Αναγωγες

Μεθοδος αναγωγης (reduction)

Για να δειξω οτι η L_1 δεν ειναι διαγνωσιμη

- υποθετω οτι η L_1 ειναι διαγνωσιμη και
- χρησιμοποιω τον υποτιθεμενο διαγνωστη της L_1 για να κατασκευασω εναν διαγνωστη για καποια γνωστη μη διαγνωσιμη γλωσσα L_2
(δηλ. αναγω την L_2 στην L_1).
- καταληγω σε ατοπο.

Παραδειγματα

Σημειωση: Λεμε οτι μια μηχανη Turing τερματιζει για εισοδο w, εαν μεταβαινει ειτε στην $q_{αποδοχης}$ ειτε στην $q_{απορριψης}$ με εισοδο w (δηλ. δεν εγκλωβιζεται).

Παραδειγμα 1: Το προβλημα/γλωσσα

ΤΕΡΜΑΤΙΣΗ/ΤΜ $= \{\langle M, w\rangle \mid$ η Μ ειναι ΤΜ που τερματιζει για $w\}$
δεν ειναι διαγνωσιμη.

Αποδειξη

Εστω R διαγνωστης για τη γλωσσα ΤΕΡΜΑΤΙΣΗ/ΤΜ.
Τοτε κατασκευαζουμε μηχανη Turing S η οποια:

S : Για εισοδο $\langle M, w\rangle$,
1. εκτελουμε την R για εισοδο $\langle M, w\rangle$,
2. εαν η R απορριψει, απορριπτουμε,
3. εαν η R αποδεχθει, προσομοιωνουμε την Μ για εισοδο w
4. εαν η Μ αποδεχθει, αποδεχομαστε
εαν η Μ απορριψει, απορριπτουμε.

Η S μπαινει σε αποδοχη ή απορριψη για οποιαδηποτε εισοδο. Συγκεκριμενα, η S διαγιγνωσκει την ΑΠΟΔΟΧΗ/ΤΜ.
Ατοπο. ■

Παραδειγμα 2: Η γλωσσα

ΚΕΝΟΤΗΤΑ/ΤΜ $= \{ \langle M \rangle \mid$ η M ειναι ΤΜ και $L(M) = \emptyset \}$

δεν ειναι διαγνωσιμη.

Αποδειξη

Εστω R διαγνωστης για τη γλωσσα ΚΕΝΟΤΗΤΑ/ΤΜ.

Θα χρησιμοποιησω τον R για να φτιαξω εναν διαγνωστη για τη γλωσσα ΑΠΟΔΟΧΗ/ΤΜ.

Κατασκευαζω μηχανη Turing S η οποια:

S = Για εισοδο $\langle M, w \rangle$,

1. κατασκευαζω την περιγραφη μηχανης Turing M_w η οποια:

   για εισοδο x

   (i) εαν $x \neq w$, απορριπτει

   (ii) εαν $x = w$, προσομοιωνει την M με εισοδο w και αποδεχεται εαν η M αποδεχεται

2. εκτελουμε την R για εισοδο $\langle M_w \rangle$

3. Εαν η R αποδεχθει, απορριπτουμε, εαν η R απορριψει, αποδεχομαστε.

Η S τερματιζει για καθε εισοδο (ειναι διαγνωστης).

$$L(M_w) = \begin{cases} \emptyset & \text{εαν η } M \text{ δεν αποδεχεται την } w \\ \{w\} & \text{εαν η } M \text{ αποδεχεται την } w. \end{cases}$$

Συνεπως:

S αποδεχεται $\langle M, w \rangle \iff R$ απορριπτει $\langle M_w \rangle$

$\iff L(M_w) \neq \emptyset$

$\iff M$ αποδεχεται την w

Δηλαδη, η μηχανη Turing S διαγιγνωσκει τη γλωσσα ΑΠΟΔΟΧΗ/ΤΜ. Ατοπο. ■

Παραδειγμα 3. Η γλωσσα

ΚΑΝΟΝΙΚΟΤΗΤΑ/ΤΜ $= \{ \langle M \rangle \mid$ η M ειναι ΤΜ και η $L(M)$ ειναι κανονικη $\}$

δεν ειναι διαγνωσιμη.

