Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
Πρόγραμμα Προπτυχιακών Σπουδών

Τμήμα Πληροφορικής
Εαρινό Εξάμηνο 2007-2008

4-44: Θεωρία Υπολογισμού

Διαφάνειες Διαλέξεων

Διδάσκων: Λεωνίδας Παληός

Φεβρουάριος 2008

ΕΛΛΑΔΑ 2008
Ανάπτυξη παντού. Ανάπτυξη για όλους.

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΕΠΕΑΕΚ

ΕΥΡΩΠΑΪΚΗ ΕΝΩΣΗ
ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Η ΠΑΙΔΕΙΑ ΣΤΗΝ ΚΟΡΥΦΗ
Επιχειρησιακό Πρόγραμμα
Εκπαίδευσης και Αρχικής
Επαγγελματικής Κατάρτισης

Διμελεις Σχεσεις

Διμελης σχεση R σε ενα συνολο S

ενα υποσυνολο του καρτεσιανου γινομενου $S \times S$

π.χ. $S = \{0, 1, 2, 3\}$

$R = \{(1,2), (1,3), (2,1), (3,1)\}$

Μια διμελης σχεση R ορισμενη στο συνολο S μπορει να εχει τις ακολουθες ιδιοτητες:

- αναклαστικη

  εαν $\forall a \in S$, $(a,a) \in R$

- αντ-ανακλαστικη

  εαν $\forall a \in S$, $(a,a) \notin R$

- μεταβατικη

  εαν $\forall (a,b) \in R$ και $(b,c) \in R$, $(a,c) \in R$

- συμμετρικη

  εαν $\forall (a,b) \in R$, $(b,a) \in R$

- αντι-συμμετρικη

  εαν $\forall (a,b) \in R$ με $a \neq b$, $(b,a) \notin R$

Κλειστοτητα μιας σχεσης R ως προς ιδιοτητα π

η "μικροτερη" σχεση που περιεχει ολα τα ζευγη της R και εχει την ιδιοτητα π

Σχεση ισοδυναμιας

μια σχεση που ειναι αναклαστικη, συμμετρικη, μεταβατικη

κλασεις ισοδυναμιας

οριζουν μια διαμεριση του συνολου στο οποιο οριζεται η σχεση ισοδυναμιας

Γλωσσες

Αλφαβητο
ενα πεπερασμενο συνολο απο συμβολα

Συμβολοσειρα
μια πεπερασμενη ακολουθια απο συμβολα του αλφαβητου
π.χ. 10110, 000, 1 ειναι συμβολοσειρες στο αλφαβητο $\{0,1\}$

Μηκος συμβολοσειρας $|w|$
το πληθος συμβολων της συμβολοσειρας w

Κενη συμβολοσειρα e
η συμβολοσειρα με 0 συμβολα (δηλ., $|e|=0$)

Παραθεση δυο συμβολοσειρων $a_1a_2\cdots a_m$ και $b_1b_2\cdots b_n$
η συμβολοσειρα $a_1a_2\cdots a_m b_1 b_2\cdots b_n$

Σημειωση: $ew = we = w \quad \forall$ συμβολοσειρα w

Παραθεση δυο συνολων A και B απο συμβολοσειρες
$AB = \{ uw \mid \forall u \in A \text{ και } \forall w \in B \}$

π.χ. $\{a, b, ab\}\{c, bc\} = \{ac, abc, bc, bbc, abbc\}$

υποσυμβολοσειρα
η συμβολοσειρα x ειναι υποσυμβολοσειρα της y
εαν υπαρχουν συμβολοσειρες u, w : $y = uxw$

Η συμβολοσειρα x ειναι **προθεμα** της y
εαν υπαρχει συμβολοσειρα u : $y = xu$

Η συμβολοσειρα x ειναι **καταληξη** της y
εαν υπαρχει συμβολοσειρα u : $y = ux$

Η αντίστροφη μιας συμβολοσειράς w (συμβολίζεται με w^R) είναι η συμβολοσειρά "διαβασμένη από το τέλος προς την αρχή"

π.χ. $reverse^R$ = esrever

Kleene-star A^* ενός συνόλου A

$$A^* = A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup \cdots \cup A^k \cup \cdots$$

$$= \{e\} \cup A \cup AA \cup \cdots \cup \underbrace{AA\cdots A}_{\text{παράθεση } k \text{ συνόλων}}$$

Σημείωση: Για αλφάβητο Σ,

- Σ^k = σύνολο <u>όλων</u> των συμβολοσειρών μήκους k
- Σ^* = σύνολο <u>όλων</u> των δυνατών συμβολοσειρών

Γλώσσα L (με αλφάβητο Σ)

ένα υποσύνολο του συνόλου Σ^*

π.χ. L_1 = { w | w είναι δυαδικός αριθμός που ξεκινά με 1 }

= { 1, 10, 11, 100, ... }

(Αλφάβητο $\Sigma = \{0,1\}$)

L_2 = { w | w είναι κωδικός υπολογιστή φοιτητή του Τμήματος Πληροφορικής του Π. Ι. }

(Αλφάβητο $\Sigma = \{c, s, t, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$)

Λεξικογραφική απαρίθμηση

π.χ. { 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, 011, 100, ... }

Θετική κλειστότητα A^+ ενός συνόλου A

$$A^+ = A^1 \cup A^2 \cup \cdots \cup A^k \cup \cdots$$

Σημείωση: $e \in A^+$ αν και μόνον αν $e \in A$

Πεπερασμενη αναπαρασταση γλωσσων

- Το συνολο Σ^* των συμβολοσειρων με συμβολα απο ενα (μετρησιμα απειρο) αλφαβητο Σ ειναι μετρησιμα απειρο.
- Το συνολο 2^{Σ^*} ολων των δυνατων γλωσσων σε ενα (μετρησιμα απειρο) αλφαβητο Σ <u>δεν</u> ειναι μετρησιμα απειρο.

