Πεπερασμενα Αυτοματα

Πεπερασμενα αυτοματα ή μηχανες πεπερασμενων καταστασεων
οι απλουστερες μηχανες : διαβαζουν την εισοδο και την αποδεχονται ή οχι.

Εφαρμογες:
- αναγνωριση λεξης-κλειδι σε προγραμμα
- ελεγχος αν κειμενο περιεχει συγκεκριμενη λεξη

Ενα ντετερμινιστικο πεπερασμενο αυτοματο περιγραφεται απο μια πεντα δα $M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$ οπου

K : πεπερασμενο συνολο καταστασεων

Σ : αλφαβητο

$s \in K$: η αρχικη κατασταση

$F \subseteq K$: το συνολο τελικων καταστασεων

δ : η συναρτηση μεταβασης που ειναι μια συναρτηση απο το $K \times \Sigma$ στο K.

Περιγραφη υπολογισμου μεσω συνολικων καταστασεων

Μια συνολικη κατασταση ειναι ενα στοιχειο (q, w) του $K \times \Sigma^*$
οπου q η τρεχουσα κατασταση του αυτοματου
και w το μερος της εισοδου που δεν εχει ακομη διαβαστει.

Μια συνολικη κατασταση (q, aw), οπου $q \in K$, $a \in \Sigma$, $w \in \Sigma^*$, παραγει (ή δινει) σε ενα βημα την (q', w) εαν $\delta(q, a) = q'$.
Γραφουμε : $(q, aw) \vdash_M (q', w)$

Μια συνολικη κατασταση (q, w) παραγει (σε 0,1,... βηματα) την (q', w'). Γραφουμε : $(q, w) \vdash_M^* (q', w')$ οπου η $\vdash_M^*$ ειναι η ανακλαστικη και μεταβατικη κλειστοτητα της $\vdash_M$.

Μια συμβολοσειρα w ειναι δεκτη απο το αυτοματο M αν και μονον αν $(s, w) \vdash_M^* (q, e)$ και $q \in F$.

Η γλωσσα που γινεται δεκτη απο το αυτοματο Μ ειναι το συνολο των συμβολοσειρων που δεχεται το Μ.

Συμβολιζεται με $L(M)$.

Παραδειγμα

Εστω Μ το ντετερμινιστικο πεπερασμενο αυτοματο (K,Σ,δ,s,F) οπου:

$K = \{q_0, q_1\}$

$\Sigma = \{a, b\}$

$s = q_0$

$F = \{q_0\}$

και δ :

q	σ	$\delta(q,\sigma)$
q_0	a	q_0
q_0	b	q_1
q_1	a	q_1
q_1	b	q_0

Τοτε: $L(M)$ ειναι το συνολο των συμβολοσειρων απο το αλφαβητο $\{a,b\}$ που εχουν αρτιο πληθος b.

π.χ. $(q_0, aabab) \vdash_M (q_0, abab)$

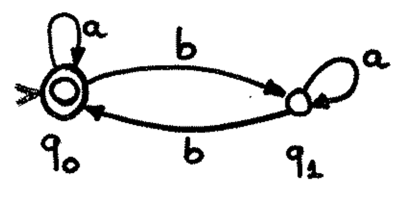
$\vdash_M (q_0, bab)$

$\vdash_M (q_1, ab)$

$\vdash_M (q_1, b)$

$\vdash_M (q_0, e)$.

Διαγραμμα μεταβασεων ή διαγραμμα καταστασεων :



Προσοχη: Η συναρτηση μεταβασης ειναι <u>συναρτηση</u>.

Παραδειγμα

Κατασκευαστε Ντ. Π. Α. που αποδεχεται τις συμβολοσειρες απο το αλφαβητο $\{0,1\}$ που περιεχουν (τουλαχιστον) ενα 1.

