ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
Μάθημα: **Σήματα και Συστήματα**
Διδάσκων: Χ. Νίκου

Σειρά Ασκήσεων 4

Παράδοση: 15 Δεκεμβρίου 2005 (στο μάθημα)

Άσκηση 1 (20%)

Να υπολογιστούν οι αμφίπλευροι μετασχηματισμοί Z των σημάτων:

α) $x_1(n) = (1+n)u(n)$, **β)** $x_2(n) = (-1)^n 2^{-n} u(n)$,

γ) $x_3(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^n & , \ n \geq 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} & , \ n < 0 \end{cases}$, **δ)** $x_4(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^n - 2^n & , \ n \geq 0 \\ 0 & , \ n < 0 \end{cases}$

ε) $x_5(n) = n^2 u(n)$

Άσκηση 2 (10%)

Να υπολογιστούν οι αιτιατές ακολουθίες $x(n)$ που έχουν μετασχηματισμό Z:

$$X_1(z) = \frac{1}{z^2 - 1.2z + 0.2}, \qquad X_2(z) = \frac{1+3z^{-1}}{1+3z^{-1}+2z^{-2}}$$

Άσκηση 3 (30%)

Να υπολογιστούν οι συνελίξεις $x_1(n) * x_2(n)$:

α) $x_1(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n-1), \quad x_2(n) = \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] u(n).$

β) $x_1(n) = u(n), \quad x_2(n) = \delta(n) + \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n).$

γ) $x_1(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n), \quad x_2(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\cos\frac{\pi}{3} n\right) u(n).$

Άσκηση 4 (15%)

Έστω το σύστημα που περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(z) = \frac{z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}{1 - \frac{3}{5}z^{-1} + \frac{2}{25}z^{-2}}$$

Να υπολογιστεί η έξοδος του συστήματος για είσοδο $x(n) = u(n)$, αν $y(-2) = 2$ και $y(-1) = 1$. Να διαχωριστούν η απόκριση μηδενικής κατάστασης και η απόκριση μηδενικής εισόδου.

Άσκηση 5 (25%)

Να υπολογιστεί η απόκριση $y(n)$ των συστημάτων που περιγράφονται από τις παρακάτω εξισώσεις διαφορών:

α) $y(n) = \frac{1}{4}y(n-2) + x(n), \quad x(n) = u(n), \quad y(-1) = 0, \quad y(-2) = 1.$

β) $y(n) = -y(n-2) + 10x(n), \quad x(n) = 10\left(\cos\frac{\pi}{2}n\right)u(n), \quad y(-1) = y(-2) = 0.$

ΣΕΙΡΑ 4

Άσκηση 1

a) $X_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (1+n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} n z^{-n}$

$$\left.\begin{aligned} Z\{1\} &= \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad |z|>1 \\ Z\{n\,u(n)\} &= \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}, \quad |z|>1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$X_1(z) = \frac{1-z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} + \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \frac{1}{(1-z^{-1})^2}$$

β) $X_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z|>\frac{1}{2}$

γ) $X_3(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{0} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} - 1$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^n - 1 \quad \text{με } \frac{1}{3}<|z|<2$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - 1 = \frac{5/6}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z\right)}$$

δ) $X_4(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n z^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{-n}$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{1}{1-2z^{-1}} = -\frac{5/3 \; z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-2z^{-1}\right)}$$

με $|z|>2$

ε) $X_5(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^{-n} = z^2 \frac{d^2}{dz^2} \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}$

$$= z^2 \frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right) = \frac{z^{-1}\left(1+z^{-1}\right)}{\left(1-z^{-1}\right)^3}, \quad |z|>1$$

Άσκηση 2

a) $X(z) = \dfrac{1}{z^2 - 1,2z + 0,2} = \dfrac{1}{(z-1)(z-0,2)} \Leftrightarrow$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{z(z-1)(z-0,2)} = \frac{k_1}{z} + \frac{k_2}{z-1} + \frac{k_3}{z-0,2}$$

$$k_1 = \left.\frac{1}{(z-1)(z-0,2)}\right|_{z=0} = 5$$

$$k_2 = \left.\frac{1}{z(z-0,2)}\right|_{z=1} = 1,25$$

$$k_3 = \left.\frac{1}{z(z-1)}\right|_{z=0,2} = -6,25$$

$$Y(z) = 5 + 1,25\,\frac{z}{z-1} - 6,25\,\frac{z}{z-0,2}$$

$$\Leftrightarrow \; y(n) = 5\delta(n) + 1,25 - 6,25 \cdot (0,2)^n \;, \; n \geq 0$$

β) $X(z) = \dfrac{1+3z^{-1}}{1+3z^{-1}+2z^{-2}} = \dfrac{A}{1+z^{-1}} + \dfrac{B}{1+2z^{-1}}$

$\Leftrightarrow \ldots \quad A = 2, \quad B = 1:$

$$x(n) = \left[2(-1)^n - (-2)^n\right] u(n)$$

Άσκηση 3

α) $x_1(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n-1) \Leftrightarrow X_1(z) = \dfrac{(1/4)z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} \quad |z| > \frac{1}{4}$

$x_2(n) = \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] u(n)$

$\Leftrightarrow X_2(z) = \dfrac{1}{1-z^{-1}} + \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > 1$

$Y(z) = X_1(z)X_2(z) = \ldots = \dfrac{-\frac{4}{3}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \dfrac{1/3}{1-z^{-1}} + \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$

$\Leftrightarrow y(n) = \left[\frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] u(n)$

β) $x_1(n) = u(n) \Leftrightarrow X_1(z) = \dfrac{1}{1-z^{-1}}$

$x_2(n) = \delta(n) + \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \Leftrightarrow X_2(z) = 1 + \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$

$$Y(z) = X_1(z)\,X_2(z) = \dots = \frac{3}{1-z^{-1}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$\Leftrightarrow \quad y(n) = \left[3 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] u(n)$$

γ) $x_1(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) \Leftrightarrow X_1(z) = \dfrac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$

$x_2(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\frac{\pi n}{3}\, u(n) \Leftrightarrow X_2(z) = \dfrac{1-\frac{1}{4}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}}$

$$Y(z) = X_1(z)\,X_2(z) = \dots =$$

$$= \frac{1-\frac{1}{4}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}\right)} =$$

$$= \dots = \frac{1}{7}\,\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{6}{7}\,\frac{1-\frac{1}{4}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}}$$

$$+ \frac{3\sqrt{3}}{7} \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}} \quad \Leftrightarrow$$

$$y(n) = \left[\frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{6}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\frac{\pi n}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^n \sin\frac{\pi n}{3}\right] u(n)$$

Άσκηση 4

$$H(z) = \frac{z^{-1} + \frac{1}{2} z^{-2}}{1 - \frac{3}{5} z^{-1} + \frac{2}{25} z^{-2}}$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) \Leftrightarrow Y(z) - \frac{3}{5} z^{-1} Y(z) + \frac{2}{25} z^{-2} Y(z)$$

$$= X(z) z^{-1} + \frac{1}{2} X(z) z^{-2}$$

$$\Leftrightarrow y(n) - \frac{3}{5} y(n-1) + \frac{2}{25} y(n-2) = x(n-1) + \frac{1}{2} x(n-2)$$

$$H(z) = z^{-1} \left[\frac{-7/2}{1 - \frac{1}{5} z^{-1}} + \frac{9/2}{1 - \frac{2}{5} z^{-1}} \right] \Leftrightarrow$$

$$h(n) = \left[-\frac{7}{2} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{9}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} \right] u(n-1)$$

Μηδενική κατάσταση ⟶ Αρχ. Συνθήκες μηδέν!

$$Y(z) = H(z) X(z) \quad \text{με} \quad X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Y(z) = \dots = \frac{25/8}{1 - z^{-1}} + \frac{7/8}{1 - \frac{1}{5} z^{-1}} + \frac{-3}{1 - \frac{2}{5} z^{-1}}$$

$$\Leftrightarrow y_0(n) = \left[\frac{25}{8} + \frac{7}{8} \left(\frac{1}{5}\right)^n - 3 \left(\frac{2}{5}\right)^n \right] u(n)$$

Μηδενική είσοδος :

7

$$y(n) - \frac{3}{5} y(n-1) + \frac{2}{25} y(n-2) = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ Μονόπλευρος Z για να εισάγουμε αρχικές συνθήκες:

$$Y(z) - \frac{3}{5}\left[Y(z) \cdot z^{-1} + 1\right] + \frac{2}{25}\left[Y(z) \cdot z^{-2} + z^{-1} + 2\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad Y(z) = \frac{2/25\, z^{-1} - 11/25}{\left(1 - \frac{1}{5} z^{-1}\right)\left(1 - \frac{2}{5} z^{-1}\right)} = - - -$$

$$= \frac{1/25}{1 - \frac{1}{5} z^{-1}} + \frac{-12/25}{1 - \frac{2}{5} z^{-1}} \Leftrightarrow$$

$$y_i(n) = \left[\frac{1}{25}\left(\frac{1}{5}\right)^n - \frac{12}{25}\left(\frac{2}{5}\right)^n\right] u(n)$$

Συνολικά $\quad y(n) = y_i(n) + y_o(n)$

$$= \left[\frac{25}{8} + \frac{33}{200}\left(\frac{1}{5}\right)^n - \frac{87}{25}\left(\frac{2}{5}\right)^n\right] u(n)$$

ΑΣΚΗΣΗ 5

α) $y(n) = \frac{1}{4}\, y(n-2) + x(n)\ ,\quad x(n) = u(n)\ ,\ y(-1) = 0,\ y(-2) = 1$

$$Y(z) = \frac{1}{4}\left[z^{-2}Y(z) + 1\right] + \frac{1}{1-z^{-1}} \Leftrightarrow$$

$$Y(z) = \frac{5/4 - 1/4\ z^{-1}}{(1-z^{-1})\ (1-\frac{1}{4}z^{-1})} = \frac{4/3}{1-z^{-1}} + \frac{-3/8}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{7/24}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$\Leftrightarrow y(n) = \left[\frac{4}{3} - \frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{7}{24}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] u(n)$$

β) $y(n) = -y(n-2) + 10\ x(n)$ με Α.Σ $= \emptyset$ και $x(n) = 10\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)u(n)$

$$X(z) = \frac{1 - z^{-1}\cos\frac{\pi}{2}}{1 - 2z^{-1}\cos\frac{\pi}{2} + z^{-2}} = \frac{10}{1+z^{-2}}$$

$$H(z) = \frac{10}{1+z^{-2}} \Leftrightarrow Y(z) = \frac{10}{1+z^{-2}} \cdot \frac{10}{1+z^{-2}} = \frac{100}{(1+z^{-2})^2}$$

$$= \cdots = \frac{50}{1+jz^{-1}} + \frac{50}{1-jz^{-1}} + \frac{-25jz^{-1}}{(1+jz^{-1})^2} + \frac{25jz^{-1}}{(1-jz^{-1})^2}$$

c) $y(n) = \{ 50[j^n + (-j)^n] - 25n[j^n + (-j)^n] \} u(n)$

$= (50 - 25n)[j^n + (-j)^n] u(n)$

$= (50 - 25^n) \cdot 2\cos \frac{\pi n}{2} u(n)$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
Μάθημα: **Σήματα και Συστήματα**
Διδάσκων: Χ. Νίκου

Σειρά Ασκήσεων 5

Παράδοση: 9 Ιανουαρίου 2005 (στο μάθημα)

Άσκηση 1 (20%)

Έστω τα σήματα $g(n) = \{1, -1, 2, 3\}$ και $h(n) = \{-1, 0, 2\}$. Υπολογίστε την γραμμική συνέλιξη $f(n) = g(n) * h(n)$ με τη βοήθεια των DFTs των σημάτων που θα υπολογίσετε με χρήση πίνακα συντελεστών.

Άσκηση 2 (20%)

Αν το σήμα $x(n)$, με $0 \leq n \leq N$, έχει DFT τον $X(k)$, με $0 \leq k \leq N$, να υπολογιστεί ο DFT $2N$ σημείων του σήματος

$$y(n) = \begin{cases} x\left(\frac{n}{2}\right), & n = 0, 2, \ldots, 2N \\ 0, & n = 1, 3, \ldots, 2N-1 \end{cases}$$

ως συνάρτηση του $X(k)$.

Άσκηση 3 (20%)

Ένα ΓΧΑ σύστημα με είσοδο το σήμα $x(n)$ και έξοδο το σήμα $y(n)$ περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών $y(n) = x(n) + x(n-10)$.

α) Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί η απόκριση συχνοτήτων του συστήματος.

β) Να υπολογιστεί η έξοδος του συστήματος για τις εισόδους:

$$x(n) = \cos\frac{\pi}{10}n + 3\sin\left(\frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{10}\right)$$

και

$$x(n) = 10 + 5\cos\left(\frac{2\pi}{5}n + \frac{\pi}{2}\right).$$

Άσκηση 4 (20%)

α) Ένα σήμα διακριτού χρόνου $x(n)$ έχει μετασχηματισμό Fourier $X(e^{j\omega}) = 0$, για $\frac{3\pi}{4} \le |\omega| \le \pi$. Το σήμα μετατρέπεται σε σήμα συνεχούς χρόνου με παρεμβολή:

$$x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) sinc\left(\frac{t - nT}{T}\right)$$

όπου $T = 10^{-3} sec$. Να προσδιοριστεί το διάστημα στο οποίο ο μετασχηματισμός Fourier του $x_c(t)$ είναι σίγουρα μηδενικός.

β) Ένα σήμα συνεχούς χρόνου $x_c(t)$ έχει μετασχηματισμό Fourier $X_c(\Omega) = 0$ για $|\Omega| \ge 2000\pi$. Με δειγματοληψία του $x_c(t)$ προκύπτει το σήμα διακριτού χρόνου

$$x(n) = x_c(0.5 \times 10^{-3} n)$$

α) Λαμβάνοντας υπόψη κάθε πρόταση που ακολουθεί σχετικά με το μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου $X(e^{j\omega})$ του σήματος $x(n)$, να γραφεί η αντίστοιχη πρόταση για τον $X_c(\Omega) = 0$:

i) ο $X(e^{j\omega})$ είναι πραγματικός.

ii) η μέγιστη τιμή του $X(e^{j\omega})$ είναι 1.

iii) $X(e^{j\omega}) = 0$ για $\frac{3\pi}{4} \le |\omega| \le \pi$.

iv) $X(e^{j\omega}) = X\left(e^{j(\omega-\pi)}\right)$

Άσκηση 5 (20%)

α) Δίνονται τα πεπερασμένου μήκους σήματα $x(n) = \{3, -1, 1, 2, -1, 0\}$ και $x_1(n) = \{-1, 0, 3, -1, 1, 2\}$. Οι DFTs των παραπάνω σημάτων συνδέονται από τη σχέση $X_1(k) = X(k)e^{-j2\pi km/6}$. Να υπολογιστεί η τιμή του m.

β) Δίνονται τα πεπερασμένου μήκους σήματα $x(n) = \{2, -1, 0, c, 1\}$ και $x_1(n) = \{2, 1, 2, -1, 0\}$. Οι DFTs των παραπάνω σημάτων συνδέονται από τη σχέση $X_1(k) = X(k)e^{-j2\pi 3k/5}$, όπου $X(k)$ είναι ο 5-σημείων DFT της $x(n)$. Να υπολογιστεί η τιμή του c.

γ) Δίνονται τα πεπερασμένου μήκους σήματα $x(n) = \{1, -1, 1, 0, 0\}$ και $x_1(n) = \{1, 0, 0, 1, -1\}$. Οι N-σημείων DFTs των παραπάνω σημάτων συνδέονται από τη σχέση $X_1(k) = X(k)e^{j2\pi k2/N}$. Να υπολογιστεί η τιμή του N.

