Ιδιοτητες Κλειστοτητας για Γλ.Χ.Σ.

Θεωρημα.
Οι γλωσσες χωρις συμφραζομενα ειναι κλειστες ως προς την ενωση, την παραθεση και την Kleene star.

Αποδειξη

Εστω $G_1 = (V_1, \Sigma_1, R_1, S_1)$ και $G_2 = (V_2, \Sigma_2, R_2, S_2)$ οπου χωρις βλαβη της γενικοτητας $(V_1 - \Sigma_1) \cap (V_2 - \Sigma_2) = \emptyset$.

Ενωση

Η γραμματικη $G = (V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, R, S)$ οπου $R = R_1 \cup R_2 \cup \{S \to S_1, S \to S_2\}$ παραγει την γλωσσα $L(G_1) \cup L(G_2)$.

Παραθεση

Η γραμματικη $G = (V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, R, S)$ οπου $R = R_1 \cup R_2 \cup \{S \to S_1 S_2\}$ παραγει τη γλωσσα $L(G_1) L(G_2)$.

Kleene star

Η γραμματικη $G = (V_1 \cup \{S\}, \Sigma_1, R, S)$ οπου $R = R_1 \cup \{S \to SS_1, S \to e\}$ παραγει τη γλωσσα $(L(G_1))^*$. ■

Θεωρημα

Οι γλωσσες χωρις συμφραζομενα ειναι κλειστες ως προς την <u>τομη με κανονικες γλωσσες</u>

(δηλαδη, αν L Γ.Χ.Σ. και R κανονικη $\Rightarrow$ $L \cap R$ Γ.Χ.Σ.)

Αποδειξη

Εστω $M_1 = (K_1, \Sigma, \Gamma_1, \Delta_1, s_1, F_1)$ αυτοματο στοιβας για L

και $M_2 = (K_2, \Sigma, \delta, s_2, F_2)$ ντετερμινιστικο πεπ. αυτοματο για R.

Τοτε, η $L \cap R$ γινεται δεκτη απο αυτοματο στοιβας A

οπου

$$A = (K_1 \times K_2, \ \Sigma, \ \Gamma_1, \ \Delta, \ (s_1, s_2), \ F_1 \times F_2)$$

με Δ ως εξης:

- $\forall$ μεταβαση $((q_1, a, \beta), (p_1, \gamma)) \in \Delta_1$ ($a \in \Sigma$) και $\forall q_2 \in K_2$
  εχουμε στη Δ: $(((q_1, q_2), a, \beta), ((p_1, \delta(q_2, a)), \gamma))$
- $\forall$ μεταβαση $((q_1, e, \beta), (p_1, \gamma)) \in \Delta_1$ και $\forall q_2 \in K_2$
  εχουμε στη Δ: $(((q_1, q_2), e, \beta), ((p_1, q_2), \gamma))$. ■

Σημειωση

- Οι γλωσσες χωρις συμφραζομενα δεν ειναι κλειστες ως προς την τομη.

  Η $L_1 = \{a^n b^n c^m : n, m \geq 1\}$ και η $L_2 = \{a^n b^m c^m : n, m \geq 1\}$ ειναι ΓΧΣ αλλα η τομη τους <u>δεν</u> ειναι ΓΧΣ.

  $$L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n : n \geq 1\}.$$

- Οι γλωσσες χωρις συμφραζομενα δεν ειναι κλειστες ως προς τη συμπληρωση.

  Εαν οι ΓΧΣ ηταν κλειστες ως προς τη συμπληρωση, θα ηταν κλειστες και ως προς την τομη.

Θεωρημα Αντλησης για Γλωσσες χωρις Συμφρ.

Ευρος $\phi(G)$: το μεγαλυτερο πληθος συμβολων στο δεξιο μελος των κανονων της γραμματικης G.

<u>Θεωρημα</u>

Εστω L(G) μια απειρη γλωσσα χωρις συμφραζομενα που παραγεται απο μια γραμματικη $G = (V, \Sigma, R, S)$ και εστω $K = \phi(G)^{|V-\Sigma|}$.

