

## Απαριθμητές

Μηχανές Turing που "γράφουν" συμβολοσειρές (εξόδους).

Αρχικά: κενή ταινία εισόδου

Γλώσσα του απαριθμητή  $E$  = σύνολο συμβολοσειρών που "γράφει" ο  $E$ .

(Σημ.: μια συμβολοσειρά μπορεί να "γράφει" πολλές φορές).

Πρακτικά: Γραψίμο συμβολοσειράς  $w$  από  $E$

$\iff$  ο απαριθμητής  $E$  μπαίνει σε ειδική κατάσταση  $q$  και η ταινία εκείνη τη στιγμή περιέχει  $w$  στα αριστερά της κεφαλής.

## Θεώρημα

Μια γλώσσα είναι αναγνωρίσιμη αν και μόνο αν υπάρχει απαριθμητής που την απαριθμεί.

## Το δόγμα Church-Turing

(Church-Turing thesis)

Αλγόριθμος = Προγραμμα μηχανής Turing

ή

οτιδήποτε μπορεί να υπολογιστεί, υπολογίζεται από κάποιο πρόγραμμα μηχανής Turing.

# Ιδιότητες αναγνωρίσιμων και διαγνώσιμων γλωσσών

## Θεώρημα 1

Κάθε διαγνώσιμη γλώσσα είναι αναγνωρίσιμη.

Προσοχή: Μια αναγνωρίσιμη γλώσσα δεν είναι απαραίτητα διαγνώσιμη.

## Θεώρημα 2

Το συμπλήρωμα κάθε διαγνώσιμης γλώσσας είναι διαγνώσιμη γλώσσα.

Αποδείξη

Εναλλακτικές ως  $\bar{L}$  αποδοχής και  $\bar{L}$  απορρίψης. ■

## Θεώρημα 3

Η ένωση δύο διαγνώσιμων γλωσσών είναι διαγνώσιμη γλώσσα.

Η ένωση δύο αναγνωρίσιμων γλωσσών είναι αναγνωρίσιμη γλώσσα.

Αποδείξη

"Εκτελούμε" τις αντίστοιχες μηχανές Turing παράλληλα. ■

## Θεώρημα 4

Η τομή δύο διαγνώσιμων γλωσσών είναι διαγνώσιμη γλώσσα.

Η τομή δύο αναγνωρίσιμων γλωσσών είναι αναγνωρίσιμη γλώσσα.

Αποδείξη

Και σε αυτήν την περίπτωση, "Εκτελούμε" τις αντίστοιχες μηχανές Turing παράλληλα. ■

### Θεώρημα 5

Μια γλώσσα  $L$  είναι διαγνώσιμη αν και μόνο αν η  $L$  και το συμπλήρωμά  $\bar{L}$  της  $L$  είναι αναγνωρίσιμες.

Αποδείξη

$(\Rightarrow)$   $L$  διαγνώσιμη  $\Rightarrow L$  αναγνωρίσιμη  
 $\Downarrow$   $\bar{L}$  διαγνώσιμη  $\Rightarrow \bar{L}$  αναγνωρίσιμη.

$(\Leftarrow)$  Εάν  $L$  και  $\bar{L}$  είναι αναγνωρίσιμες τότε "επιλέγουμε" τις αντίστοιχες μηχανές Turing παράλληλα

οποια και να είναι η είσοδος (είτε  $\in L$  είτε  $\in \bar{L}$ ) κάποια από τις δύο μηχανές οδηγείται σε απόφαση, οπότε αναλόγα οδηγούμαστε σε απόφαση ή απορρίψη. ■

Άρα : για οποιαδήποτε γλώσσα  $L$ , ακριβώς ένα από τα εξής 3 ενδεχόμενα ισχύει :

- (i) τόσο η  $L$  όσο και η  $\bar{L}$  είναι διαγνώσιμες
- (ii) ούτε η  $L$  ούτε η  $\bar{L}$  δεν είναι αναγνωρίσιμη
- (iii) μία από τις  $L, \bar{L}$  είναι αναγνωρίσιμη αλλά όχι διαγνώσιμη, ενώ η άλλη δεν είναι αναγνωρίσιμη.

# Τύποι Προβλημάτων

## Πρόβλημα εύρεσης

αναζητείται κάποια λύση, αν υπάρχει.

π.χ. Δίδεται γραφήμα.

Να βρεθεί συνδετικό δένδρο (= δένδρο στο οποίο συμπεριέχουν όλοι οι κομβοί του γραφήματος), εφόσον υπάρχει.

## Πρόβλημα απόφασης

επιδέχεται απάντηση ΝΑΙ ή ΟΧΙ.

π.χ. Δίδεται γραφήμα.

Υπάρχει συνδετικό δένδρο;

## Πρόβλημα βελτιστοποίησης

αναζητείται λύση που βελτιστοποιεί κάποιο κριτήριο.

π.χ. Δίδεται γραφήμα με βάρη στις ακμές.

Να βρεθεί συνδετικό δένδρο, αν υπάρχει, με το ελάχιστο βάρος.

Για κάθε πρόβλημα βελτιστοποίησης ορίζεται ένα αντίστοιχο πρόβλημα απόφασης με χρήση κάποιας τιμής (=φραγής) για την τιμή του κριτηρίου βελτιστοποίησης.

π.χ. Δίδεται γραφήμα με βάρη στις ακμές και τιμή  $B$ .

Να βρεθεί συνδετικό δένδρο, αν υπάρχει, με βάρος  $\leq B$ .

Αποδεικνύεται ότι τα προβλήματα απόφασης δεν είναι πιο εύκολα από τα προβλήματα εύρεσης και βελτιστοποίησης.

→ Θα επικεντρωθούμε το ενδιαφέρον μας σε προβλήματα απόφασης.

## Επιλυσιμα και Ανεπιλυτα Προβληματα.

Για καθε προβλημα αποφασης  $\Pi$  που οριζεται σε  
ενα τυπο αντικειμενων  $\Gamma$ ,  
οριζεται η γνωσθα

$$L_{\Pi}(\Gamma) = \{ \gamma \mid \gamma \text{ ειναι αντικειμενο τυπου } \Gamma \text{ και } \\ \text{το προβλημα } \Pi \text{ για το } \gamma \text{ εχει απαντηση ΝΑΙ} \}$$

π.χ. για το προβλημα υπαρξης σωδετικου δειδρου για  
γραφηματα, εχουμε:

$\Pi$ : υπαρξη σωδετικου δειδρου

$\Gamma$ : γραφηματα

$L_{\Pi}(\Gamma) =$  ολα τα γραφηματα που ειναι σωδεδεμενα  
(για αυτα υπαρχει σωδετικο δειδρο) .

Με βαση το δογμα (εικασια) Church-Turing:

Επιλυσιμο προβλημα  $\iff$  η αντιστοιχη γνωσθα  
ειναι διαγνωσιμη



υπαρχει αλγοριθμος  
για το προβλημα

Τα προβληματα που δεν ειναι επιλυσιμα λεγονται  
ανεπιλυτα.