δ) Δίνονται τα πεπερασμένου μήκους σήματα $x_1(n) = \{1, 0, 2, 1\}$ και $x_2(n) = \{0, 1, 0, c\}$ και η κυκλική τους συνέλιξη $y(n) = \{1, -1, -1, 1\}$. Να υπολογιστεί η τιμή του c.

Άσκηση 1 ΣΕΙΡΑ 5

$$A_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} & -1-j & -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} + j\sqrt{3}/2 & 1-j & -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} & 1+j & -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} & -1+j & -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

2

$$\tilde{f}(n) = \{1, -1, 2, 3, 0, 0\}, \quad \tilde{h}(n) = \{-1, 0, 2, 0, 0, 0\}$$

$$\tilde{F}(k) = A\tilde{f} = \left[5 \quad -3{,}5 - \frac{\sqrt{3}}{2}j \quad \frac{7}{2} + 2{,}6j \quad 1 \quad \frac{7}{2} - 2{,}6j \quad -\frac{7}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j\right]^T$$

$$\tilde{H}(k) = A\tilde{h} = \left[1 \quad -2 - j1{,}73 \quad -2 + j1{,}73 \quad 1 \quad -2 - j1{,}73 \quad -2 + j1{,}73\right]^T$$

$$\tilde{G}(k) = \tilde{F}(k) \cdot \tilde{H}(k) = \left[5 \quad 5{,}5 + j7{,}8 \quad -11{,}5 + j\frac{\sqrt{3}}{2} \quad 1 \quad -11{,}5 - j\frac{\sqrt{3}}{2} \quad 5{,}5 - j7{,}8\right]$$

$$\tilde{g}(n) = DFT^{-1}\{\tilde{G}(k)\} = A^{-1}\tilde{G}(k) = \{-1, 1, 0, -5, 4, 6\}$$

$\overline{\underline{}}$

Άσκηση 2

$$Y(k) = \sum_{n=0}^{2N-1} y(n) W_{2N}^{kn} \quad , \quad k = 0, \ldots 2N-1$$

$$= \sum_{n \text{ άρτιο}}^{2N-1} y(n) W_{2N}^{kn} = \sum_{m=0}^{N-1} y(2m) W_N^{km}$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} x(m) W_N^{km} = X(k) \quad \text{για} \quad k \in [0, 2N-1]$$

ή $$Y(k) = \begin{cases} X(k) & , \quad k \in [0, N-1] \\ X(k-N), & k \in [N, 2N-1] \end{cases}$$ λόγω της περιοδικότητας του DFT

Άσκηση 3

) $y(n) = x(n) + x(n-10) \Leftrightarrow Y(e^{jw}) = X(e^{jw}) [1 + e^{-j10w}]$

$$\Leftrightarrow H(w) = \frac{Y(e^{jw})}{X(e^{jw})} = 1 + e^{-j10w}$$

$$= 1 + \cos(-10w) + j \sin(-10w) =$$

$$= 1 + \cos(10w) - j \sin(10w)$$

(5)

$$|H(\omega)|^2 = (1+\cos 10\omega)^2 + \sin^2 10\omega =$$

$$= 1+\cos^2 10\omega + 2\cos 10\omega + \sin^2 10\omega$$

$$= 2 + 2\cos 10\omega = 2 + 2(2\cos^2 5\omega - 1)$$

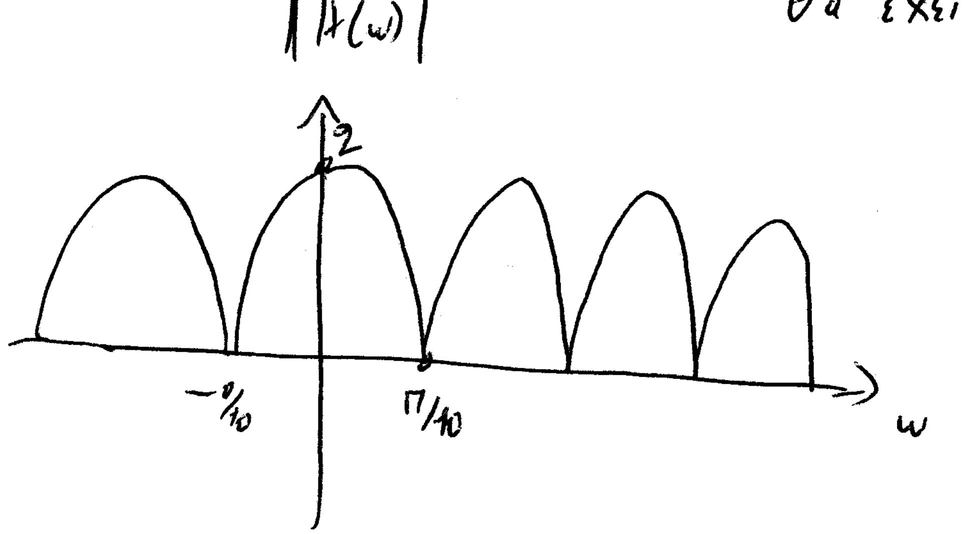
$$= 4\cos^2 5\omega$$

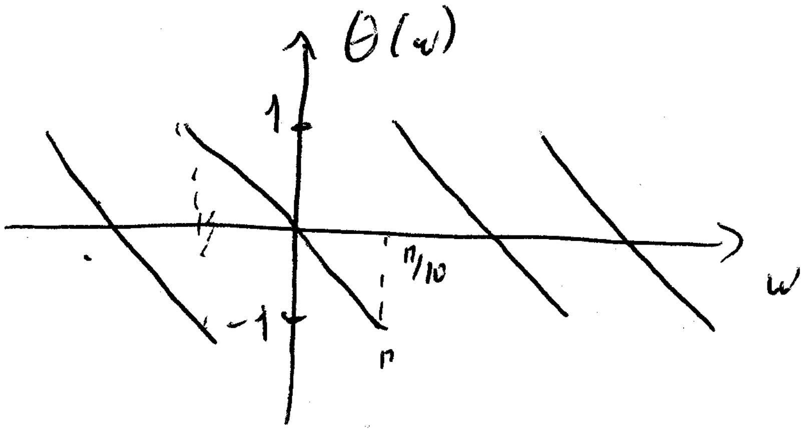
ε) $|H(\omega)| = 2|\cos(5\omega)|$

$\boxed{\Theta(\omega) = -5\omega}$ ως άθροισμα $1+e^{-j10\omega} =$

$= 1^{\angle 0^\circ} + 1^{\angle -10\omega}$

θα έχει φάση -5ω





в) $H\left(\frac{\pi}{10}\right) = 0$

$$H\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\frac{5\pi}{3}\, e^{-j\frac{5\pi}{3}}$$

$$y(n) = 6\cos\frac{5\pi}{3}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{10} - \frac{5\pi}{3}\right)$$

$$= 6\cos\frac{5\pi}{3}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}n - \frac{47\pi}{60}\right)$$

$H(0) = 2$

$H\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 2$

$$y(n) = 20 + 10\cos\left(\frac{2\pi n}{5} + \frac{\pi}{2}\right)$$

Άσκηση 4

1) $T = 10^{-3}$ sec είναι η περίοδος δειγματοληψίας

$F_s = 10^3$ Hz $\Leftrightarrow$ $\omega_s = 2\pi \cdot 10^3$ rad/sec $= 2000\pi$ rad/sec

Άρα το ω_{max} του σήματος συνεχούς χρόνου είναι

$$\omega_{max} = \frac{\omega_s}{2} = 1000\pi \text{ rad/sec}$$

Επειδή στο σήμα διακριτού χρόνου είναι $X(e^{j\omega}) = 0$

για $\omega \geq \frac{3\pi}{4}$ $\Leftrightarrow$ $X_c(\Omega) = 0$ για $\Omega \geq 1000\pi \cdot \frac{3}{4}$

ή $X_c(\Omega) = 0$, $750\pi \leq |\Omega| \leq 1000\pi$

2)

(i) Ο $X_c(\Omega)$ είναι πραγματικός

(ii) $Max[X_c(\Omega)] = 0,5 \cdot 10^{-3}$

(iii) $X_c(\Omega) = 0$ για $|\Omega| \geq 1500\pi$

(iv) $X_c(\Omega) = X_c(\Omega - 2000\pi)$

Άσκηση 5

α) Από τις γραφικές αναπαραστάσεις των σημάτων προκύπτει ότι $m = 2 + 6\cdot\ell$, για ακέραιους ℓ.

β) Παρόμοια φαίνεται ότι $c = 2$

γ) $N = 5$

δ) $a = -1$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
Μάθημα: **Σήματα και Συστήματα**
Παν. έτος 2006-2007
Διδάσκων: Χ. Νίκου

Σειρά Ασκήσεων 3

Παράδοση: 11 Ιανουαρίου 2007 (10.00-12.00, γραφείο Α5)

Άσκηση 1 (20%)

Άσκηση 5 από το βιβλίο (σελ. 303).

Άσκηση 2 (20%)

Άσκηση 6 από το βιβλίο (σελ. 303).

Άσκηση 3 (20%)

α) Άσκηση 7 από το βιβλίο (σελ. 304).
β) Άσκηση 8 από το βιβλίο (σελ. 304).

Άσκηση 4 (20%)

Ένα σύστημα διακριτού χρόνου με είσοδο το σήμα $x(n)$ και έξοδο το σήμα $y(n)$ περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(z) = \frac{-z^{-1} + \frac{2}{11}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{16}z^{-2}}$$

Να βρεθεί η απόκριση μηδενικής κατάστασης καθώς και η απόκριση μηδενικής εισόδου αν $x(n) = u(n)$, $y(-2) = 1$ και $y(-1) = 2$.

Άσκηση 5 (20%)

Να υπολογιστεί η απόκριση $y(n)$ των συστημάτων που περιγράφονται από τις παρακάτω εξισώσεις διαφορών:

α) $y(n) = \frac{1}{3}y(n-2) + x(n), \quad x(n) = u(n), \quad y(-1) = 0, \quad y(-2) = -1.$

β) $y(n) = -y(n-1) + 2x(n), \quad x(n) = \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)u(n), \quad y(-1) = y(-2) = 0.$

Άσκηση 1

a) άσκηση 5 (a): $y(n) + 3y(n-1) = x(n)$, $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$, $y(-1) = 2$

$$Y(z) + 3z^{-1}\left[Y(z) + y(-1)z\right] = X(z)$$

$$\Rightarrow Y(z) + 3z^{-1}Y(z) + 3z^{-1}\cdot 2 = \frac{z}{z - \frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow Y(z) = \frac{z\left(\frac{3}{2} - 2z\right)}{\left(z - \frac{1}{2}\right)(z+3)}$$

$$\Rightarrow \frac{Y(z)}{z} = \frac{\frac{3}{2} - 2z}{\left(z - \frac{1}{2}\right)(z+3)} = \frac{A_1}{z - 1/2} + \frac{A_2}{z+3}$$

$$A_1 = \left.\frac{\frac{3}{2} - 2z}{z+3}\right|_{z=1/2} = \frac{1}{7}, \quad A_2 = \left.\frac{\frac{3}{2} - 2z}{z - \frac{1}{2}}\right|_{z=-3} = -\frac{15}{7}$$

Άρα $Y(z) = \frac{1}{7}\frac{z}{z - 1/2} - \frac{15}{7}\frac{z}{z+3}$

$$\Rightarrow y(n) = \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - \frac{15}{7}\, 3^n u(n)$$

β) άσκηση 5(β): $y(n) - \frac{1}{2} y(n-1) = x(n) - \frac{1}{2} x(n-1)$

$x(n) = u(n)$, $y(-1) = 0$

$$Y(z) - \frac{1}{2} z^{-1} Y(z) = X(z) - \frac{1}{2} z^{-1} X(z)$$

$$\Leftrightarrow Y(z)\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right) = \frac{z}{z-1} - \frac{1}{2} z^{-1} \frac{z}{z-1}$$

$$\Leftrightarrow Y(z) = \frac{z\,(z - 1/2)}{(z - 1/2)(z-1)} \Leftrightarrow Y(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$\Leftrightarrow y(n) = u(n)$$

γ) άσκηση 5(γ): $y(n) - \frac{1}{2} y(n-1) = x(n) - \frac{1}{2} x(n-1)$

$x(n) = u(n)$, $y(-1) = 1$

$$Y(z) - \frac{1}{2}\left[z^{-1} Y(z) + y(-1)\right] = X(z) - \frac{1}{2} z^{-1} X(z)$$

$$\Leftrightarrow Y(z) - \frac{1}{2} z^{-1} Y(z) + 1 = \frac{z}{z-1} - \frac{1}{2} z^{-1} \frac{z}{z-1}$$

$$\Leftrightarrow Y(z) = \frac{\frac{1}{2} z}{(z - 1/2)(z-1)} \quad \Leftrightarrow \frac{Y(z)}{z} = \frac{A_1}{z - 1/2} + \frac{A_2}{z-1}$$

$$A_1 = -1, \quad A_2 = 1 \quad \Leftrightarrow Y(z) = \frac{-z}{z - 1/2} + \frac{z}{z-1}$$

$$y(n) = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + u(n) = \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] u(n)$$

Άσκηση 2 (άσκηση 6, σελ. 303)

a) $x_1(n) = \begin{cases} 1, & -N \leq n \leq N \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

αν $x_N(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$ → παλμός διάρκειας N (0, 1, ... N-1)

Τότε $x_1(n) = x_{2N+1}(n-N)$

Αλλά $x_N(n) \longleftrightarrow X_N(e^{jw}) = e^{-j\frac{(N-1)w}{2}} \cdot \dfrac{\sin(wN/2)}{\sin(w/2)}$

από το παράδειγμα 5.10

Άρα $x_{2N+1}(n) \longleftrightarrow X_{2N+1}(e^{jw}) = e^{-j2Nw} \cdot \dfrac{\sin(w(N+1)/2)}{\sin(w/2)}$

$\Leftrightarrow x_{2N+1}(n-N) \longleftrightarrow X'(e^{jw}) = X_{2N+1}(e^{jw})\, e^{-jwN}$

$= e^{-3jwN} \cdot \dfrac{\sin[w(N+1)/2]}{\sin(w/2)}$

b) $X_2(e^{jw}) = X'(e^{jw}) \cdot X'(e^{jw})$

$= e^{-6jwN} \cdot \dfrac{\sin^2[w(N+1)/2]}{\sin^2(w/2)}$

Άσκηση 3 (άσκηση 7, σελ. 304)

α)

$$z(n) = x(n) * y(n) \Leftrightarrow Z(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})\, Y(e^{j\omega})$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z(n)\, e^{-j\omega n} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\, e^{-j\omega k} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} y(m)\, e^{-j\omega m}$$

Θέτουμε $\omega = 0$:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} z(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} y(m)$$

Άσκηση 3 (άσκηση 8, σελ. 304)

β)

α) $y(n) + \frac{1}{2}\, y(n-1) = x(n)$

$$\Leftrightarrow Y(e^{j\omega}) + \frac{1}{2} e^{-j\omega}\, Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})$$

$$\Leftrightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} e^{-j\omega}}$$

β) $H(e^{j\omega}) = \dfrac{1}{1+\frac{1}{2} e^{-j\omega}} \Leftrightarrow h(n) = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n u(n)$

$$y_1(n) = x_1(n) * h(n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n) * \left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdot (n+1)$$

Για είσοδο $x_1(n) = \delta(n) + \frac{1}{2}\delta(n-1)$:

$$y_1(n) = x_1(n) * h_1(n) = h(n) + \frac{1}{2} h(n-1)$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1)$$

γ) $X(e^{j\omega}) = 1 + 2e^{-3j\omega} \Leftrightarrow x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-3)$

$$\Leftrightarrow y_1(n) = h(n) + 2h(n-3) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n) + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-3} u(n-3)$$