Τοτε <u>καθε συμβολοσειρα $w \in L(G)$ με $|w| > K$</u> μπορει να γραφει ως <u>$w = uvxyz$</u> ωστε $|vy| \geq 1$, <u>$|vxy| \leq K$</u>, και για <u>καθε $i \geq 0$</u>, <u>$uv^ixy^iz \in L(G)$.</u>

Αποδειξη

Γνωριζουμε οτι:

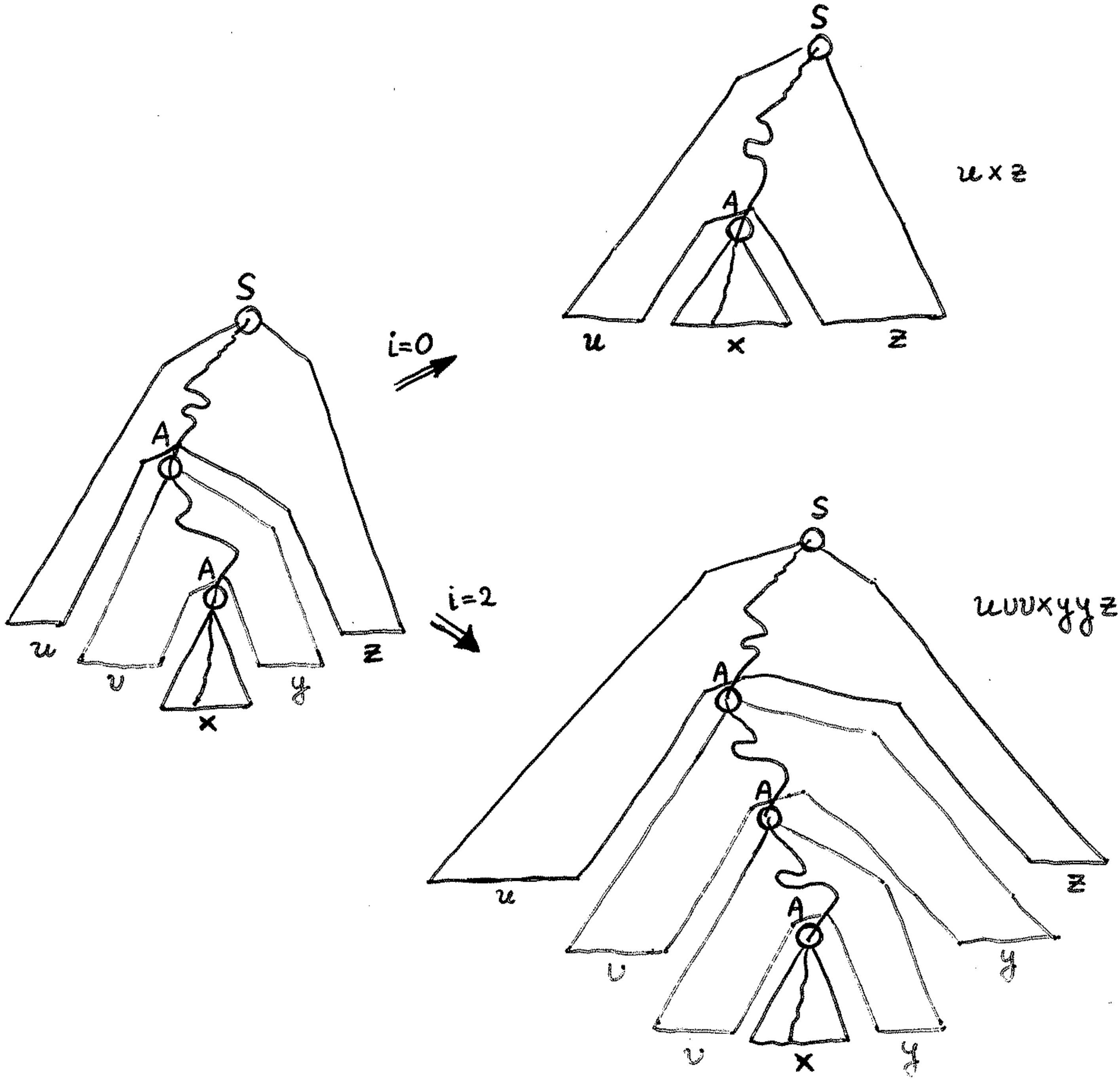
Καθε δεντρο βαθμου d και υψους h εχει $\leq d^h$ φυλλα.

Συνεπως

Η παραγομενη συμβολοσειρα καθε συντακτικου δεντρου της G με υψος h εχει μηκος $\leq \phi(G)^h$.

