Γραμματικες χωρις συμφραζομενα
(context-free grammars)

Κανονικες γλωσσες → κανονικες εκφρασεις
→ πεπερασμενα αυτοματα

π.χ. Λεκτικη Αναλυση

Γλωσσες χωρις συμφραζομενα → γραμματικες χωρις συμφρ.
→ αυτοματα στοιβας

π.χ. Συντακτικη Αναλυση

Παραδειγμα

Γραμματικη χωρις συμφραζομενα για $\mathcal{L}(a(a^* \cup b^*)b)$.

$S \rightarrow a\,M\,b$
$M \rightarrow A$
$M \rightarrow B$
$A \rightarrow a\,A$
$A \rightarrow e$
$B \rightarrow b\,B$
$B \rightarrow e$

τερματικο συμβολο

μεταβλητη

Μια γραμματικη χωρις συμφραζομενα ειναι μια τετραδα (V, Σ, R, S) οπου:

V : συνολο μεταβλητων και τερματικων
↳ αλφαβητο της γραμματικης

Σ : συνολο τερματικων $(\Sigma \subset V)$
↳ αλφαβητο της γλωσσας

R : συνολο κανονων παραγωγης $(R \subseteq (V-\Sigma) \times V^*)$

S : αρχικο συμβολο οπου $S \in V-\Sigma$

Παραγωγες

- Εαν $A \xrightarrow[G]{} u$ τοτε $xAy \underset{G}{\Rightarrow} xuy$

  παραγει σε 1 βημα

- Εαν $u_1 \underset{G}{\Rightarrow} u_2 \underset{G}{\Rightarrow} u_3 \underset{G}{\Rightarrow} \cdots \underset{G}{\Rightarrow} u_m$ ($m-1$ βηματα)

  ή $u_1 = u_m$ (0 βηματα)

  τοτε $u_1 \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} u_m$ παραγει

  αvακλαστικη μεταβατικη κλειστοτητα της σχεσης "$\underset{G}{\Rightarrow}$".

Η γλωσσα $L(G)$ που παραγεται απο μια γραμματικη G ειναι η $\{w \in \Sigma^* : S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} w\}$.

Λεμε οτι η G παραγει καθε συμβολοσειρα της $L(G)$.

Μια γλωσσα L ειναι γλωσσα χωρις συμφραζομενα αν $L = L(G)$ για καποια γραμματικη G χωρις συμφραζομενα.

<u>Παραδειγμα</u>

$$L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$$

Τοτε $G = (V, \Sigma, R, S)$ οπου

$V = \{S, a, b\}$

$\Sigma = \{a, b\}$

$R = \{ S \to aSb$
$\quad S \to e \}$.

Παραδειγματα

1) $G = (W, \Sigma, R, S)$ οπου

$W = \{S, A, N, V, P\} \cup \Sigma$

$\Sigma = \{$ Jim, big, green, cheese, ate $\}$

$R = \{$
$S \to PVP$
$P \to AP$
$P \to N$
$A \to$ big
$A \to$ green
$N \to$ Jim
$N \to$ cheese
$V \to$ ate $\}$

2) $G = (V, \Sigma, R, E)$ οπου

$V = \{E, T, F, +, *, (,), id\}$

$\Sigma = \{+, *, (,), id\}$

$R = \{$
$E \to E + T$
$E \to T$
$T \to T * F$
$T \to F$
$F \to (E)$
$F \to id$ $\}$.

Κανονικες γλωσσες και γλωσσες χωρις συμφραζομενα

Λημμα

Καθε κανονικη γλωσσα ειναι και γλωσσα χωρις συμφραζομενα.

Αποδειξη

Εστω L κανονικη γλωσσα.

Τοτε υπαρχει ντετερμινιστικο πεπερασμενο αυτοματο M οπου $M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$ τετοιο ωστε $L(M) = L$.

Αν θεωρησουμε τη γραμματικη $G_M = (V, \Sigma, R, S)$

οπου

$$V = K \cup \Sigma$$

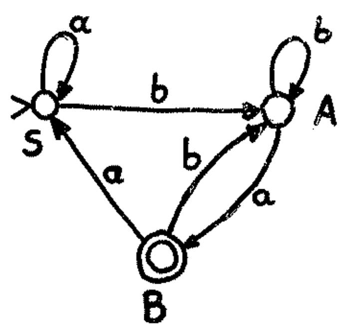
$$S = s$$

$$R = \{ q \to ap : \delta(q,a) = p \} \cup \{ q \to e : q \in F \}$$

τοτε $L(G_M) = L$. ■

Παραδειγμα

Αν M :



τοτε $G_M = (V, \{a, b\}, R, S)$

οπου $V = \{ S, A, B, a, b \}$

$$R = \{ \begin{array}{l} S \to aS \\ S \to bA \\ A \to aB \\ A \to bA \\ B \to aS \\ B \to bA \\ B \to e \end{array} \}.$$