'Άσκηση 4

$$H(z) = \frac{-z^{-1} + \frac{2}{11}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{16}z^{-2}} = \frac{2/11\, z^2 - z}{\left(z - \frac{1}{4}\right)^2}$$

• Απόκριση μηδενικής κατάστασης (Α.Σ. $= \emptyset$)

$$Y(z) = H(z)X(z), \quad \text{με} \quad X(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$Y(z) = \frac{\frac{2}{11}z^3 - z^2}{\left(z - \frac{1}{4}\right)^2 (z-1)} \iff \frac{Y(z)}{z} = \frac{\frac{2}{11}z^2 - z}{\left(z - 1/4\right)^2 (z-1)}$$

$$= \frac{A}{\left(z - \frac{1}{4}\right)} + \frac{B}{\left(z - \frac{1}{4}\right)^2} + \frac{C}{z-1} = \cdots = \frac{16/11}{z - 1/4} + \frac{\overset{=1,2727}{14/11}}{\left(z - \frac{1}{4}\right)^2} - \frac{\overset{=1,4545}{16/11}}{z-1}$$

$$\iff Y(z) = \frac{z \cdot \frac{16}{11}}{z - 1/4} + \frac{z \cdot 14/11}{\left(z - \frac{1}{4}\right)^2} - \frac{16/11 \cdot z}{z-1}$$

$$\iff y_{zs}(n) = \left[\frac{16}{11}\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{14}{11}\left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot n - \frac{16}{11}\right] u(n)$$

• Απόκριση μηδενικής εισόδου με $y(-2)=1,\ y(-1)=2;\ x(n)=\phi$

$$Y(z)-\frac{1}{2}\left[z^{-1}Y(z)+2\right]+\frac{1}{16}\left[z^{-2}Y(z)+2z^{-1}\right]+1=0$$

(η εξίσωση διαφορών είναι $y(n)-\frac{1}{2}y(n-1)+\frac{1}{16}y(n-2)=0$)

$$\Leftrightarrow Y(z)=\frac{-\frac{1}{8}z^{-1}-1/16}{1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{16}z^{-2}} \Leftrightarrow \frac{Y(z)}{z}=\frac{-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}z}{\left(z-\frac{1}{4}\right)^2}$$

$$=\frac{A}{z-\frac{1}{4}}+\frac{B}{\left(z-\frac{1}{4}\right)^2}=\cdots=\frac{-9/64}{z-1/4}-\frac{1/16}{\left(z-1/4\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow Y(z)=\frac{-9/64\cdot z}{z-1/4}+\frac{-1/16\ z}{\left(z-1/4\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow y_{zi}(n)=\left[-\frac{9}{64}\left(\frac{1}{4}\right)^n-\frac{1}{16}\left(\frac{1}{4}\right)^n\cdot n\right]u(n)$$

Άσκηση 5

α) $y(n) = \frac{1}{3} y(n-2) + x(n)$, $x(n) = u(n)$, $y(-1) = 0$, $y(-2) = -1$

$$Y(z) = \frac{1}{3}\left[z^{-2} Y(z) - 1\right] + \frac{1}{1-z^{-1}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Y(z) = \frac{z^2 (2z+1)}{3(z-1)\left(z-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(z+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{Y(z)}{z} = \frac{z(2z+1)}{3(z-1)\left(z-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(z+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{A_1}{z-1} + \frac{A_2}{z-\frac{1}{\sqrt{3}}} + \frac{A_3}{z+\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

Προκύπτουν $A_1 = \frac{3}{2}$, $A_2 = -0{,}849$, $A_2 = 0{,}016$

Άρα, $Y(z) = \frac{3}{2}\frac{z}{z-1} + \frac{-0{,}849 \cdot z}{z-\frac{1}{\sqrt{3}}} + 0{,}016 \frac{z}{z+\frac{1}{\sqrt{3}}}$

$$\Leftrightarrow y(n) = \left[\frac{3}{2} - 0{,}849\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n + 0{,}016\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n\right] u(n)$$

Άσκηση 5

β) $y(n) = -y(n-1) + 2x(n)$, $x(n) = \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)$, Α.Σ. $= \emptyset$

$$Y(z) = -z^{-1}Y(z) + 2X(z),$$

$$X(z) = \frac{z^2 - z\cos(\pi/3)}{z^2 - 2z\cos(\pi/3) + 1} = \frac{z(z - 1/2)}{\left(z - \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z - \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

Άρα, $$Y(z) = \frac{z^2(z - 1/2)}{(z+1)\left(z - \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z - \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{A_1}{z+1} + \frac{A_2}{z - \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{A_3}{z - \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$A_1 = 1/2$

$A_2 = \frac{1}{4} + j0,1443$

$A_3 = \frac{1}{4} - j0,1443$

$$Y(z) = \frac{1}{2} \frac{z}{z+1} + \left(\frac{1}{4} + j0{,}1443\right) \frac{z}{z - \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}} + \left(\frac{1}{4} - j0{,}1443\right) \frac{z}{z - \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\Leftrightarrow y(n) = \left[\frac{1}{2} (-1)^n + 0{,}29^{\angle 30^\circ} \left(1^{\angle 60^\circ}\right)^n + 0{,}29^{\angle -30} \left(1^{\angle -60}\right)^n\right]$$

$$\Leftrightarrow y(n) = \left[\frac{1}{2}(-1)^n + 0{,}3^{\angle \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} n} + 0{,}3^{\angle -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} n}\right] u(n)$$

$$\Leftrightarrow y(n) = \left[\frac{1}{2}(-1)^n + 0{,}6 \cos\left(\frac{\pi}{3} n + \frac{\pi}{6}\right)\right] u(n)$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
Μάθημα: **4-52 Σήματα και Συστήματα**
Παν. έτος 2007-2008
Διδάσκων: Χ. Νίκου

Σειρά Ασκήσεων 3

Παράδοση: 10 Ιανουαρίου 2008

Άσκηση 1 (20%)

α) Η ετεροσυσχέτιση δύο σημάτων διακριτού χρόνου $x(n)$ και $y(n)$ ορίζεται ως:

$$r_{xy}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n+k)$$

Να βρεθεί η σχέση που συνδέει το Z-μετασχηματισμό $R_{xy}(z)$ της $r_{xy}(n)$, με τους Z-μετασχηματισμούς $X(z)$ και $Y(z)$ των σημάτων $x(n)$ και $y(n)$ αντίστοιχα.

β) Να αποδειχθεί το θεώρημα της αρχικής τιμής (σελ. 265, παράγραφος 5.8.3).

Άσκηση 2 (25%)

Ένα σύστημα διακριτού χρόνου με είσοδο το σήμα $x(n)$ και έξοδο το σήμα $y(n)$ περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(z) = \frac{-z^{-1} + \frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{7}z^{-2}}$$

Να βρεθεί η απόκριση μηδενικής κατάστασης καθώς και η απόκριση μηδενικής εισόδου αν $x(n) = u(n)$, $y(-2) = 1$ και $y(-1) = -1$.

Άσκηση 3 (30%)

Να υπολογιστεί η απόκριση $y(n)$ των συστημάτων που περιγράφονται από τις παρακάτω εξισώσεις διαφορών:

α) $y(n) = \frac{3}{4}y(n-2) + 2x(n), \quad x(n) = (\frac{1}{2})^n u(n), \quad y(-1) = 0, \quad y(-2) = 1.$

β) $y(n) = 2y(n-1) + 3x(n), \quad x(n) = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) u(n), \quad y(-1) = y(-2) = 0.$

Να καταλήξετε σε πραγματικό σήμα στην περίπτωση (β)

Άσκηση 4 (10%)

Ένα σύστημα διακριτού χρόνου περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών:

$$y(n) = x(n+1) - x(n-1).$$

Να υπολογιστούν και να σχεδιαστούν οι γραφικές παραστάσεις του μέτρου και της φάσης της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος $H(e^{j\omega})$.

Άσκηση 5 (15%)

Δίνεται το σήμα συνεχούς χρόνου

$$x(t) = \frac{\sin^2(50\pi t)}{\pi^2 t^2}$$

το οποίο θέλουμε να μετατρέψουμε σε σήμα διακριτού χρόνου με δειγματοληψία. Να υπολογιστεί η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας Ω_s, έτσι ώστε να μην εμφανιστεί το φαινόμενο της επικάλυψης φάσματος (aliasing).

Σειρά Ασκήσεων 3

Άσκηση 1

a) $$Z\{r_{xy}(m)\} = R_{xy}(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r_{xy}(n)\cdot z^{-n} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\, y(n+k)\cdot z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\cdot z^{k}\cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n+k)\cdot z^{-(n+k)}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\cdot (z^{-1})^{-k}\cdot \sum_{m=-\infty}^{+\infty} y(m)\, z^{-m} = X(z^{-1})\cdot Y(z)$$

b) $$\lim_{z\to\infty} X(z) = \lim_{z\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x(n)\, z^{-n}\right)$$

$$= \lim_{z\to\infty}\left[x(0)\, z^{0} + x(1)\cdot z^{-1} + x(2)\cdot z^{-2} + \dots + \dots\right]$$

$$= \lim_{z\to\infty}\left[x(0)\right] + \lim_{z\to\infty}\left[x(1)\, z^{-1}\right] + \dots +$$

$$= x(0) + x(1)\lim_{z\to\infty}(z^{-1}) + x(2)\lim_{z\to\infty}(z^{-2}) + \dots$$

$$= x(0) + x(1)\cdot 0 + x(2)\cdot 0 + \dots$$

$$= x(0)$$

Άσκηση 2

$$H(z) = \frac{-z^{-1} + \frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1} + \frac{1}{7} z^{-2}} \quad , \; y(-2) = 1 \quad , \; y(-1) = -1$$

Η εξίσωση διαφορών του συστήματος είναι:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) \Leftrightarrow Y(z) - \frac{1}{2} z^{-1} Y(z) + \frac{1}{7} z^{-2} Y(z) = -z^{-1} X(z) + \frac{2}{3} X(z)$$

$$\Leftrightarrow y(n) - \frac{1}{2} y(n-1) + \frac{1}{7} y(n-2) = \frac{2}{3} x(n) - x(n-1)$$

- Απόκριση μηδενικής κατάστασης $\Rightarrow$ Α. Σ. $= \emptyset$.

$$Y(z) - \frac{1}{2} z^{-1} Y(z) + \frac{1}{7} z^{-2} Y(z) = -z^{-1} X(z) + \frac{2}{3} X(z)$$

με $X(z) = \frac{z}{z-1}$, αντικαθιστώντας:

$$Y(z) = \frac{z^2 \left(\frac{2}{3} z - 1\right)}{z^3 - \frac{3}{2} z^2 + \frac{9}{14} z - \frac{1}{7}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{Y(z)}{z} = \frac{-0,5185}{z-1} + \frac{0,2593 + j0,07}{z - 0,25 - j0,2835} + \frac{0,2593 - j0,07}{z - 0,25 + j0,2835}$$

$$\Leftrightarrow \frac{Y(z)}{z} = \frac{-0,5185}{z-1} + \frac{0,2685 \angle 15,10}{z - 0,378 \angle 48,59} + \frac{0,2685 \angle -15,10}{z - 0,378 \angle -48,59}$$

Άρα $y_{zs}(n) = -0{,}5185\, u(n)$

$+0{,}2685 \angle 15{,}10 \cdot \left(0{,}378 \angle 48{,}59\right)^n u(n) + 0{,}2685 \angle -15{,}10 \cdot \left(0{,}378 \angle -48{,}59\right)^n u(n)$

$\Leftrightarrow y_{zs}(n) = -0{,}5185\, u(n) + 0{,}2685 \cdot e^{j15{,}10} \cdot 0{,}378^n \cdot e^{j48{,}59 \cdot n}\, u(n)$

$+ 0{,}2685\, e^{-j15{,}10} \cdot 0{,}378^n \cdot e^{-j48{,}59 \cdot n}\, u(n)$

$\Leftrightarrow y_{zs}(n) = -0{,}5185 \cdot u(n) +$

$+ 0{,}2685 \cdot 0{,}378^n \left[e^{j(15{,}10 + 48{,}59 n)} + e^{-j\cdot(15{,}10 + 48{,}59 n)} \right]$

$\Leftrightarrow y_{zs}(n) = -0{,}5185\, u(n) + 0{,}2685 \cdot 0{,}378^n \cdot 2 \cdot \cos(48{,}59 n + 15{,}10)\, u(n)$

$\Leftrightarrow y_{zs}(n) = -0{,}5185\, u(n) + 0{,}537 \cdot (0{,}378)^n \cdot \cos(48{,}59 n + 15{,}10)\, u(n)$

- Απόκριση μηδενικής εισόδου: $X(n) = \emptyset$

Λαμβάνουμε υπόψη μόνο τις Α.Σ.:

$Y(z) - \frac{1}{2} z^{-1} \left[Y(z) - z \right] + \frac{1}{7} z^{-2} \left[Y(z) - z + z^2 \right] = \emptyset \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow Y(z) = \dfrac{-9/14\, z^2 + 1/7\, z}{z^2 - \frac{1}{2} z + \frac{1}{7}} \Leftrightarrow \dfrac{Y(z)}{z} = \dfrac{-9/14\, z + 1/7}{z^2 - \frac{1}{2} z + \frac{1}{7}}$

(4)

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{-0,3214 + j0,0315}{z - 0,25 - j0,2835} + \frac{-0,3214 - j0,0315}{z - 0,25 + j0,2835}$$

$$\Rightarrow y_{zi}(n) = 0,323 \angle{-174,40} \cdot (0,378)^n \cdot e^{j\,48,59 n}$$

$$+ 0,323 \angle{-174,40} \cdot (0,378)^n e^{-j\,48,59 n}$$

$$\Rightarrow y_{zi}(n) = 0,646 \cdot (0,378)^n \cdot \cos(48,59 n + 174 + 40)$$

Άσκηση 3

(5)

a) $y(n) = \frac{3}{4} y(n-2) + 2x(n)$, $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$, $y(-1)=0$, $y(-2)=1$

$$Y(z) = \frac{3}{4}\left[z^{-2}Y(z) + 1\right] + 2 \cdot \frac{z}{z-1/2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Y(z) = \frac{1}{4} \frac{z^2\left(11z - \frac{3}{2}\right)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{Y(z)}{z} = \frac{A_1}{z-1/2} + \frac{A_2}{z-\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{A_3}{z+\frac{\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = -1 \\ A_2 = 2,74 \\ A_3 = 1,004 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow Y(z) = \frac{-z}{z-1/2} + \frac{2,74 \cdot z}{z-\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{1,004 \cdot z}{z+\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\Leftrightarrow y(n) = \left[-\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2,74 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n + 1,004\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right] u(n)$$

Άσκηση 3

β) $y(n) = 2y(n-1) + 3x(n)$, $x(n) = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$, Α.Σ. $= \emptyset$

$Y(z) = 2z^{-1}Y(z) + 3X(z)$, με $X(z) = \dfrac{z^2 - z\cos(\pi/4)}{z^2 - 2z\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 1}$

$\Leftrightarrow X(z) = \dfrac{z^2 - z\frac{\sqrt{2}}{2}}{z^2 - 2z\frac{\sqrt{2}}{2} + 1} \Leftrightarrow X(z) = \dfrac{z\left(z - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{z^2 - \sqrt{2}z + 1}$

$$\Leftrightarrow X(z) = \frac{z\left(z - \sqrt{2}/2\right)}{\left(z - \frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(z - \frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

Άρα $$Y(z) = \frac{3z^2\left(z - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(z - \frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(z - \frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(z-2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{Y(z)}{z} = \frac{A_1}{z - \frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{A_2}{z - \frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{A_3}{z-2}$$