Αφου η συμβολοσειρα w εχει μηκος $> \phi(G)^{|V-\Sigma|}$, το συντακτικο δεντρο για την w εχει υψος $> |V-\Sigma|$.
Αρα, το δεντρο αυτο εχει ενα μονοπατι απο τη ριζα σε καποιο φυλλο με μηκος $\geq |V-\Sigma|+1$, το οποιο δηλαδη περνα απο $\geq |V-\Sigma|+2$ κομβους.
Καθως καθε τετοιο μονοπατι περνα απο ενα μονο φυλλο, οι εσωτ. κομβοι του συντακτικου δεντρου επιγραφονται με μεταβλητες και υπαρχουν $|V-\Sigma|$ μεταβλητες, υπαρχουν (τουλαχιστον) 2 κομβοι στο μονοπατι επιγραμμενοι με την ιδια μεταβλητη A.

Σχηματικά,



κ.λ.π.

Παραδειγμα

Η γλωσσα $L = \{ a^n b^n c^n \mid n \geq 1 \}$ <u>δεν</u> ειναι γλωσσα χωρις συμφραζομενα.

Εστω οτι η L ηταν Γ.Χ.Σ. και εστω K η σταθερα του λημματος αντλησης.

Επιλεγουμε $w = a^k b^k c^k$.

Τοτε για οποιαδηποτε επιλογη τετοια ωστε:

$$w = uvxyz \qquad \text{με } |vy| \geq 1, \quad |vxy| \leq k$$

το $uv^i x y^i z \notin L$ για καποιο $i \geq 0$.

Περιπτωση 1: ειτε το v μονο του, ειτε το y μονο του περιεχει περισσοτερα απο ενα διαφορετικα συμβολα.

π.χ. $v = a^i b^j$ $\quad i,j \neq 0$.

Τοτε ομως $v^2 = vv = a^i b^j a^i b^j$ και το $uv^2 x y^2 z \notin L$.

Ομοια για τις αλλες υποπεριπτωσεις.

Περιπτωση 2: το καθενα απο τα v, y περιεχει μονο a, ή μονο b ή μονο c.

Τοτε ομως το $uv^2 x y^2 z \notin L$ γιατι δεν μπορει να περιεχει ισο αριθμο απο a, b, και c.

Σημειωση

Υπαρχουν γλωσσες που <u>δεν</u> ειναι ΓΧΣ και ωστοσο το Λημμα Αντλησης δεν μας βοηθαει να το αποδειξουμε.

$\Longrightarrow$ Λημμα του Ogden.

$(L = \{ a^i b^j c^k d^\ell \mid i = 0 \text{ ή } j = k = \ell \}.)$

Αλγοριθμοι για Γλωσσες χωρις Συμφραζομενα

Θεωρημα

- Υπαρχει πολυωνυμικος αλγοριθμος ο οποιος, δεδομενης μιας γραμματικης χωρις συμφραζομενα, κατασκευαζει ενα ισοδυναμο αυτοματο στοιβας.
- Υπαρχει πολυωνυμικος αλγοριθμος ο οποιος, δεδομενου ενος αυτοματου στοιβας, κατασκευαζει μια ισοδυναμη γραμματικη χωρις συμφραζομενα.
- Υπαρχει πολυωνυμικος αλγοριθμος ο οποιος, δεδομενης μιας γραμματικης χωρις συμφραζομενα G και μιας συμβολοσειρας x, αποφασιζει εαν $x \in L(G)$.
  - εαν $x = e$, ελεγχουμε εαν $S \overset{*}{\Rightarrow}_G e$
  - εαν $x \neq e$, εφαρμοζουμε τον CYK-αλγοριθμο (Cocke - Younger - Kasami)

Επισης,

- υπαρχει αλγοριθμος ο οποιος, δεδομενης μιας γραμματικης χωρις συμφραζομενα G, αποφασιζει εαν $L(G) = \phi$.
- υπαρχει αλγοριθμος ο οποιος, δεδομενης μιας γραμματικης χωρις συμφραζομενα G, αποφασιζει εαν η $L(G)$ ειναι πεπερασμενη.

- **κανονικη** γραμματικη χωρις συμφραζομενα (regular)

- κανονικη μορφη Chomsky (Chomsky normal form - CNF)
- κανονικη μορφη Greibach (Greibach normal form - GNF)