Αυτοματα Στοιβας (Pushdown automata)

Επιπροσθετα απο τα βασικα χαρακτηριστικα που ειχαν τα πεπερασμενα αυτοματα, τα αυτοματα στοιβας διαθετουν μια απειρη σε μεγεθος στοιβα στην οποια μπορουν να γραφουν (ωθηση) και απο την οποια μπορουν να διαβασουν (απωθηση).

Ενα αυτοματο στοιβας ειναι μια εξαδα $(K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$ οπου

- K : πεπερασμενο συνολο καταστασεων
- Σ : αλφαβητο (συμβολα εισοδου)
- Γ : αλφαβητο (συμβολα στοιβας)
- $s \in K$: αρχικη κατασταση
- $F \subseteq K$: συνολο τελικων καταστασεων
- Δ : η σχεση μεταβασης ειναι ενα πεπερασμενο υποσυνολο του $(K \times (\Sigma \cup \{e\}) \times \Gamma^*) \times (K \times \Gamma^*)$.

  Δηλαδη, αν $((p, a, w), (q, w')) \in \Delta$ το αυτοματο με εισοδο a και w στη στοιβα (στην κορυφη της) μπορει να μεταβει απο την κατασταση p στην q και αλλαξει το w σε w' στην κορυφη της στοιβας.

Συνολικη κατασταση: στοιχειο του συνολου $K \times \Sigma^* \times \Gamma^*$.

Ενα αυτοματο στοιβας δεχεται μια συμβολοσειρα $w \in \Sigma^*$ αν και μονον αν $(s, w, e) \vdash^* (p, e, e)$ και $p \in F$, δηλαδη, αφου διαβασει τη συμβολοσειρα τελικα μπαινει σε τελικη κατασταση και εχει αδειασει τη στοιβα.

Η γλωσσα $L(M)$ που γινεται δεκτη απο αυτοματο στοιβας M ειναι το συνολο των συμβολοσειρων που γινονται δεκτες απο M.

Παραδειγμα

$$L = \{ wcw^R : w \in \{a,b\}^* \}$$

Τοτε $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$

οπου $K = \{s, f\}$

$\Sigma = \{a, b, c\}$

$\Gamma = \{a, b\}$

$F = \{f\}$

και $\Delta = \{$ $((s,a,e),(s,a))$, $((s,b,e),(s,b))$, — ωθηση συμβολων της w

$((s,c,e),(f,e))$,

$((f,a,a),(f,e))$, $((f,b,b),(f,e))$ $\}$ — Ταιριασμα συμβολων

Προσοχη

Η μεταβαση $((s,a,e),(s,a))$ σημαινει οτι

"απο την καταστασn s με εισοδο a το αυτοματο παραμενει στην s και προσθετει στην κορυφη της ηδη υπαρχουσας στοιβας το συμβολο a"

και **οχι** οτι

"απο την s με εισοδο a και κενη στοιβα το αυτοματο παραμενει στην s και ωθει το συμβολο a στη στοιβα."

Ντετερμινιστικα Αυτοματα Στοιβας

Ενα αυτοματο στοιβας M ειναι ντετερμινιστικο εαν για καθε συνολικη κατασταση υπαρχει το πολυ μια επομενη συνολικη κατασταση κατα τη διαρκεια οποιουδηποτε υπολογισμου του M.

↳ λειτουργια του M αυστηρα καθορισμενη.

Ελεγχος: Ενα αυτοματο στοιβας ειναι ντετερμινιστικο αν για καθε μεταβαση $((p,a,b),(q,\gamma))$ δεν υπαρχει μεταβαση $((p,a',b'),(q',\gamma'))$ οπου a' προθεμα του a και b' προθεμα του b.

Τα ντετερμινιστικα και τα μη ντετερμινιστικα αυτοματα στοιβας δεν ειναι ισοδυναμα.

Παραδειγμα: Δεν υπαρχει ντετερμινιστικο αυτοματο στοιβας για τη γλωσσα: $\{ww^R : w \in \{a,b\}^*\}$.

Αποδοχη με τελικη κατασταση

Τοτε, η γλωσσα που αποδεχεται το αυτοματο στοιβας M ειναι $L_f(M) = \{w \in \Sigma^* :$ το M μεταβαινει απο (s,w,e) σε (f,e,a) οπου $f \in F$, $a \in \Gamma^* \}$.

Αποδοχη με αδεια στοιβα

Τοτε, η γλωσσα που αποδεχεται το αυτοματο στοιβας M ειναι $L_e(M) = \{w \in \Sigma^* :$ το M μεταβαινει απο (s,w,e) σε (p,e,e) οπου $p \in K \}$.

Οι 3 τροποι αποδοχης ειναι ισοδυναμοι.

Γραμματικες Χωρις Συμφρ. και Αυτοματα Στοιβας

Λημμα

Καθε γλωσσα χωρις συμφραζομενα γινεται δεκτη απο καποιο αυτοματο στοιβας.

Αποδειξη

Βασικη Ιδεα: Το αυτοματο κατασκευαζει "μη ντετερμινιστικα" στη στοιβα του την <u>αριστεροτερη παραγωγη</u> της συμβολοσειρας εισοδου και καθε φορα που σε αυτη τη διαδικασια προκυπτουν τερματικα συμβολα στην κορυφη της στοιβας (στα αριστερα της παραγομενης συμβολοσειρας του V^*) ταιριαζει τα συμβολα αυτα με τα συμβολα της εισοδου (απωθωντας τα απο τη στοιβα).

Συγκεκριμενα, αν $G = (V, \Sigma, R, S)$ τοτε το αυτοματο $M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$, οπου

$K = \{p, q\}$

$\Gamma = V$

$s = p$

$F = \{q\}$

$$\Delta = \{\ ((p,e,e),(q,S)),\quad ((q,e,A),(q,x)) \ \ \forall \text{ κανονα } A \to x \text{ στο } R,\quad ((q,a,a),(q,e)) \ \ \forall a \in \Sigma \ \},$$

δεχεται τη γλωσσα $L(G)$. ■

Λημμα

Καθε γλωσσα που γινεται δεκτη απο καποιο αυτοματο στοιβας ειναι γλωσσα χωρις συμφραζομενα.