Προκύπτουν:

$A_1 = -0{,}286 - j0{,}4769 = 1{,}0179 \angle{-106{,}32}$

$A_2 = -0{,}2861 + j0{,}4769 = 1{,}0179 \angle{106{,}32}$

$A_3 = 3{,}5722$

$$y(n) = 1{,}0179\angle{-106{,}32} \cdot \left(1\angle{45}\right)^n u(n)$$

$$+ \, 1{,}0179\angle{106{,}32} \left(1\angle{-45}\right)^n u(n)$$

$$+ \, 3{,}57 \cdot 2^n u(n)$$

$$= \left[1{,}079\angle{45n - 106{,}32} + 1{,}079\angle{-45n + 106{,}32} + 2^n\right] u(n)$$

$$= \left\{1{,}079 \left[e^{j(45n - 106{,}32)} + e^{-j(45n - 106{,}32)}\right] + 2^n\right\} u(n)$$

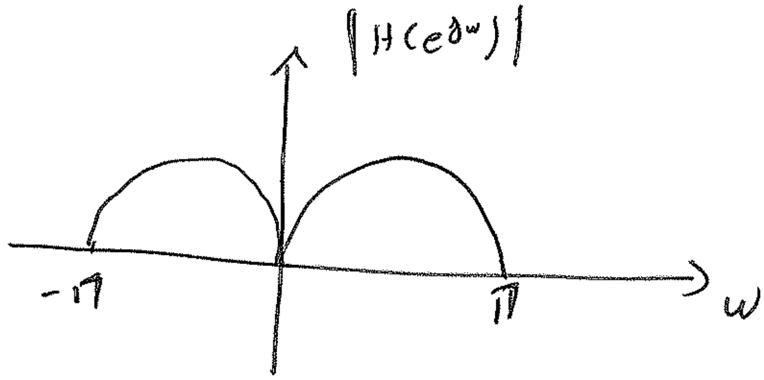
$$= \left[2{,}158 \cdot \cos\left(45n - 106{,}32\right) + 2^n\right] u(n)$$

Άσκηση 4

$$y(n) = x(n+1) - x(n-1) \Leftrightarrow Y(e^{jw}) = e^{jw} X(e^{jw}) - e^{-jw} X(e^{jw})$$

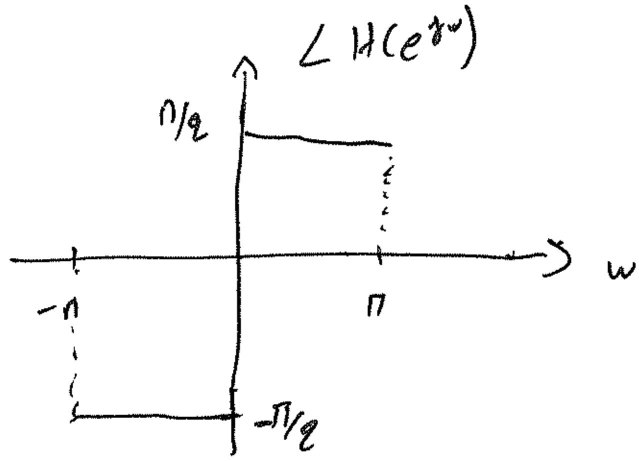
$$\Leftrightarrow H(e^{jw}) = e^{jw} - e^{-jw} \Leftrightarrow H(e^{jw}) = j2\sin(w)$$

- Μέτρο: $|H(e^{jw})| = |j2\sin(w)| = 2|\sin(w)|$



- Φάση:

$$\angle H(e^{jw}) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & , 0 < w \leq \pi \\ -\frac{\pi}{2} & , -\pi \leq w \leq 0 \end{cases}$$



Άσκηση 5

$$x(t) = \frac{\sin^2(50\pi t)}{(\pi t)^2} = x_1(t)\cdot x_1(t), \quad \text{με} \quad x_1(t) = \frac{\sin(50\pi t)}{\pi t}$$

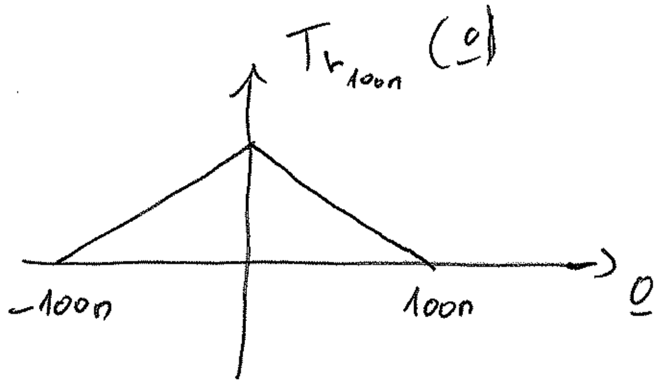
$$P_{T/2}(t) \longleftrightarrow T\cdot \frac{\sin(\Omega T/2)}{\Omega T/2} \Rightarrow x_1(t) \longleftrightarrow X_1(\Omega) = P_{50\pi}(\Omega)$$

Άρα $X(\Omega) = X_1(\Omega) * X_1(\Omega) =$

$$= P_{50\pi}(\Omega) * P_{50\pi}(\Omega)$$

$$= Tr_{100\pi}(\Omega)$$

→ το έχουμε δει σε άσκηση στο πεδίο του χρόνου



Αν δεν το θυμάστε μπορείτε να κάνετε τη συνέλιξη!

Άρα $\Omega_s \geq 200\pi$ rad/sec

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
Μάθημα: **4-52 Σήματα και Συστήματα**
Παν. έτος 2009-2010
Διδάσκων: Χ. Νίκου

Σειρά Ασκήσεων 3

Παράδοση: 18 Ιανουαρίου 2010

Άσκηση 1 (25%)

α) Να υπολογιστεί η απόκριση $y[n]$ του συστήματος που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών:

$$y[n] = \frac{1}{3}y[n-2] + x[n]$$

με είσοδο το σήμα $x[n] = (\frac{2}{3})^n u[n]$, και αρχικές συνθήκες $y[-1] = 0$, $y[-2] = 1$.

β) Να υπολογιστεί το τμήμα της απόκρισης που οφείλεται στις αρχικές συνθήκες (απόκριση μηδενικής εισόδου).

Άσκηση 2 (25%)

Να υπολογιστεί η απόκριση $y(n)$ του συστήματος που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών:

$$y[n] = y[n-1] + 2x[n]$$

με είσοδο το σήμα $x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{6}n\right)u[n]$, και αρχικές συνθήκες $y[-1] = y[-2] = 0$.

Άσκηση 3 (25%)

Άσκηση 8 από το βιβλίο (σελ. 304).

Άσκηση 4 (25%)

Ένα ΓΧΑ σύστημα διακριτού χρόνου περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών:

$$y[n] = x[n] - \frac{1}{2}x[n+1] - \frac{1}{2}x[n-1].$$

α) Να υπολογιστούν και να σχεδιαστούν οι γραφικές παραστάσεις του μέτρου και της φάσης της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος $H(e^{j\omega})$. Ποιές συχνότητες του σήματος εισόδου διατηρεί και ποιές κόβει το σύστημα (φίλτρο) αυτό;

β) Να υπολογιστεί η έξοδος του συστήματος για είσοδο:

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)u[n] + \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)u[n] + \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

Άσκηση 1

α) $y[n] = \frac{1}{3} y[n-2] + x[n]$, $x[n] = \left(\frac{2}{3}\right)^n u[n]$, $y[-1]=0$, $y[-2]=1$

$Y(z) = \frac{1}{3}\left[z^{-2} Y(z) + 1\right] + X(z) \Leftrightarrow Y(z) = \frac{1}{3}\left[z^{-2} Y(z) + 1\right] + \frac{z}{z-2/3}$

$\Leftrightarrow Y(z) = \dfrac{z^2\left(4/3\, z - 2/9\right)}{\left(z - 1/\sqrt{3}\right)\left(z + 1/\sqrt{3}\right)\left(z - 2/3\right)} \Leftrightarrow$

$\frac{Y(z)}{z} = \frac{A_1}{z - 1/\sqrt{3}} + \frac{A_2}{z + 1/\sqrt{3}} + \frac{A_3}{z - 2/3} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = -3{,}1 \\ A_2 = 0{,}4 \\ A_3 = 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow Y(z) = \frac{-3{,}1 \cdot z}{z - 1/\sqrt{3}} + \frac{0{,}4 \cdot z}{z + 1/\sqrt{3}} + \frac{4z}{z - 2/3}$

$\Leftrightarrow y[n] = \left[4\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3{,}1\left(1/\sqrt{3}\right)^n + 0{,}4\left(-1/\sqrt{3}\right)^n\right] u[n]$

β) $x[n] = 0$:

$Y(z) = \frac{1}{3}\left[z^{-2} Y(z) + 1\right] \Leftrightarrow Y(z) = \frac{1}{3} z^{-2} Y(z) + \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow Y(z) = \dfrac{1/3\, z^2}{(z^2 - 1/3)} \Leftrightarrow \frac{Y(z)}{z} = \dfrac{1/3\, z}{(z - 1/\sqrt{3})(z + 1/\sqrt{3})} = \text{----}$

$= \frac{1/6}{z - 1/\sqrt{3}} + \frac{1/6}{z + 1/\sqrt{3}} \Leftrightarrow Y(z) = \frac{1/6\, z}{z - 1/\sqrt{3}} + \frac{1/6\, z}{z + 1/\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow y_{zi}(n) = \left[\frac{1}{6}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n\right] u[n]$

Άσκηση 2

$y[n] = y[n-1] + 2x[n]$, $x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{6} n\right) u[n]$, $y[-1] = y[-2] = 0$

$$X(z) = \frac{z^2 - z\cos(\pi/6)}{z^2 - 2z\cos(\pi/6) + 1} = \frac{z^2 - z\frac{\sqrt{3}}{2}}{z^2 - 2z\sqrt{3}/2 + 1} = \frac{z^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}z}{z^2 - \sqrt{3}z + 1}$$

$$= \frac{z(z - \sqrt{3}/2)}{\left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} + j\,1/2\right)}$$

$$Y(z) = z^{-1}Y(z) + 2X(z) \Leftrightarrow$$

$$Y(z) = \frac{2z\,X(z)}{z-1} = \frac{2z^2(z - \sqrt{3}/2)}{(z-1)\left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} - j\,1/2\right)\left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} + j\,1/2\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{Y(z)}{z} = \frac{A_1}{z-1} + \frac{A_2}{z - \frac{\sqrt{3}}{2} - j\,1/2} + \frac{A_3}{z - \frac{\sqrt{3}}{2} + j\,1/2}$$

$$A_1 = 1$$

$$A_2 = \frac{1}{2} - j\,1{,}87$$

$$A_3 = \frac{1}{2} + j\,1{,}87$$

$$Y(z) = \frac{1 \cdot z}{z-1} + \frac{\left(\frac{1}{2} - j\,1{,}87\right)z}{z - \frac{\sqrt{3}}{2} - j\,1/2} + \frac{\left(\frac{1}{2} + j\,1{,}87\right)z}{z - \frac{\sqrt{3}}{2} + j\,1/2}$$

$$y[n] = u[n] + 1{,}93\angle\ldots \left(1^{\angle 30}\right)^n u[n] + 1{,}93^{\angle 74{,}9} \left(1^{\angle -30}\right)^n u[n]$$

$$= \left(1 + 1{,}43^{\angle 30n - 74{,}9} + 1{,}93^{\angle -30n + 74{,}9}\right) u[n]$$

$$= \left\{1 + 1{,}93\left[e^{j(30n-74{,}9)} + e^{-j(30n-74{,}9)}\right]\right\} u[n]$$

$$= \left[1 + 1{,}93 \cdot 2 \cos(30n - 74{,}9)\right] u[n]$$

$$= \left[1 + 3{,}86 \cos(30n - 74{,}9)\right] u[n]$$

Άσκηση 3

α) $y[n] + \frac{1}{2} y[n-1] = x[n]$

$$\Leftrightarrow Y(e^{jw}) + \frac{1}{2} e^{-jw} Y(e^{jw}) = X(e^{jw})$$

$$\Leftrightarrow H(e^{jw}) = \frac{Y(e^{jw})}{X(e^{jw})} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-jw}}$$

β) $h[n] = \left(\frac{-1}{2}\right)^n u[n]$

$$y_1[n] = h[n] * x_1[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] * \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(-1/2\right)^k \left(-1/2\right)^{n-k} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{n} 1 = (n+1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$y_2[n] = x_2[n] * h[n] = \left(\delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1]\right) * \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$$

γ) $X(e^{jw}) = 1 + 2e^{-j3w} \Leftrightarrow x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-3]$

$$\Leftrightarrow y[n] = \left(\delta[n] + 2\delta[n-3]\right) * \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 2\left(-1/2\right)^{n-3} u[n-3]$$

Άσκηση 4   a)

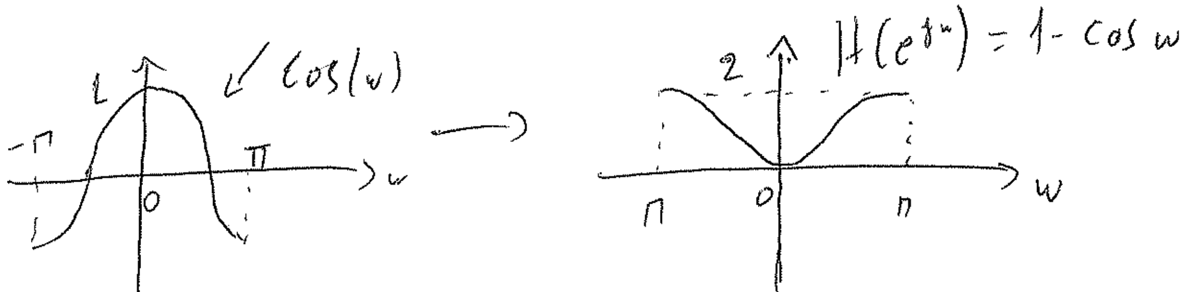
$$y[n] = x[n] - \frac{1}{2}x[n+1] - \frac{1}{2}x[n-1] \Leftrightarrow$$

$$Y(e^{jw}) = X(e^{jw}) - \frac{1}{2}e^{jw}X(e^{jw}) - \frac{1}{2}e^{-jw}X(e^{jw}) \Leftrightarrow$$

$$Y(e^{jw}) = \left(1 - \frac{1}{2}e^{jw} - \frac{1}{2}e^{-jw}\right)X(e^{jw}) \Leftrightarrow$$

