxyz$ όπου

$$
\begin{aligned}
u &= e \\
v &= a \\
x &= e \\
y &= e \\
z &= a^{p-1}b^q c^q d^q
\end{aligned}
$$

(και σε αυτήν την περίπτωση, ο χωρισμός είναι συμβατός με τους περιορισμούς $|vxy| \leq t$ και $|vy| \geq 1$), για κάθε $i \geq 0$, η συμβολοσειρά uv^ixy^iz είναι της μορφής $a^{p'}b^qc^qd^q$ όπου $p', q \geq 0$ και άρα ανήκει στην L_{10}.

Τελικά, για οποιαδήποτε επιλογή της συμβολοσειράς w, υπάρχει χωρισμός της w σε $w = uvxyz$ υπό τις προϋποθέσεις του Λήμματος Άντλησης για γλώσσες χωρίς συμφραζόμενα ο οποίος δεν μας επιτρέπει να βρούμε κάποιο $i \geq 0$ για το οποίο η uv^ixy^iz δεν ανήκει στην L_{10} ώστε να καταλήξουμε σε άτοπο.

Σημείωση

Αξίζει να σημειωθεί ότι το Λήμμα Άντλησης για γλώσσες χωρίς συμφραζόμενα μάς επιτρέπει να αποδείξουμε το παρακάτω πολύ ενδιαφέρον θεώρημα:

Θεώρημα

Εάν L είναι μια γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα το αλφάβητο της οποίας περιέχει μόνο ένα σύμβολο, τότε η L είναι κανονική.

Η απόδειξη βασίζεται στο εξής: εάν η γλώσσα L έχει αλφάβητο έστω $\{a\}$ και εάν η σταθερά του Λήμματος Άντλησης για την L είναι k, τότε η L αποτελείται από κάποιες συμβολοσειρές μήκους το πολύ k και ένα πεπερασμένο σύνολο από σύνολα συμβολοσειρών της μορφής $\{a^{p+iq} \,|\, i \geq 0\}$ για συγκεκριμένα p και $q \leq k$.

Παράδειγμα: Εστω $L = \{\, a^ia^i \mid i \geq 0 \,\}$ μια γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα ορισμένη στο αλφάβητο $\{a\}$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η γλώσσα αυτή είναι κανονική, καθώς είναι το σύνολο των συμβολοσειρών από a οι οποίες είναι αρτίου μήκους.