Αποδειξη

Εστω R διαγνωστης για τη γλωσσα ΚΑΝΟΝΙΚΟΤΗΤΑ/ΤΜ.
Θα κατασκευαζω διαγνωστη για τη γλωσσα ΑΠΟΔΟΧΗ/ΤΜ.

Χρειαζεται να ορισω μια μηχανη Turing, εστω M', τετοια ωστε:

$$L(M') = \begin{cases} \text{κανονικη γλωσσα} & \text{αν } M \text{ αποδεχεται } w \\ \text{οχι κανονικη γλωσσα} & \text{αν } M \text{ δεν αποδεχ. } w \end{cases}$$

Εστω M' (η οποια εξαρταται απο M και w):

M': Για εισοδο x,

1. εαν η x ειναι της μορφης $0^n 1^n$, αποδεχομαστε
2. εαν η x δεν ειναι της μορφης $0^n 1^n$, προσομοιωνουμε την M για εισοδο w (δηλαδη, σβηνουμε την ταινια, γραφουμε w και προσομοιωνουμε την M) και αποδεχομαστε εαν αποδεχεται η M.

Τοτε: $L(M') = \begin{cases} \{0,1\}^* & \text{αν η } M \text{ αποδεχεται την } w \\ \{0^n 1^n\} & \text{αν η } M \text{ δεν αποδεχεται την } w. \end{cases}$

Οποτε: κατασκευαζουμε S η οποια:

S: Για εισοδο $\langle M, w \rangle$,

1. γραφουμε την περιγραφη της M' (η οποια εξαρταται απο M και w) στην ταινια,
2. εκτελουμε την R για $\langle M' \rangle$
3. Εαν η R αποδεχθει, αποδεχομαστε, εαν η R απορριψει, απορριπτουμε.

Τοτε η S διαγιγνωσκει τη γλωσσα ΑΠΟΔΟΧΗ/ΤΜ. ■
Ατοπο.

Παραδειγμα 4. Η γλωσσα

$$\text{ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ/ΤΜ} = \{\langle M_1, M_2\rangle \mid \text{οι } M_1 \text{ και } M_2 \text{ ειναι ΤΜ και } L(M_1) = L(M_2)\}.$$

Αποδειξη

Εστω R διαγνωστης για τη γλωσσα ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ/ΤΜ.

Θα κατασκευασω διαγνωστη για τη γλωσσα ΚΕΝΟΤΗΤΑ/ΤΜ.

Εστω M_0 μια μηχανη Turing η οποια απορριπτει ολες τις εισοδους.

Τοτε, κατασκευαζω S η οποια:

S: Για εισοδο $\langle M\rangle$,

1. εκτελουμε την R για εισοδο $\langle M, M_0\rangle$
2. εαν η R αποδεχθει, αποδεχομαστε,
   εαν η R απορριψει, απορριπτουμε.

Η μηχανη Turing S ειναι διαγνωστης για την ΚΕΝΟΤΗΤΑ/ΤΜ. Ατοπο. ■

Το προβλημα αντιστοιχιας του Post (Post correspondence problem)

Διδεται ενα συνολο πλακιδιων τα οποια εχουν μία λεξη γραμμενη στο ανω μερος και μια λεξη γραμμενη στο κατω μερος.

Υπαρχει ακολουθια πλακιδιων (πιθανον με επαναληψεις) τετοια ωστε η λεξη που σχηματιζεται απο τα συμβολα στο ανω μερος των πλακιδιων να ειναι ιδια με τη λεξη που σχηματιζεται στο κατω μερος;

π.χ.

για $\left\{ \begin{bmatrix} a \\ ab \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ca \\ a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ ca \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} aba \\ a \end{bmatrix} \right\}$

Θεωρημα

Το προβλημα αντιστοιχιας του Post δεν ειναι επιλυσιμο (η αντιστοιχη γλωσσα δεν ειναι διαγνωσιμη).