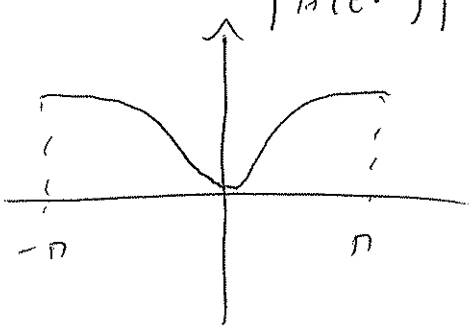
$$\frac{Y(e^{jw})}{X(e^{jw})} = H(e^{jw}) = 1 - \left(\frac{1}{2}e^{jw} + \frac{1}{2}e^{-jw}\right) \Leftrightarrow$$

$$H(e^{jw}) = 1 - \cos(w)$$

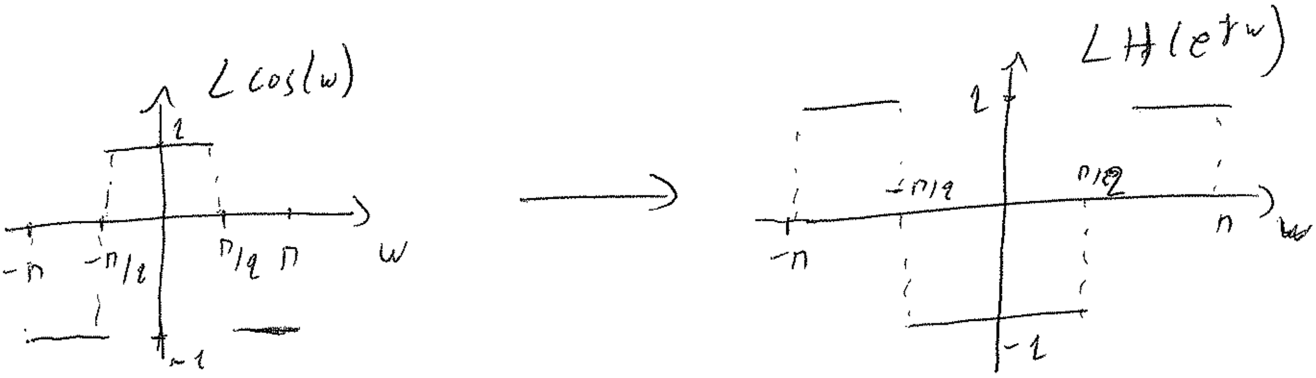


Το φίλτρο κόβει τις χαμηλές συχνότητες (υψιπερατό)

$|H(e^{jw})| \to$ το ίδιο με $H(e^{jw})$ επειδή το $H(e^{jw})$ είναι πραγματικό και μη αρνητικό $\forall w \in [-\pi, \pi]$



$$\angle H(e^{jw}) = \angle 1^{o} - \angle\cos(w) = -\angle\cos(w)$$



в) $x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)u[n] + \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)u[n] + \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

$H\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \cos(\pi/4) = 1 - \sqrt{2}/2$

$H(\pi/2) = 1 - \cos(\pi/2) = 1 - 0 = 1$

$H(0) = 1 - \cos(0) = 1 - 1 = 0$

При $y[n] = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)u[n] + \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)u[n]$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
Μάθημα: **4-52 Σήματα και Συστήματα**
Παν. έτος 2010-2011
Διδάσκων: Χ. Νίκου

Σειρά Ασκήσεων 3

Παράδοση: 17 Ιανουαρίου 2011

Ο βαθμός της σειρά αυτής, εκτός από τη συμμετοχή του στον τελικό βαθμό των ασκήσεων κατά 1/3, θα δώσει bonus (ίσο με το 10% της τιμής του, με μέγιστο 1 μονάδα) στον τελικό βαθμό του μαθήματος. Το bonus αυτό ισχύει και για τους φοιτητές που δεν έχουν παραδώσει άλλη σειρά ασκήσεων.

Άσκηση 1 (%)

Η άσκηση αυτή είναι εισαγωγική για την εξοικείωση με τη δειγματοληψία σημάτων και τη γραφική τους αναπαράσταση. Υποθέστε ότι χρησιμοποιούμε το MATLAB για να σχεδιάσουμε ένα ημιτονοειδές σήμα διακριτού χρόνου που προκύπτει από δειγματοληψία σήματος συνεχούς χρόνου. Ο παρακάτω κώδικας παράγει ένα σήμα $x[n]$ και το παριστάνει γραφικά. Στη γραφική παράσταση ο οριζόντιος άξονας δεν έχει ονομαστεί κατάλληλα.

```
clear;
close all;

Ts = 0.01;
Duration = 0.3;
tt = 0 : Ts : Duration;
F0 = 394;

x = sqrt(2) * cos(2*pi*F0*tt);

figure;
stem(x);     % ←— Λείπει ο άξονας του χρόνου

xlabel('n','FontSize',16);
ylabel('x[n]','FontSize',16);
title('Cosine plot','FontSize',13);
```

α) Να σχεδιαστεί το σήμα $x[n]$ ως συνάρτηση του n βάζοντας το κατάλληλο όρισμα για τον οριζόντιο άξονα στην κλήση της συνάρτησης stem.

β) Να καθοριστούν οι παράμετροι A, ω και ϕ του σήματος διακριτού χρόνου ώστε αυτό να εκφράζεται στη μορφή

$$x[n] = A\cos(\omega n + \phi)$$

γ) Να εξηγηθεί αν υπάρχει το φαινόμενο της ψευδωνυμίας συχνοτήτων στη γραφική παράσταση που βλέπετε. Να καθοριστεί μία αποδεκτή τιμή για το Ts για να πάρουμε τη γραφική παράσταση του επιθυμητού σήματος. Σχεδιάστε αυτή τη γραφική παράσταση.

Να παραδοθεί και ο κώδικας σε MATLAB.

Άσκηση 2 (%)

Στην άσκηση αυτή επανερχόμαστε στα περιοδικά σήματα συνεχούς χρόνου και την αναπαράστασή τους από σειρά Fourier. Δίνεται το περιοδικό σήμα συνεχούς χρόνου με περίοδο $T = 2$:

$$x(t) = \begin{cases} 0 \ , & -1 \leq t < -\frac{1}{2} \\ 1 \ , & -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0 \ , & \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases} \tag{1}$$

και $x(t) = x(t + T)$.

Η ανάπτυξη του σήματος σε εκθετική σειρά Fourier έχει συντελεστές:

$$c_0 = \frac{1}{2}, \quad c_n = \frac{1}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

Χρησιμοποιώντας το MATLAB να προσεγγιστεί το σήμα $x(t)$ από $N = 3, 5, 9, 30, 50, 500$ και 1000 όρους της εκθετικής σειράς Fourier.

α) Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των προσεγγίσεων για $-3 \leq t \leq 3$. Για την αναπαράσταση ενός σήματος συνεχούς χρόνου χρησιμοποιείται η συνάρτηση plot που ενώνει δείγματα του συνεχούς σήματος τα οποία λαμβάνουμε με ένα μικρό βήμα διακριτοποίησης ώστε αυτά να είναι πυκνά και να προσεγγίζουν καλά το συνεχές σήμα. Χρησιμοποιήστε εδώ βήμα διακριτοποίησης 0.01.

β) Να υπολογιστεί το ποσοστό της αρχικής ισχύος του σήματος που διατηρεί κάθε προσέγγιση (οι υπολογισμοί να γίνουν στο MATLAB) και να αναγραφεί στον τίτλο της γραφικής παράστασης (εντολή title).

Να παραδοθούν: ο κώδικας σε MATLAB και οι γραφικές παραστάσεις των προσεγγίσεων του $x(t)$.

Άσκηση 3 (%)

Ένα σύστημα διακριτού χρόνου περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών:

$$y[n-2] + y[n-1] + y[n] = x[n] + \frac{1}{2}x[n-1]$$

α) Αν το σύστημα είναι αιτιατό, να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του συστήματος.

β) Είναι το σύστημα ευσταθές;

Άσκηση 4 (%)

Ένα ΓΧΑ σύστημα διακριτού χρόνου περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών:

$$y[n] = x[n+2] - x[n-2]$$

α) Να υπολογιστεί η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος $H(e^{j\omega})$, το μέτρο και η φάση της.

β) Να γίνει η γραφική παράσταση του μέτρου και της φάσης της συνάρτησης μεταφοράς στο MATLAB στο διάστημα $[-\pi, \pi]$ (με βήμα διακριτοποίησης 0.01). Ποιές συχνότητες του σήματος εισόδου διατηρεί και ποιές κόβει το σύστημα αυτό (αναφερθείτε σε υψηλές, χαμηλές, μεσαίες συχνότητες);

γ) Να υπολογιστεί η έξοδος του συστήματος για είσοδο:

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)u[n] + \sin(\pi n)\,u[n] + 2\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)u[n]$$

Άσκηση 1

α) Το όρισμα στη stem για τον οριζόντιο άξονα πρέπει να είναι ο αύξοντας αριθμός του δείγματος

stem(tt/Ts, x);

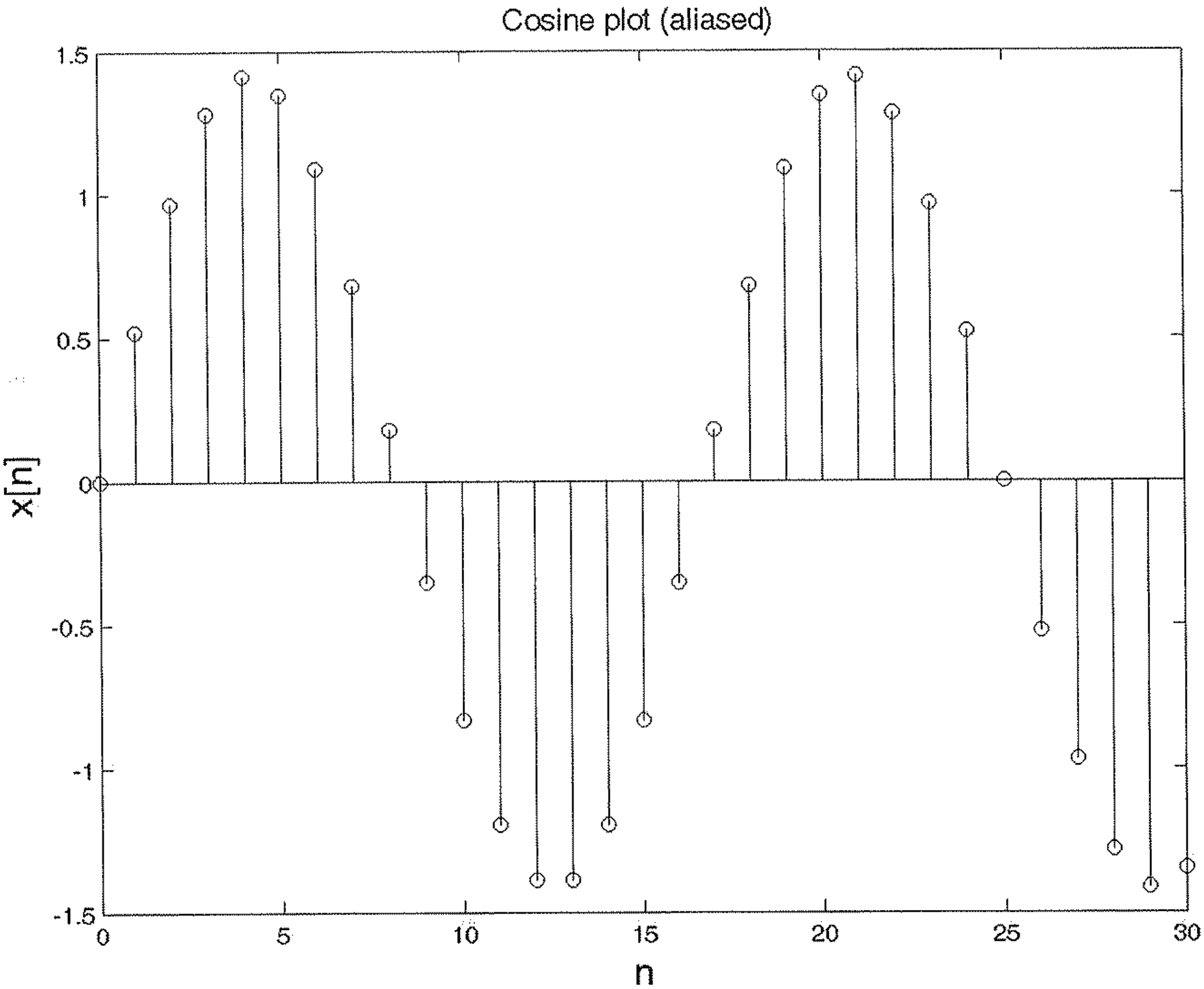
β) $A = \sqrt{2}$, $\varphi = \pi/2$ και

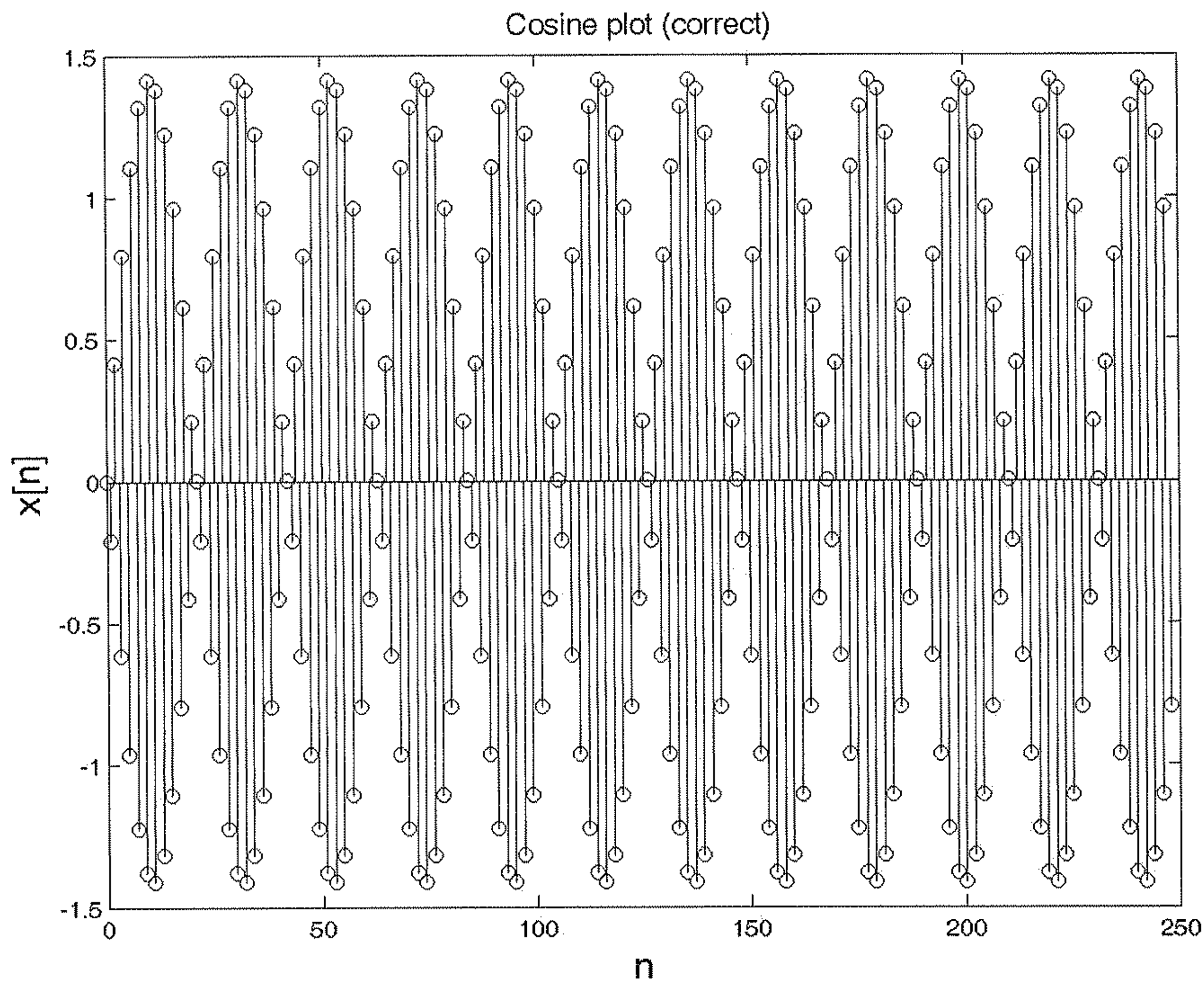
$$\omega = \Omega T_s = 2\pi F_0 T_s = 2 \cdot \pi \cdot 394 \cdot 0{,}01 = 3{,}1416 \simeq \pi \text{ rad}$$

γ) Υπάρχει επικάλυψη φάσματος $\Longrightarrow$ ψευδώνυμα συχνοτήτων επειδή δεν επαληθεύεται το κριτήριο του Nyquist στη δειγματοληψία.

