

# Επιλυσιμα Προβλήματα σχετικά με Κανονικές Γλώσσες

## Θεώρημα 1 (ΑΠΟΔΟΧΗ/DEFA)

Η γλώσσα

$\{ \langle B, w \rangle \mid \text{το } B \text{ είναι Αιζ. Π. Α. που αποδέχεται την } w \}$   
είναι διαγνώσιμη.

Απόδειξη

Προσομοιώνουμε το  $B \dots$  ■

## Θεώρημα 2 (ΑΠΟΔΟΧΗ/NFA)

Η γλώσσα

$\{ \langle B, w \rangle \mid \text{το } B \text{ είναι μη Αιζ. Π. Α. που αποδέχεται την } w \}$   
είναι διαγνώσιμη.

Απόδειξη

$B$  μη Αιζ. Π. Α.  $\rightarrow B'$  Αιζ. Π. Α. και προσομοίωση  $B'$ . ■

## Θεώρημα 3 (ΠΑΡΑΓΩΓΗ/REG)

Η γλώσσα

$\{ \langle R, w \rangle \mid \text{η } R \text{ είναι κανονική έκφραση που παράγει την } w \}$   
είναι διαγνώσιμη.

Απόδειξη

$R \rightarrow B$  μη Αιζ. Π. Α.  $\rightarrow B'$  Αιζ. Π. Α. και προσομοίωση  $B'$ . ■

## Θεώρημα 4 (ΚΕΝΟΤΗΤΑ/DEFA)

Η γλώσσα

$\{ \langle B \rangle \mid \text{το } B \text{ είναι Αιζ. Π. Α. και } L(B) = \emptyset \}$   
είναι διαγνώσιμη.

Απόδειξη

Με θήκανση καταστάσεων στις οποίες πηγαίνουν από την αρχική κατάσταση και έλεγχος εάν υπάρχει θήκανση τελική κατάσταση. ■

### Θεώρημα 5 (ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ/ DFA)

Η γλώσσα

$\{ \langle A, B \rangle \mid \text{τα } A \text{ και } B \text{ είναι δυο Αλγ.Π.Α. και } L(A) = L(B) \}$   
είναι διαγνώσιμη.

Αποδείξη

$$(L(A) - L(B)) \cup (L(B) - L(A)) = (L(A) \cap \overline{L(B)}) \cup (L(B) \cap \overline{L(A)}).$$

Επίλυσιμα Προβλήματα για Γλώσσες χωρίς Συμπεραζόμενα

### Θεώρημα 6 (ΠΑΡΑΓΩΓΗ/CFG)

Η γλώσσα

$\{ \langle G, w \rangle \mid \text{η } G \text{ είναι μια Γρ.Χ.Σ. που παράγει την } w \}$   
είναι διαγνώσιμη.

Αποδείξη

$G \rightarrow G'$  σε κανονική μορφή Chomsky και εκτελέσει όλων των παραγωγών με  $2|w|-1$  βήματα. ■

### Θεώρημα 7 (ΚΕΝΟΤΗΤΑ/CFG)

Η γλώσσα

$\{ \langle G \rangle \mid \text{η } G \text{ είναι μια Γρ.Χ.Σ. και } L(G) = \emptyset \}$   
είναι διαγνώσιμη.

Αποδείξη

Με βήκωση τερματικών συμβόλων και επαναληπτικές βήκωση μεταβλητών. Ελέγξω αν η αρχική μεταβλητή είναι βήκαση. ■

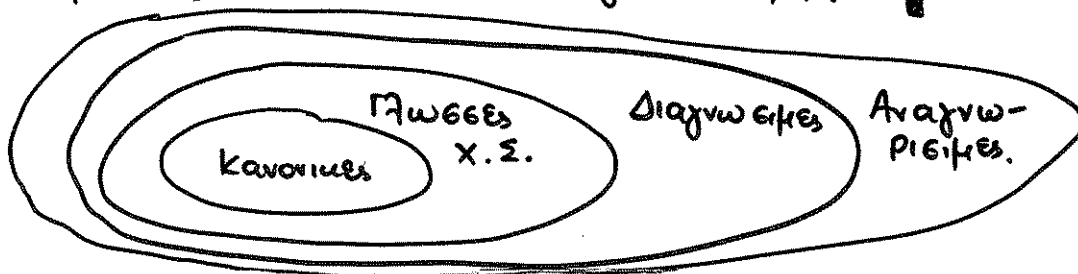
### Θεώρημα 8

Κάθε ασυμπεραστική γλώσσα είναι διαγνώσιμη.