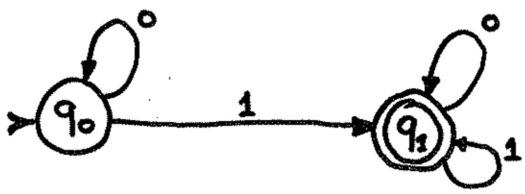
$M = \{ K, \Sigma, \delta, q_0, F \}$

οπου $\Sigma = \{0, 1\}$

$K = \{q_0, q_1\}$

$F = \{q_1\}$

δ :



ή
$$\delta(q_0, 0) = q_0$$
$$\delta(q_0, 1) = q_1$$
$$\delta(q_1, 0) = q_1$$
$$\delta(q_1, 1) = q_1$$

ή

K \ Σ	0	1
q_0	q_0	q_1
q_1	q_1	q_1

Παραδειγμα

Βρειτε Ντ. Π. Αυτοματο Μ τετοιο ωστε

$$L(M) = \{ w \in \{0,1,2\}^* : w \text{ δεν περιεχει } 1 \}$$

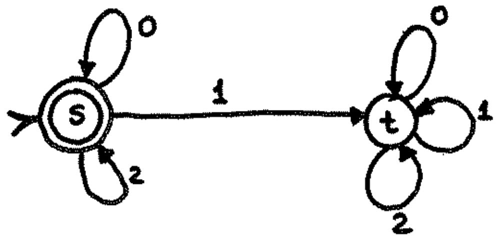
$M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$

οπου $K = \{s, t\}$

$\Sigma = \{0, 1, 2\}$

$F = \{s\}$

δ :



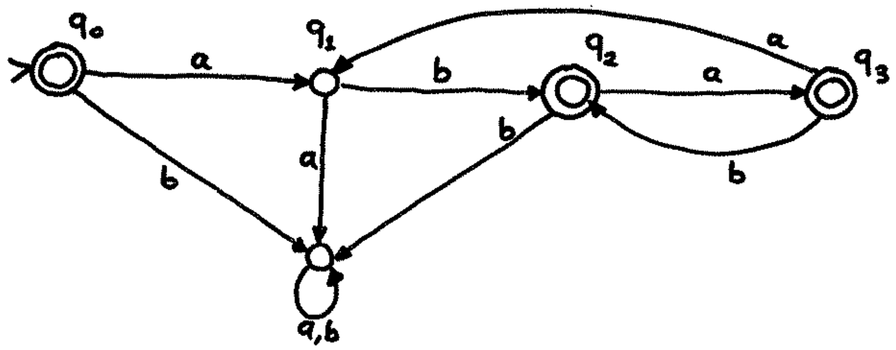
Η κατασταση t ειναι καταβοθρα (κατασταση αδιεξοδου): εαν το αυτοματο βρεθει σ'αυτην την κατασταση μενει σ' αυτην "για παντα"!

Μη ντετερμινιστικα Πεπερασμενα Αυτοματα (N.F.A.)

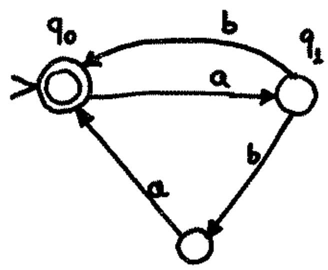
Τα μη ντετερμινιστικα πεπερασμενα αυτοματα ειναι πιο απλα στην περιγραφη τους απο ντετερμινιστικα αυτοματα για την ιδια γλωσσα.

π.χ.

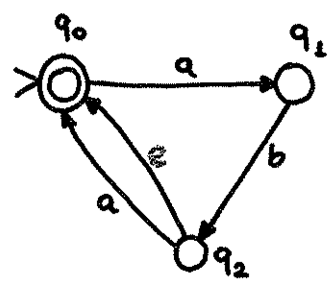
Ντετερμινιστικο αυτοματο που δεχεται την $\mathcal{L}((ab \cup aba)^*)$.



Μη ντετερμινιστικο αυτοματο που δεχεται την $\mathcal{L}((ab \cup aba)^*)$.



ή



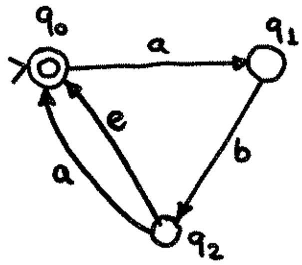
<u>Παρατηρηση</u>: Σε μη ντετερμινιστικο πεπερασμενο αυτοματο,

- μπορω να εχω 0, 1 ή περισσοτερες μεταβασεις για το ιδιο συμβολο απο καποια κατασταση,
- μπορω να εχω μεταβασεις με επιγραφη e.