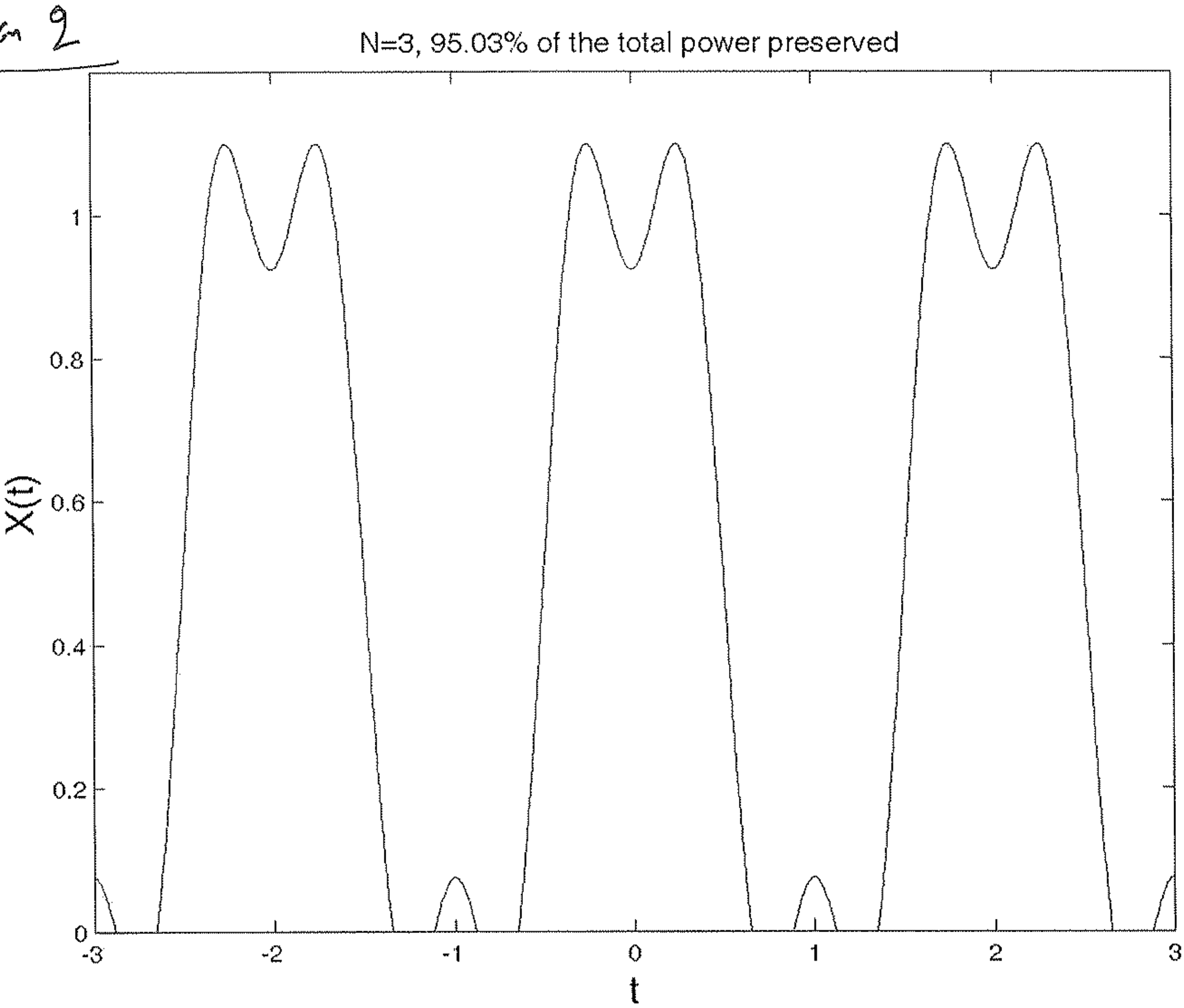
Για να πάρουμε τη σωστή γραφική παράσταση του $x[n]$ πρέπει το $x(t) = \sqrt{2}\cos(2\pi F_0 t + \pi/2)$ να δειγματοληπτηθεί με

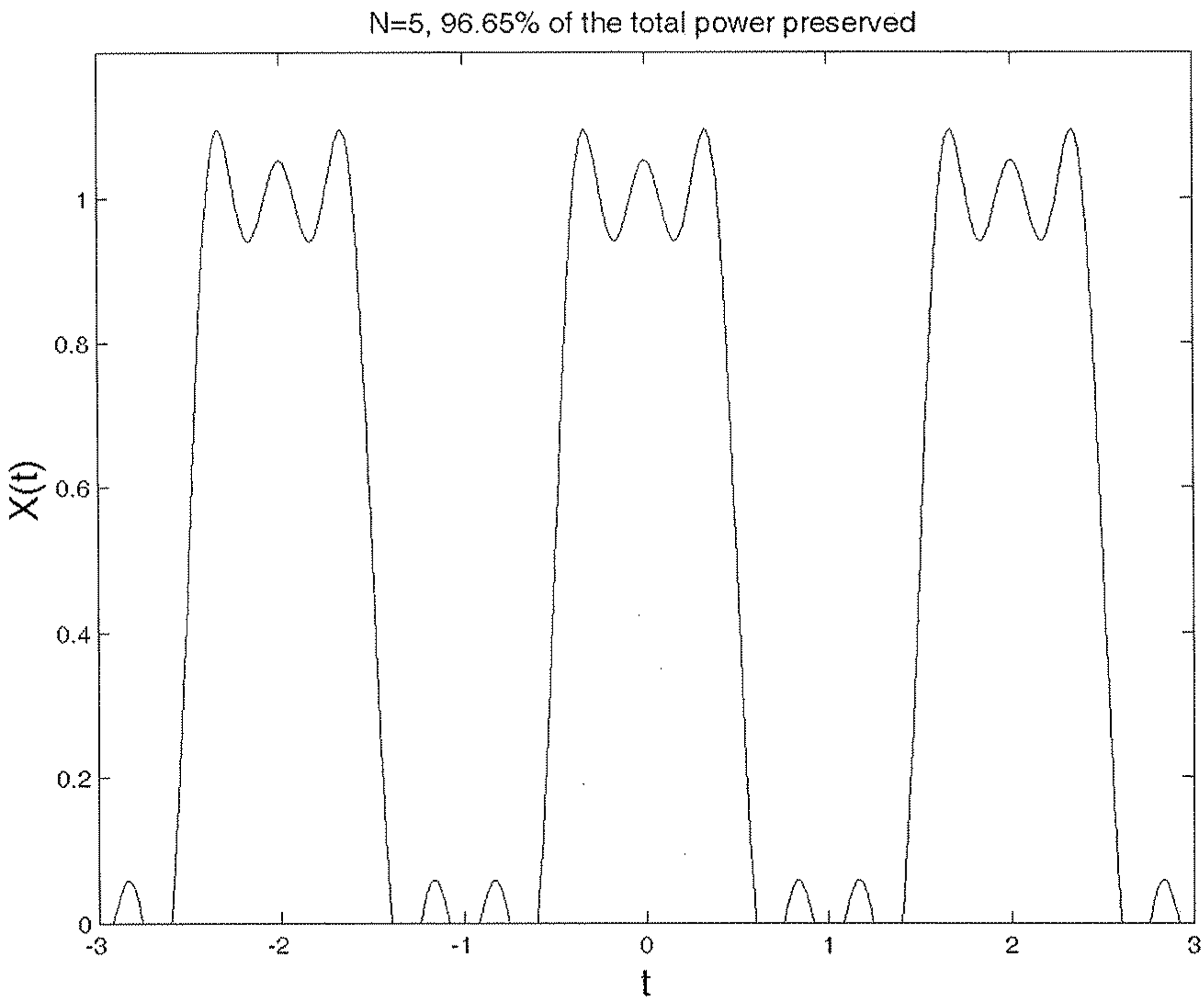
$$T_s < \frac{1}{2F_0} = 0{,}0013 \text{ sec} = 1{,}3 \text{ m.sec}$$

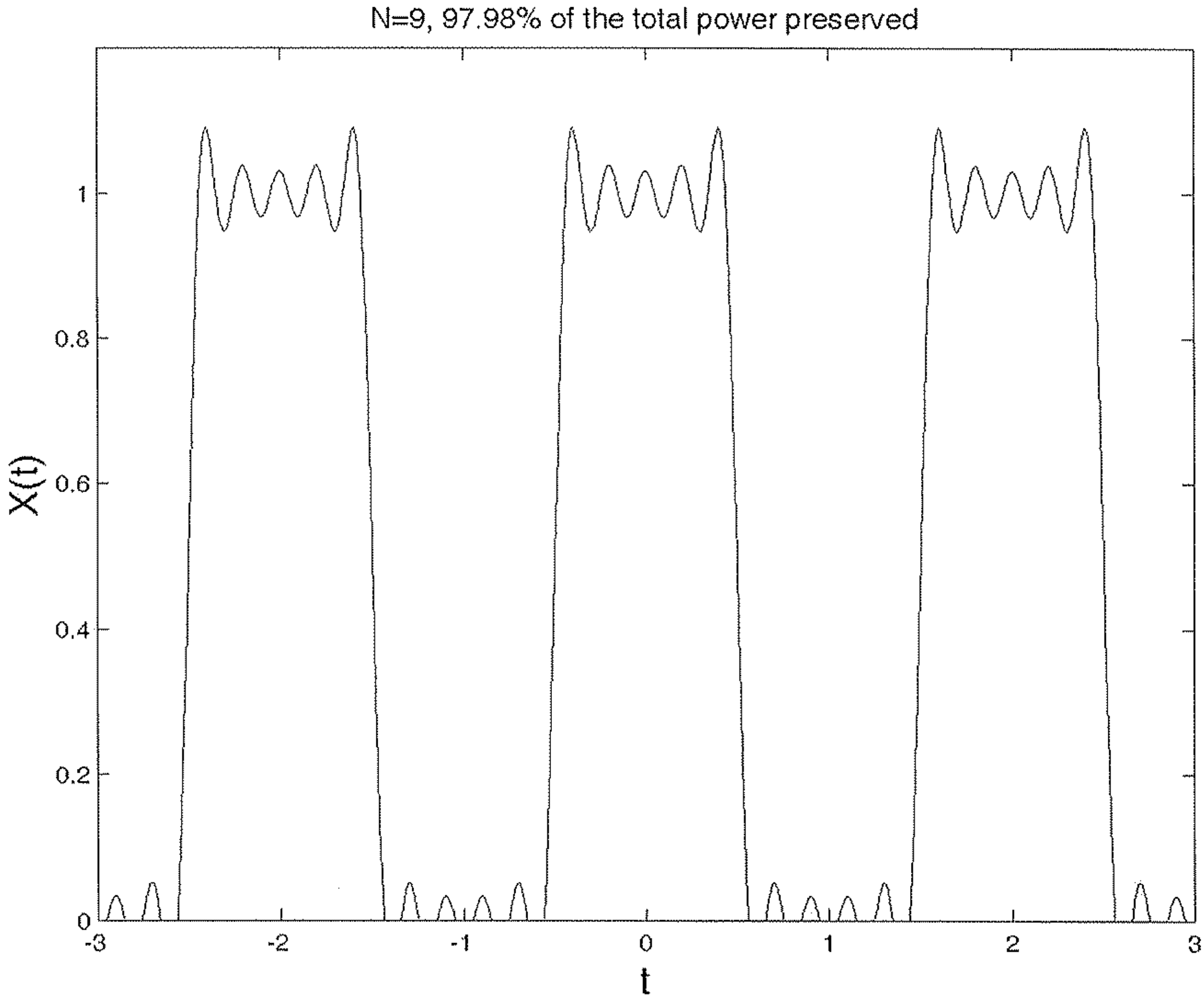

Cosine plot (aliased)
x[n]
n
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
5
10
15
20
25
30


Cosine plot (correct)
x[n]
n
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
50
100
150
200
250

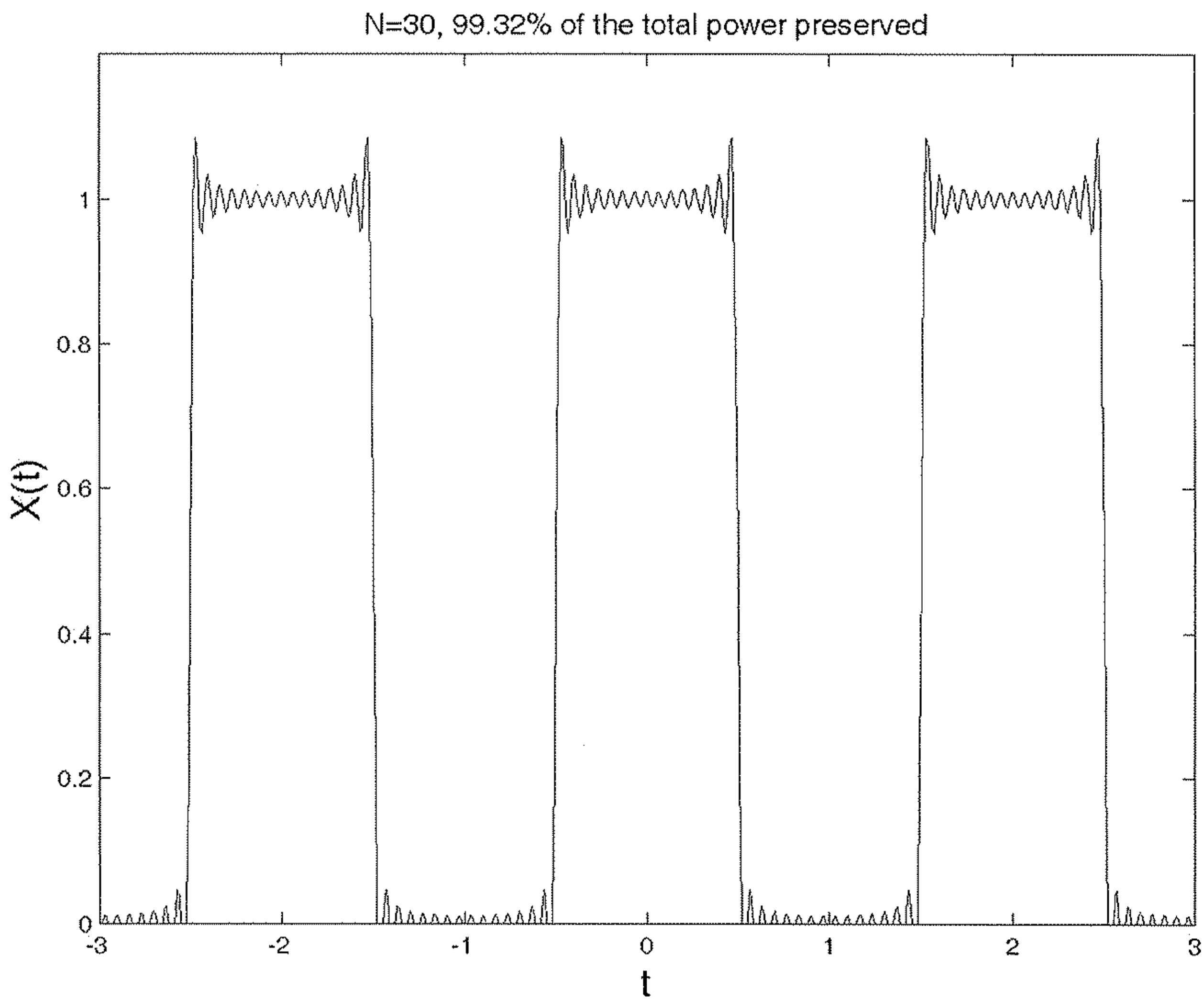
Αλυσκα 2


N=3, 95.03% of the total power preserved
X(t)
t
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-3
-2
-1
0
1
2
3