η κανονικη
δεξια γραμμικη γραμματικη

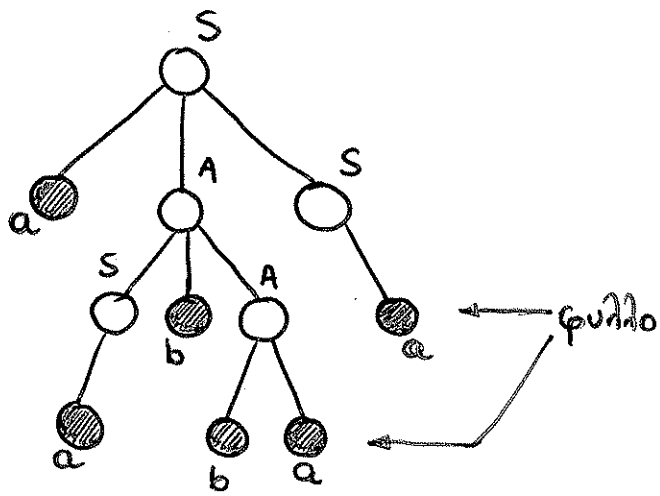
Δεντρα Παραγωγης (derivation trees)
ή Συντακτικα Δεντρα

Παραδειγμα

Εστω $G = (\{S, A, a, b\}, \{a, b\}, R, S)$

οπου $R = \{ S \rightarrow aAS,\ S \rightarrow a,$
$A \rightarrow SbA,\ A \rightarrow SS,\ A \rightarrow ba \}$

$$
\begin{aligned}
S &\Rightarrow aAS \\
&\Rightarrow aAa \\
&\Rightarrow aSbAa \\
&\Rightarrow aabAa \\
&\Rightarrow aabbaa
\end{aligned}
$$



Ενα δεντρο ειναι <u>δεντρο παραγωγης</u> για την $G(V, T, R, S)$ αν

1) Καθε κομβος του δεντρου εχει μια επιγραφη απο $V \cup \{e\}$
2) Η επιγραφη της ριζας ειναι S
3) Αν ενας εσωτερικος κομβος εχει επιγραφη A, τοτε $A \in V - T$.
4) Αν ενας εσωτερικος κομβος εχει επιγραφη A και τα παιδια του απο αριστερα προς τα δεξια εχουν επιγραφες $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τοτε το $A \rightarrow X_1 X_2 \ldots X_n$ ειναι κανονας της G.
5) Ενας κομβος με επιγραφη e ειναι φυλλο και δεν εχει αδελφια.

Αποτελεσμα (yield)

η παραθεση των επιγραφων των φυλλων απο αριστερα προς τα δεξια.

Αριστεροτερη παραγωγη (leftmost derivation)

μια παραγωγη $A \underset{G}{\Rightarrow} w_1 \underset{G}{\Rightarrow} w_2 \underset{G}{\Rightarrow} \cdots \underset{G}{\Rightarrow} w$ οπου αντικαθιστουμε την αριστεροτερη μεταβλητη στα $w_1, w_2, \ldots$

π.χ. $E \Rightarrow \underline{E}+T \Rightarrow \underline{T}+T \Rightarrow \underline{F}+T \Rightarrow id+\underline{T} \Rightarrow id+\underline{T}*F$

$\Rightarrow id+\underline{F}*F \Rightarrow id+(\underline{E})*F \Rightarrow id+(\underline{T})*F$

$\Rightarrow id+(\underline{F})*F \Rightarrow id+(id)*\underline{F} \Rightarrow id+(id)*id$

Δεξιοτερη παραγωγη (rightmost derivation)

π.χ. $E \Rightarrow E+\underline{T} \Rightarrow E+T*\underline{F} \Rightarrow E+\underline{T}*id \Rightarrow E+\underline{F}*id$

$\Rightarrow E+(\underline{E})*id \Rightarrow E+(\underline{T})*id \Rightarrow E+(\underline{F})*id \Rightarrow \underline{E}+(id)*id$

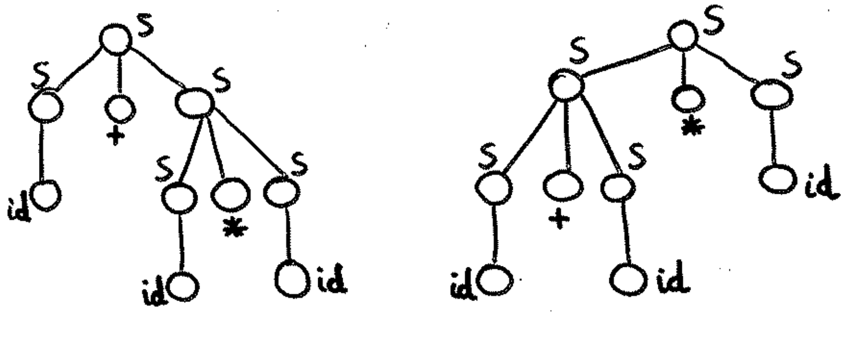
$\Rightarrow \underline{T}+(id)*id \Rightarrow \underline{F}+(id)*id \Rightarrow id+(id)*id.$

Μια γραμματικη G ειναι διφορουμενη ή ασαφης αν υπαρχουν περισσοτερα απο ενα συντακτικα δεντρα για καποια συμβολοσειρα που παραγεται απο την G.

π.χ. Εστω $G=(\{S,+,*,id\},\{+,*,id\},R,S)$

οπου $R=\{S\to S+S,\ \ S\to S*S,\ \ S\to id\}$

Τοτε για την συμβολοσειρα $id+id*id$ εχουμε:



Εγγενως διφορουμενη γλωσσα $\Leftrightarrow$ <u>καθε</u> ΓΧΣ διφορουμενη

π.χ. $\{a^n b^n c^m d^m : n\geq 1, m\geq 1\} \cup \{a^n b^m c^m d^n : n\geq 1, m\geq 1\}$