Αποδείξη

Εστω  $G$  Γρ.Χ.Σ. για την ασυμπεραστική γλώσσα.

Για είσοδο  $w$ , εμπελούμε την μηχανή Turing για το πρόβλημα ΠΑΡΑΓΩΓΗ/CFG για  $\langle G, w \rangle$ . ■



## Μη Επιλυσιμότητα

### Θεώρημα

Η γλώσσα

Αποδοχή/ΤΜ =  $\{ \langle M, w \rangle \mid \text{η } M \text{ είναι Τ.Μ. που αποδεχεται την } w \}$   
είναι αναγνωρίσιμη.

Αποδείξη

Με χρήση της καθολικής μηχανής Turing  $U$ :

για είσοδο  $\langle M, w \rangle$ ,

η  $U$  προσομοιώνει την  $M$  για είσοδο  $w$ .

Αν η  $M$  μεταβεί στην γαποδοχής και η  $U$

μεταβαίνει στην γαποδοχής. Όμοια για την γαπορρ. ■

Προσοχή: Αν η  $M$  εγκλωβίζεται (δηλ. δαλτεύει επ' άπειρον)  
τότε και η  $U$  προσομοιώνοντας την  $M$  εγκλωβίζεται.

### Θεώρημα

Υπάρχουν γλώσσες που δεν είναι αναγνωρίσιμες.

Αποδείξη

Το σύνολο των δυνατών γλωσσών δεν είναι αριθμη-  
τικό (με διαχωνοποίηση δείχνουμε ότι το σύνολο των  
άπειρων μηκούς δυαδικών ακολουθιών δεν είναι αριθμητικό).

Το σύνολο των μηχανών Turing είναι αριθμητικό. ■

## Θεωρημα

Η γλώσσα Αποδοχή/ΤΜ δεν είναι διαγνώσιμη.

⇔ Το πρόβλημα του ΤΕΡΜΑΤΙΣΜΟΥ (δηλαδή, εάν δόσω μηχανή Turing  $M$  και συμβολοσειρά  $w$ , αποδεχεται η  $M$  την  $w$ ) είναι μη επιλύσιμο.

### Αποδείξη

Εστω  $H$  μηχανή Turing που είναι διαγνώσιμη για τη γλώσσα Αποδοχή/ΤΜ.

Τότε

$$H(\langle M, w \rangle) = \begin{cases} \text{αποδοχή} & \text{αν η } M \text{ αποδεχεται } w \\ \text{απορρίψη} & \text{αν η } M \text{ δεν αποδεχεται } w. \end{cases}$$

Κατασκευάζουμε μηχανή Turing  $D$  ως εξής:

$D$ : Για είσοδο  $\langle M \rangle$  όπου  $M$  είναι μηχανή Turing,

1. Εκτελούμε την  $H$  για είσοδο  $\langle M, \langle M \rangle \rangle$ .

2. Εάν η  $H$  αποδεχθεί, απορρίπτουμε,  
εάν η  $H$  απορρίψει, αποδεχομαστε.

Τότε

$$D(\langle M \rangle) = \begin{cases} \text{αποδοχή} & \text{αν η } M \text{ δεν αποδεχεται } \langle M \rangle \\ \text{απορρίψη} & \text{αν η } M \text{ αποδεχεται } \langle M \rangle. \end{cases}$$

Αλλά

$$D(\langle D \rangle) = \begin{cases} \text{αποδοχή} & \text{αν η } D \text{ δεν αποδεχεται } \langle D \rangle \\ \text{απορρίψη} & \text{αν η } D \text{ αποδεχεται } \langle D \rangle. \end{cases}$$

Ατοπο. ■

## Πορισμα

Η γλώσσα Αποδοχή/ΤΜ δεν είναι αναγνωρίσιμη.

### Αποδείξη

Καθώς Αποδοχή/ΤΜ είναι αναγνωρίσιμη, εάν και το συμπλήρωτά της ήταν αναγνωρίσιμη, τότε η Αποδοχή/ΤΜ θα ήταν διαγνώσιμη. Ατοπο. ■