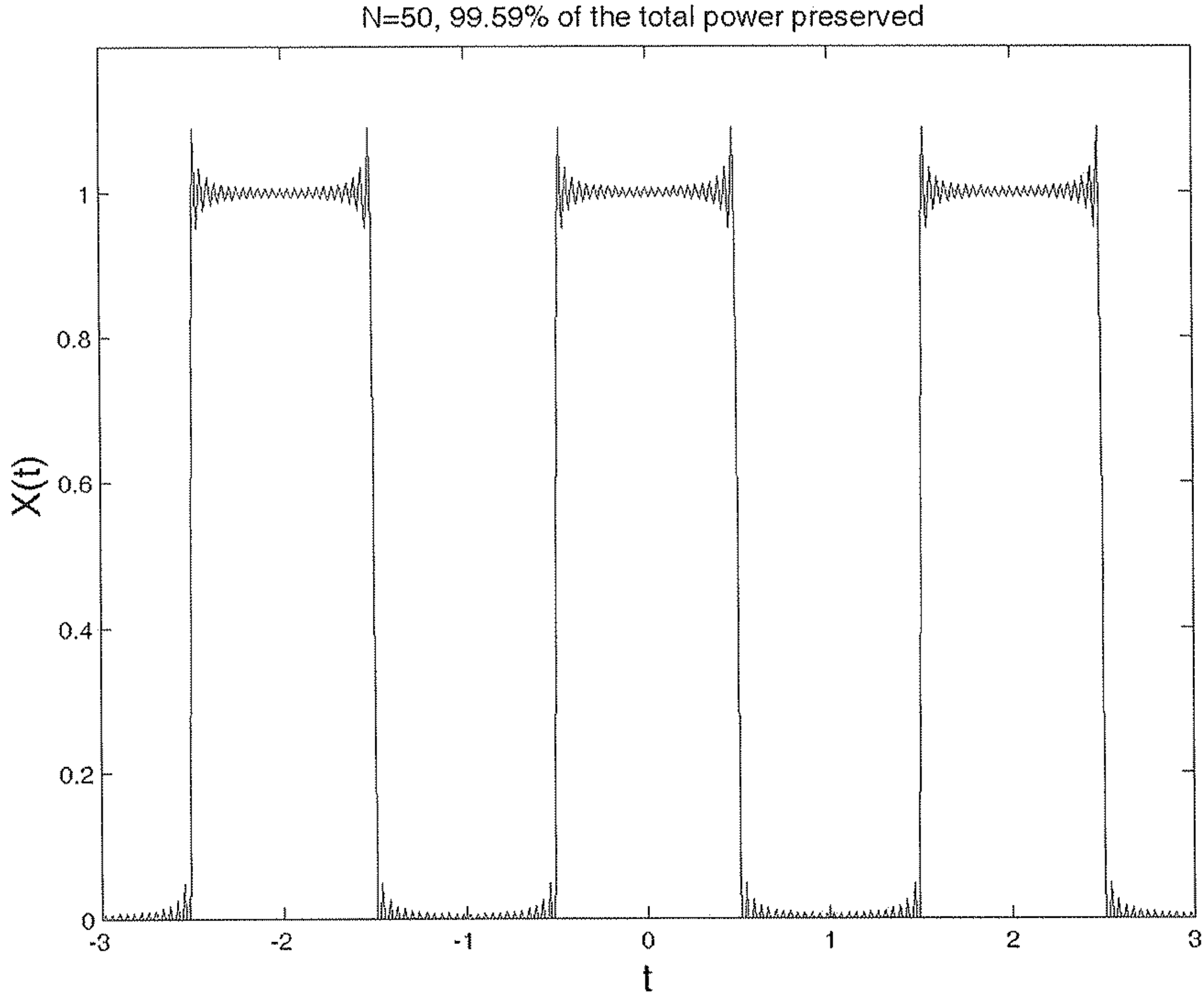

N=5, 96.65% of the total power preserved
X(t)
t
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-3
-2
-1
0
1
2
3

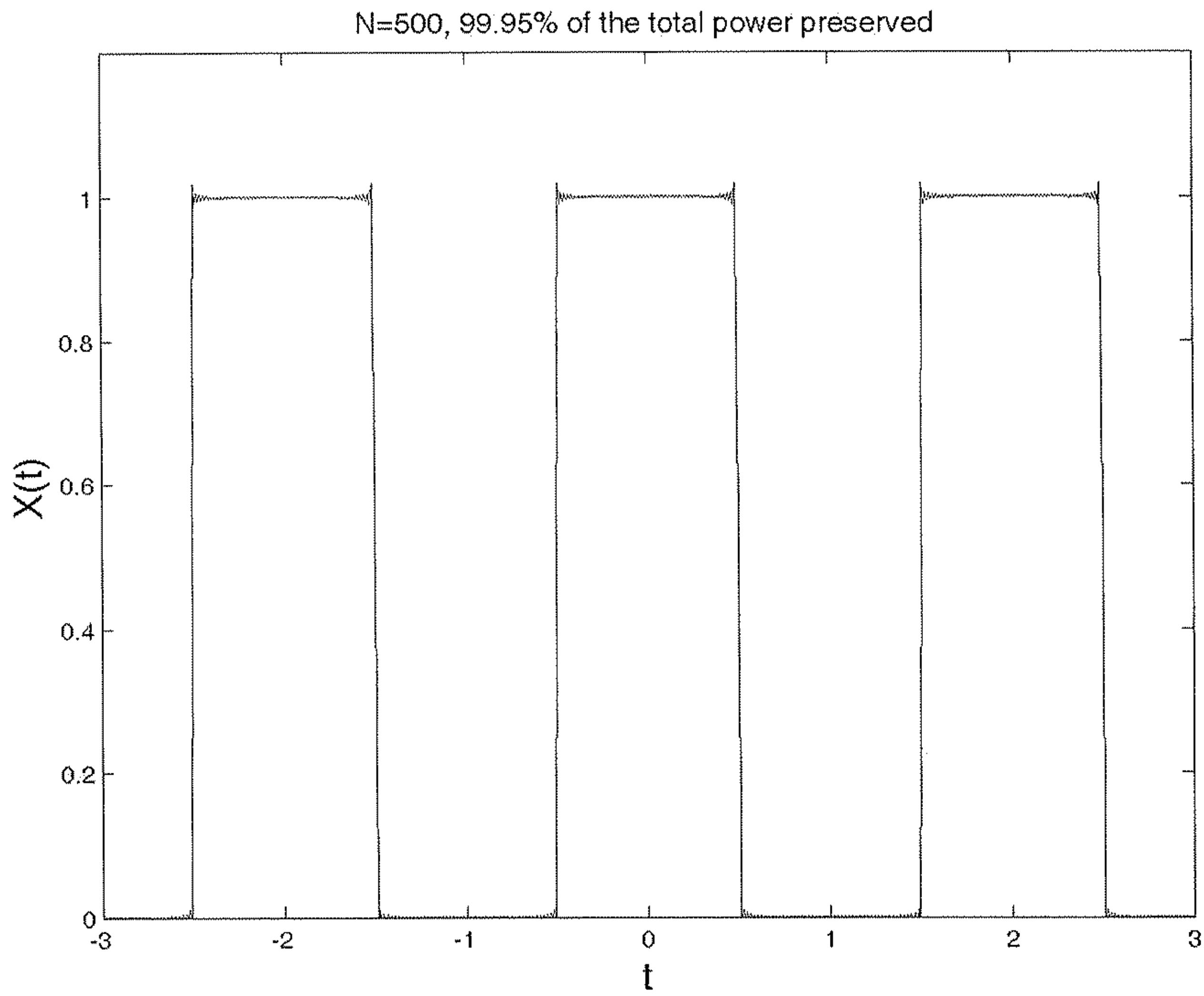


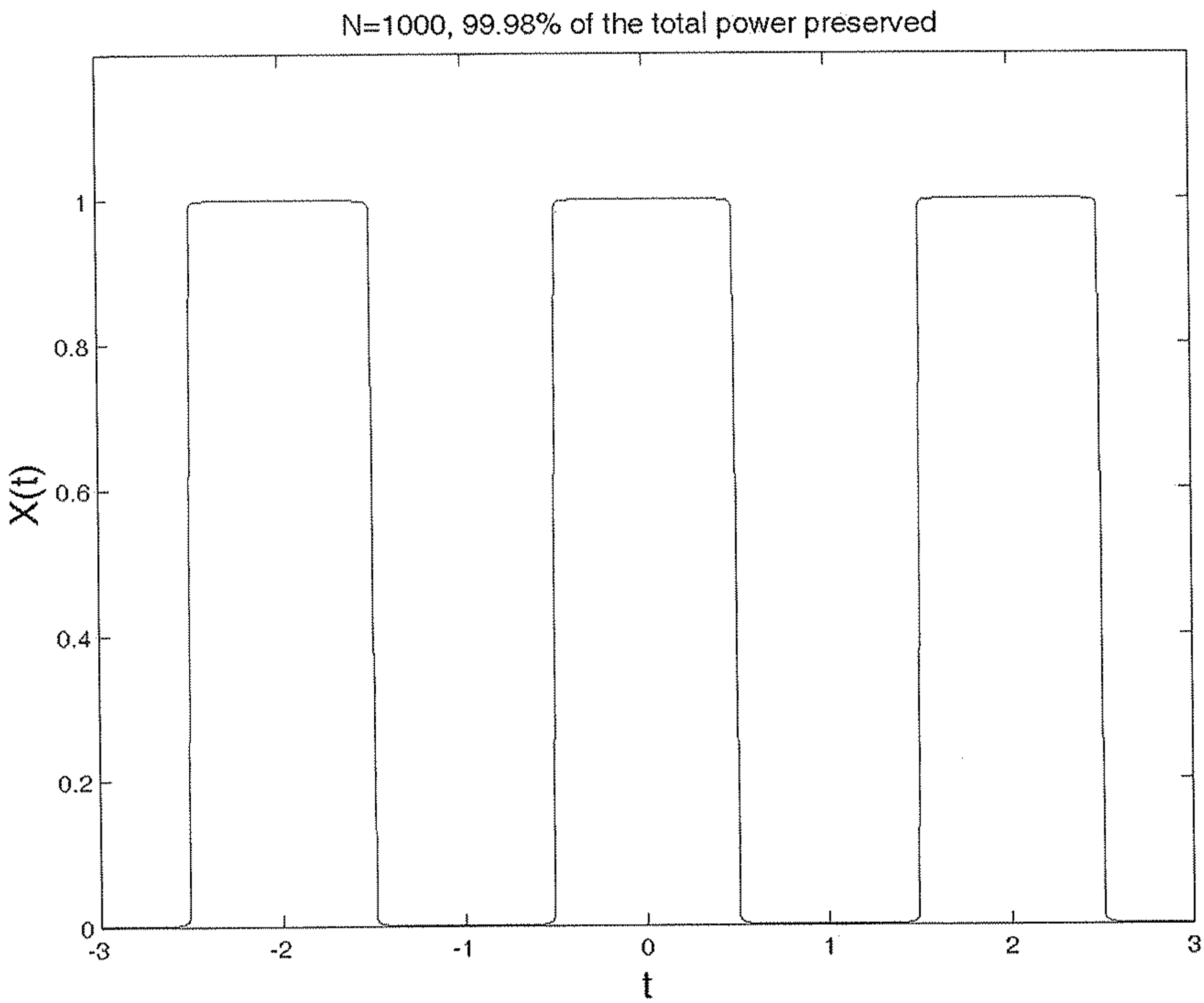
N=9, 97.98% of the total power preserved
X(t)
t
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-3
-2
-1
0
1
2
3



N=30, 99.32% of the total power preserved
X(t)
t
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-3
-2
-1
0
1
2
3


N=50, 99.59% of the total power preserved
X(t)
t
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
-3
-2
-1
0
1
2
3


N=500, 99.95% of the total power preserved
X(t)
t
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
-3
-2
-1
0
1
2
3


N=1000, 99.98% of the total power preserved
X(t)
t
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-3
-2
-1
0
1
2
3

Άσκηση 3.

$$y[n-2]+y[n-1]+y[n]=x[n]+\frac{1}{2}x[n-1]$$

$$\overset{Z}{\Leftrightarrow} z^{-2}Y(z)+z^{-1}Y(z)+Y(z)=X(z)+\frac{1}{2}z^{-1}X(z)$$

$$\Leftrightarrow \frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{z^{-2}+z^{-1}+1} \Leftrightarrow H(z)=\frac{z^2+\frac{1}{2}z}{z^2+z+1}$$

ρίζες $z_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{H(z)}{z}=\frac{z+\frac{1}{2}}{\left(z+\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z+\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$=\frac{A}{z+\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}}+\frac{B}{z+\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1/2}{z+\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}}+\frac{1/2}{z+\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\Rightarrow H(z)=\frac{1/2\ z}{z+\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}}+\frac{1/2\ z}{z+\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\xleftarrow{\text{Αιτιατό}} h[n]=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n u[n]+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n u[n]$$

$$=\frac{1}{2}\left(1\angle -\frac{2\pi}{3}\right)^n u[n]+\frac{1}{2}\left(1\angle \frac{2\pi}{3}\right)^n u[n]$$

$$=\left[\frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{3}n}+\frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi}{3}n}\right]u[n]=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right)u[n]$$

Το σύστημα είναι ασταθές επειδή οι πόλοι έχουν μέτρο 1

Άσκηση 4

α) $y[n] = x[n+2] - x[n-2]$

$\Leftrightarrow Y(e^{jw}) = e^{j2w} X(e^{jw}) - e^{-j2w} X(e^{jw})$

$\Leftrightarrow \dfrac{Y(e^{jw})}{X(e^{jw})} = e^{j2w} - e^{-j2w} \Leftrightarrow H(e^{jw}) = j\sin(2w)$

$|H(e^{jw})| = |j\sin(2w)| = |\sin(2w)|$

$\angle H(e^{jw}) = \angle j\sin(2w)$

γ) $H\left(\frac{\pi}{2}\right) = j\sin\left(2\frac{\pi}{2}\right) = j\sin(\pi) = -j = 1^{\angle -90^\circ}$