Ενα μη ντετερμινιστικο πεπερασμενο αυτοματο ειναι μια πενταδα $M = (K, \Sigma, \Delta, s, F)$ οπου:

- K : ενα πεπερασμενο συνολο καταστασεων
- Σ : ενα αλφαβητο
- $s \in K$: η αρχικη κατασταση
- $F \subseteq K$: το συνολο των τελικων καταστασεων
- Δ : η σχεση μεταβασης που ειναι υποσυνολο του $K \times (\Sigma \cup \{e\}) \times K$.

Παραδειγμα



$K = \{q_0, q_1, q_2\}$

$\Sigma = \{a, b\}$

$s = q_0$

$F = \{q_0\}$

$\Delta = \{ (q_0, a, q_1),\ (q_1, b, q_2),\ (q_2, a, q_0),$
$(q_2, e, q_0) \}.$

Μια συνολικη καταστασn ειναι ενα στοιχειο του $K \times \Sigma^*$.

Η συνολικη καταστασn (q, w) παραγει σε ενα βημα την (q', w')
ανν $\exists\ u \in \Sigma \cup \{e\}$: $w = uw'$ και $(q, u, q') \in \Delta$.
Γραφουμε: $(q, w) \vdash_M (q', w')$.

$\vdash_M^*$: η ανακλαστικη και μεταβατικη κλειστοτητα της $\vdash_M$.

Μια συμβολοσειρα $w \in \Sigma^*$ γινεται δεκτη απο το μη ντ. Π. Α. Μ
ανν $\exists\ q \in F$: $(s, w) \vdash_M^* (q, e)$.

Η γλωσσα $L(M)$ που γινεται δεκτη απο το μη ντ. Π. Α. Μ
ειναι το συνολο των συμβολοσειρων που γινονται δεκτες απο το Μ.

Ισοδυναμια Ντετερμινιστικων και μη Ντετερμινιστικων Πεπερασμενων Αυτοματων

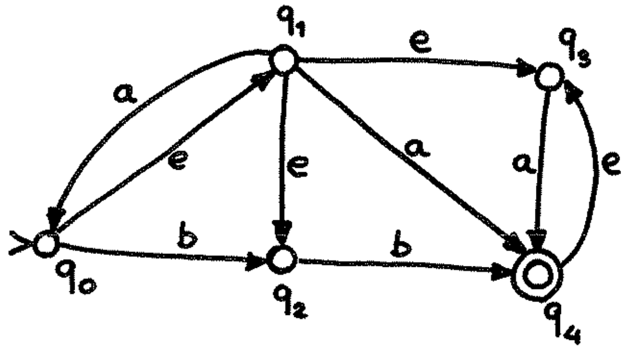
Δυο πεπερασμενα αυτοματα M_1 και M_2 ειναι ισοδυναμα αν και μονον αν $L(M_1) = L(M_2)$.

Οριζουμε ως $E(q)$ το συνολο των καταστασεων στις οποιες μπορουμε να φτασουμε απο την q χωρις να διαβαστει κανενα συμβολο απο την εισοδο:

$$E(q) = \{ p \in K : (q, e) \vdash_M^* (p, e) \}$$

δηλ. $E(q)$ ειναι το συνολο ολων των καταστασεων στις οποιες μπορουμε να φτασουμε απο την q ακολουθωντας μεταβασεις με επιγραφη e, ενω επισης $q \in E(q)$.

π.χ.



Κατασκευη

Δοθεντος μη ντετερμινιστικου πεπερ. αυτοματου $M = (K, \Sigma, \Delta, s, F)$, το ντετερμινιστικο πεπερ. αυτοματο $M' = (K', \Sigma', \delta', s', F')$, οπου

$$K' = 2^K$$
$$\Sigma' = \Sigma$$
$$s' = E(s)$$
$$F' = \{ Q \subseteq K : Q \cap F \neq \emptyset \}$$

και $\forall Q \subseteq K, \ \forall a \in \Sigma$:

$$\delta'(Q, a) = \bigcup \{ E(p) : \text{για } q \in Q, \ (q, a, p) \in \Delta \text{ οπου } p \in K \}$$

ειναι ισοδυναμο με το M.