$\Longrightarrow$ δεν μπορουμε να αναπαραστησουμε ολες τις γλωσσες με πεπερασμενο τροπο.

Κανονικες εκφρασεις

Οι κανονικες εκφρασεις στο αλφαβητο Σ ειναι ολες οι συμβολοσειρες απο το αλφαβητο $\Sigma \cup \{(,), \emptyset, \cup, *\}$:

(1) $\emptyset$ και καθε στοιχειο του Σ δηλωνουν κανονικη εκφραση

(2) Αν a και b ειναι κανονικες εκφρασεις τοτε ειναι και η (ab)

(3) -"- -"- -"- -"- -"- -"- -"- -"- -"- -"- -"- $(a \cup b)$

(4) Αν a ειναι κανονικη εκφραση τοτε ειναι και η a^*

(5) Μονον ο,τι προκυπτει απο τους κανονες (1)-(4) ειναι κανονικη εκφραση.

Καθε κανονικη εκφραση αναπαριστα μια γλωσσα.
Συγκεκριμενα :

(1) $\mathcal{L}(\emptyset) = \emptyset$ και $\mathcal{L}(a) = \{a\}$ $\forall a \in \Sigma$.

(2) $\mathcal{L}((ab)) = \mathcal{L}(a)\,\mathcal{L}(b)$. (παραθεση)

(3) $\mathcal{L}((a \cup b)) = \mathcal{L}(a) \cup \mathcal{L}(b)$. (ενωση)

(4) $\mathcal{L}(a^*) = (\mathcal{L}(a))^*$. (kleene - star)

<u>Παρατηρηση</u>

$$\mathcal{L}(\emptyset^*) = \{e\}.$$

Παραδειγματα

Εστω $\Sigma = \{0, 1\}$.

- $r_1 = (0 \cup 1) \rightarrow$ οι συμβολοσειρες 0 και 1
- $r_2 = (0 \cup 1)^* \rightarrow$ ολες οι συμβολοσειρες απο 0, 1
- $r_3 = ((0 \cup 1)^* ((0 1) (0 \cup 1)^*))$

  $\hookrightarrow$ δυαδικες συμβολοσειρες που περιεχουν το 01
- $r_4 = (0^* 1^*)$
- Η συμβολοσειρα 11010110011 ανηκει στην $\mathcal{L}((1 \cup (10))^*)$;
- $r_5 = (0^* 1^*)^*$
- Ποια ειναι η $\mathcal{L}(((0 \cup 1)^* 0))$;
- Ποια ειναι η $\mathcal{L}((c^* (a \cup (b c^*))^*))$ στο $\Sigma = \{a, b, c\}$;

Μπορουμε να αποφυγουμε αρκετες παρενθεσεις εαν χρησιμοποιησουμε τη συμβαση

$$\text{Kleene-star } (*) > \text{παραθεση} > \text{ενωση } (\cup)$$

π.χ. $01^* = (0(1^*))$ $\qquad 1 \cup 10 = (1 \cup (10))$

Επισης, για την παραθεση εχουμε

$$((r_1 r_2) r_3) = (r_1 (r_2 r_3)) = r_1 r_2 r_3$$

π.χ. $(((0 \cup 1)^* (0 1)) (0 \cup 1)^*) = (0 \cup 1)^* 0 1 (0 \cup 1)^*$

Παραδειγμα

Για τη γλωσσα $L = \{ w \mid w \in \{0,1\}^*$ και η w εχει 2 ή 3 εμφανισεις του 1, απο τις οποιες η 1η και η 2η δεν ειναι συνεχομενες $\}$

$$\begin{aligned} r &= 0^* 1 0^* 0 1 0^* \\ &\quad \cup 0^* 1 0^* 0 1 0^* 1 0^* \\ &= 0^* 1 0^* 0 1 0^* (1 0^* \cup \emptyset^*). \end{aligned}$$

Η κλαση των κανονικων γλωσσων σε ενα αλφαβητο Σ οριζεται να αποτελειται απο ολες τις γλωσσες L τετοιες ωστε $L = \mathcal{L}(r)$ για καποια κανονικη εκφραση r στο Σ.

- Μηχανες αναγνωρισης γλωσσων
- Παραγωγοι γλωσσων

<u>Παρατηρησεις</u>

- Καθε πεπερασμενη γλωσσα αναπαρισταται με μια κανονικη εκφραση.

  Απλα παιρνουμε την ενωση των κανονικων εκφρασεων των συμβολοσειρων της.

  $\Longrightarrow$ καθε πεπερασμενη γλωσσα ειναι κανονικη.

- Για να δειξουμε οτι μια γλωσσα L ειναι η γλωσσα που αναπαριστα μια κανονικη εκφραση r πρεπει:
  - να δειξουμε οτι καθε συμβολοσειρα της L περιγραφεται απο την r <u>και</u>
  - να δειξουμε οτι καθε συμβολοσειρα που περιγραφεται απο την r ανηκει στην L.

π.χ.

(1) $L = \{ w \mid w \in \{0,1\}^*$ και το πληθος των 1 στην w ειναι πολλαπλασιο του 3 $\}$

$$r = 0^* (1 0^* 1 0^* 1 0^*)^*$$

(2) Η γλωσσα που παριστα η $r' = (0^* 1 0^* 1 0^* 1 0^*)^*$ ειναι η L της περιπτωσης (1);