$H(\pi) = j\sin(2\pi) = \phi$

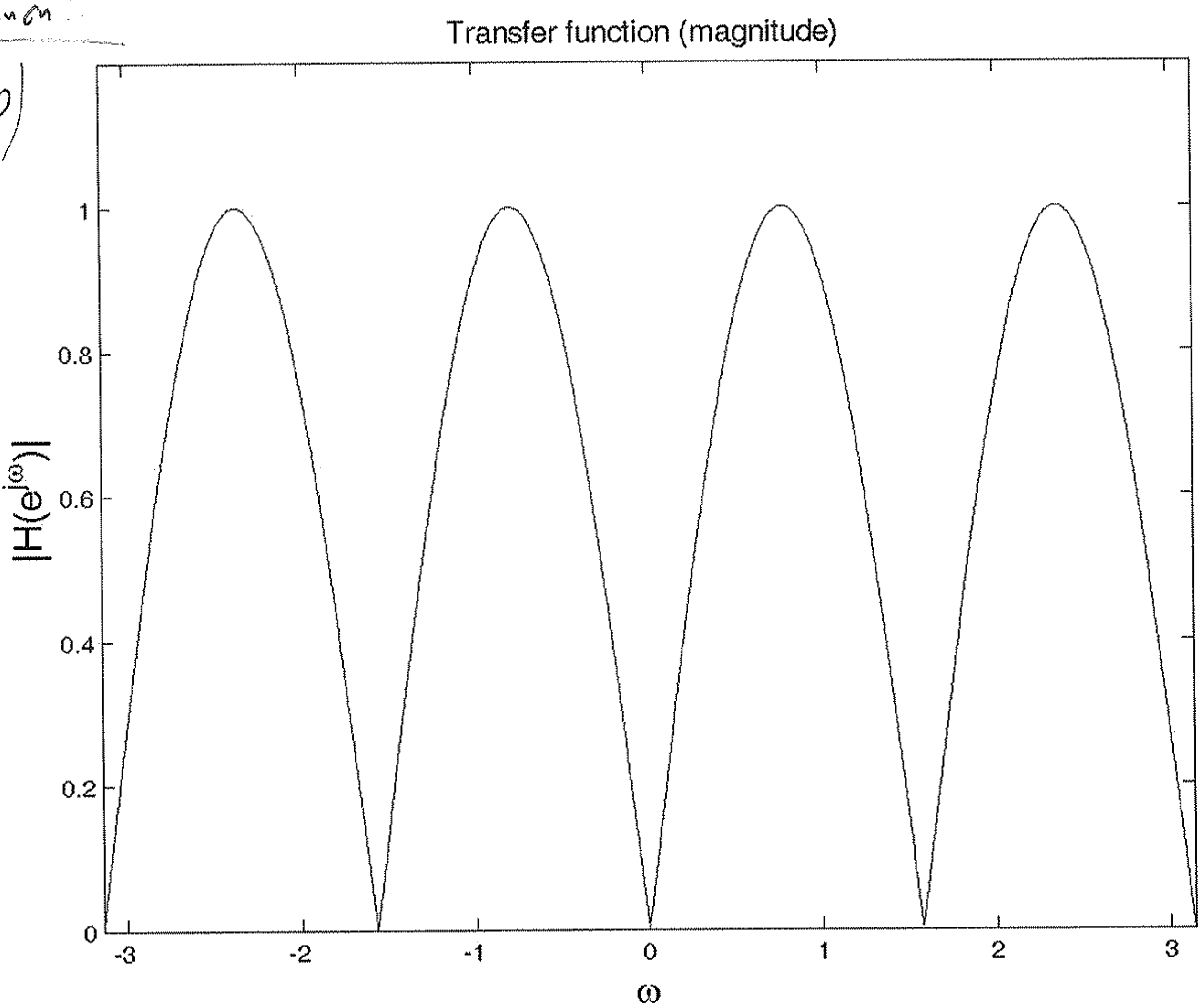
$H\left(\frac{\pi}{3}\right) = j\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = j\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}^{\angle 90^\circ}$

$y[n] = \cos\left(n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)u[n] + 2\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(n\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right)u[n]$

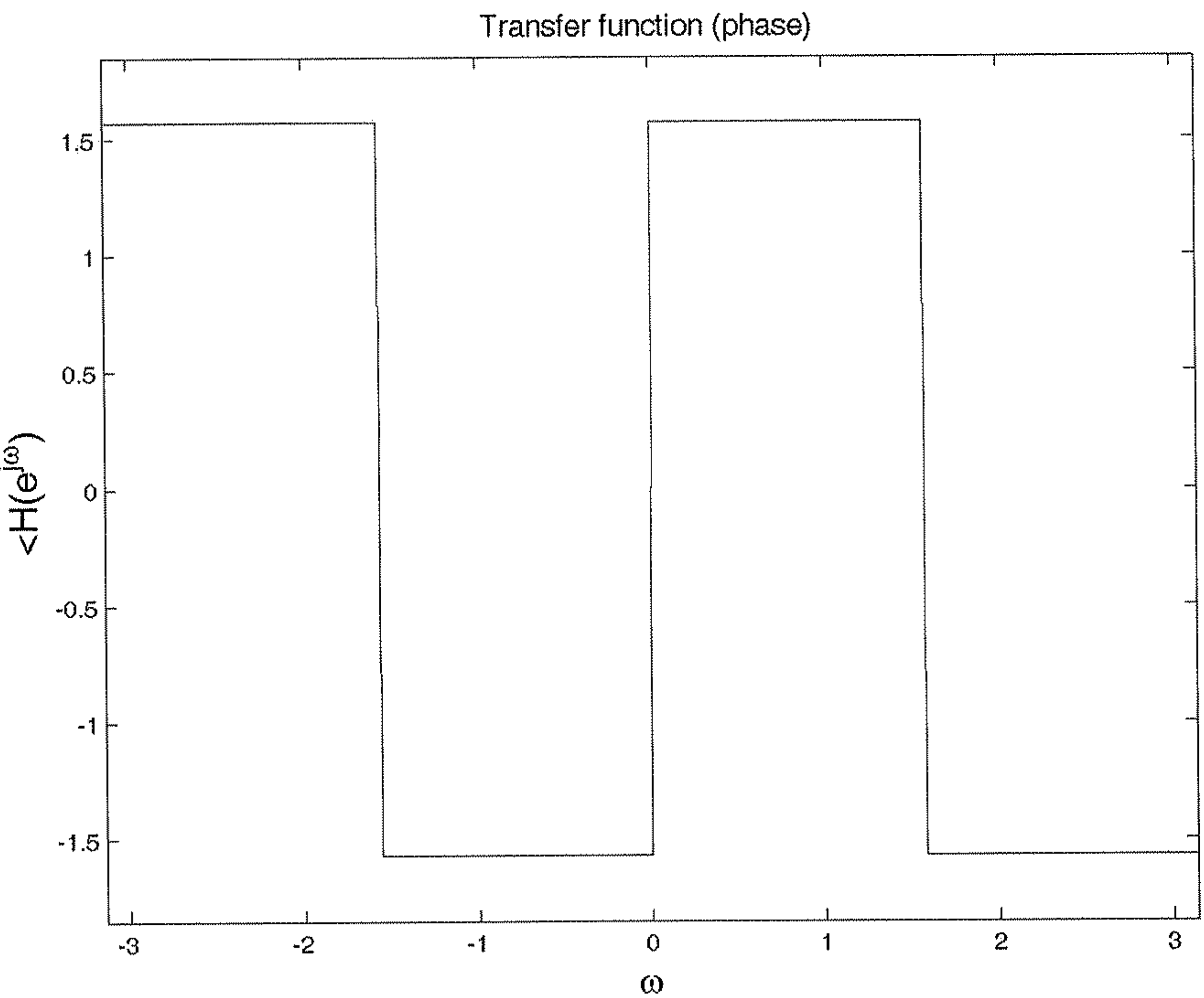
$= \cos\left[(n+1)\frac{\pi}{2}\right]u[n] + \sqrt{3}\cos\left(n\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right)u[n]$

Άσκηση:

4 β)



Transfer function (magnitude)
$|H(e^{j\omega})|$
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
-3
-2
-1
0
1
2
3
ω



Transfer function (phase)
$<H(e^{j\omega})$
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-3
-2
-1
0
1
2
3
ω

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
Μάθημα: **ΠΛΥ509 Σήματα και Συστήματα**
Παν. έτος 2011-2012
Διδάσκων: Χ. Νίκου

Σειρά Ασκήσεων 3

Παράδοση: 1 Φεβρουαρίου 2012

Άσκηση 1 (40%)

Ένα σύστημα διακριτού χρόνου περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών:

$$y[n] - \frac{\sqrt{3}}{4}y[n-1] + \frac{1}{16}y[n-2] = \frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{4}x[n-1]$$

α) Αν το σύστημα είναι αιτιατό, να υπολογιστεί η συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ και η κρουστική απόκριση $h[n]$ του συστήματος.

β) Είναι το σύστημα ευσταθές;

Άσκηση 2 (30%)

Ένα ΓΧΑ σύστημα διακριτού χρόνου περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών:

$$y[n] = x[n+3] - x[n-3]$$

α) Να υπολογιστεί η απόκριση συχνοτήτων $H(e^{j\omega})$ του συστήματος.

β) Να γίνει προσεκτικά η γραφική παράσταση του μέτρου $|H(e^{j\omega})|$ της απόκρισης συχνοτήτων.

γ) Να γραφεί η $H(e^{j\omega})$ στη μορφή

$$H(e^{j\omega}) = R(e^{j\omega})e^{-jn_0}$$

όπου $R(e^{j\omega})$ είναι μία πραγματική συνάρτηση και το n_0 ένας πραγματικός αριθμός.

δ) Να υπολογιστεί η έξοδος του συστήματος για είσοδο:

$$x[n] = -2\cos\left(\frac{\pi}{9}n\right) + 4\sin(\pi n)$$

Άσκηση 3 (30%)

Να αποφανθείτε αν οι παρακάτω πορτάσεις είναι σωστές ή λανθασμένες. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

α) Αν το σήμα συνεχούς χρόνου

$$x(t) = P_{T_0}(t) = u(t + T_0) - u(t - T_0)$$

υποστεί δειγματοληψία με περίοδο δειγματοληψίας $T_s < 2T_0$, δεν προκύπτει επικάλυψη φάσματος (aliasing).

β) Αν το σήμα συνεχούς χρόνου $x(t)$, με μετασχηματισμό Fourier

$$X(\Omega) = P_{\Omega_0}(\Omega) = u(\Omega + \Omega_0) - u(\Omega - \Omega_0)$$

υποστεί δειγματοληψία με περίοδο δειγματοληψίας $T_s < \pi/\Omega_0$, δεν προκύπτει επικάλυψη φάσματος (aliasing).

γ) Αν το σήμα συνεχούς χρόνου $x(t)$, με μετασχηματισμό Fourier

$$X(\Omega) = P_{\Omega_0/2}\left(\Omega - \frac{\Omega_0}{2}\right) = u(\Omega) - u(\Omega - \Omega_0)$$

υποστεί δειγματοληψία με περίοδο δειγματοληψίας $T_s < 2\pi/\Omega_0$, δεν προκύπτει επικάλυψη φάσματος (aliasing).

Άσκηση 1

α) $Y(z) - \frac{\sqrt{3}}{4} z^{-1} Y(z) + \frac{1}{16} z^{-2} Y(z) = \frac{1}{2} X(z) + \frac{1}{4} X(z) \Leftrightarrow$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} z^{-1}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{4} z^{-1} + \frac{1}{16} z^{-2}} = \frac{\frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{4}}{z^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} z + \frac{1}{16}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{\frac{1}{2} z + \frac{1}{4}}{\left(z - \frac{1}{4} e^{j\pi/6}\right)\left(z - \frac{1}{4} e^{-j\pi/6}\right)} \longrightarrow \text{πόλοι}$$

$z_1 = 0{,}2165 + j0{,}125 = \frac{1}{4} e^{j\pi/6}$

$z_2 = 0{,}2165 - j0{,}125 = \frac{1}{4} e^{-j\pi/6}$

Με ανάλυση σε απλά κλάσματα:

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{1{,}4547\, e^{-j80{,}1^\circ}}{z - \frac{1}{4} e^{j\pi/6}} + \frac{1{,}4547\, e^{j80{,}1^\circ}}{z - \frac{1}{4} e^{-j\pi/6}} \Leftrightarrow$$

$$H(z) = 1{,}4547\, e^{-j80{,}1^\circ} \frac{z}{z - \frac{1}{4} e^{j\pi/6}} + 1{,}4547\, e^{j80{,}1^\circ} \frac{z}{z - \frac{1}{4} e^{-j\pi/6}} \xleftarrow{\text{αιτιατό}}$$

$$h[n] = 1{,}4547\, e^{-j80{,}1^\circ} \left(\frac{1}{4} e^{j\pi/6}\right)^n u[n] + 1{,}4547\, e^{j80{,}1^\circ} \left(\frac{1}{4} e^{-j\pi/6}\right)^n u[n]$$

$$= 1{,}4547 \left(\frac{1}{4}\right)^n \left[e^{j\left(\frac{\pi}{6} n - 80{,}1^\circ\right)} + e^{-j\left(\frac{\pi}{6} n - 80{,}1^\circ\right)} \right] u[n]$$

$$= 2{,}9094 \left(\frac{1}{4}\right)^n \cos\left(\frac{\pi}{6} n - 80{,}1^\circ\right) u[n]$$

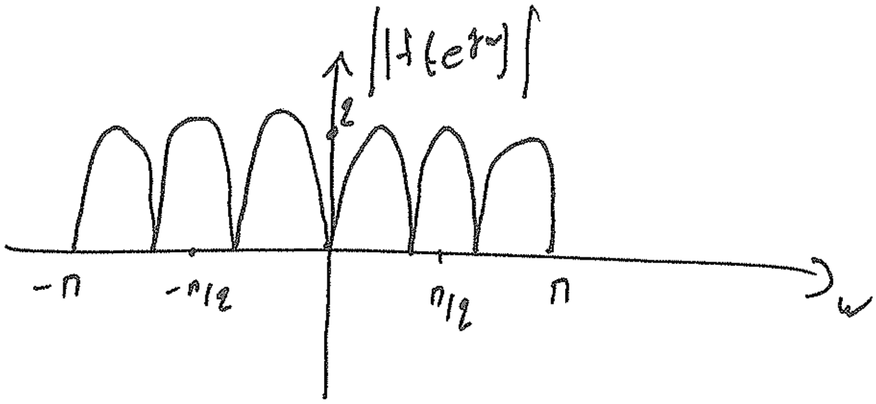
β) Το σύστημα είναι ευσταθές επειδή το μέτρο των πόλων είναι μικρότερο από τη μονάδα.

Άσκηση 2

α) $y[n] = x[n+3] - x[n-3] \Leftrightarrow Y(e^{j\omega}) = e^{j3\omega} X(e^{j\omega}) - e^{-j3\omega} X(e^{j\omega})$

$\Leftrightarrow H(e^{j\omega}) = \dfrac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = e^{j3\omega} - e^{-j3\omega} = j2\sin(3\omega)$

β) $|H(e^{j\omega})| = |j2\sin(3\omega)| = 2|\sin(3\omega)|$



Μηδενίζεται το $|H(e^{j\omega})|$ στις θέσεις $0, \pm\frac{\pi}{3}, \pm\frac{2\pi}{3}, \pm\pi$

Προκύπτει θέτοντας $3\omega = k\pi \Leftrightarrow \omega = k\frac{\pi}{3}$, $k = 0, \pm1, \pm2, \pm3$

γ) $H(e^{j\omega}) = j2\sin(3\omega) = e^{j\pi/2} \cdot 2 \cdot \sin(3\omega) = 2\sin(3\omega) \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$

δ) $H(e^{j\pi/9}) = 2 \cdot \sin\left(3\frac{\pi}{9}\right) e^{j\pi/2} = 2\sin(\pi/3) e^{j\pi/2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} e^{j\pi/2}$

$= \sqrt{3}\, e^{j\pi/2}$

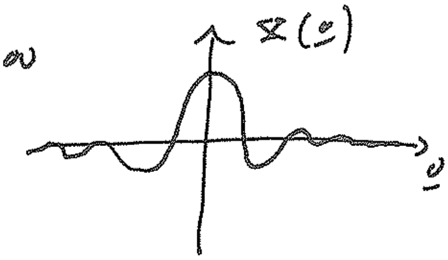
$H(e^{j\pi}) = \emptyset$

Άρα $y[n] = -2\sqrt{3}\cos\left(\pi/9\, n + \frac{\pi}{2}\right)$

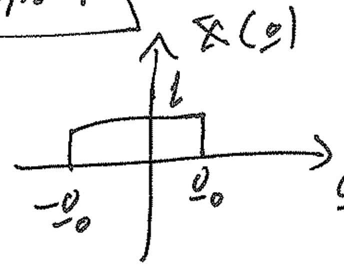
Άσκηση 3

α) $x(t) = P_{T_0}(t) \longleftrightarrow X(\Omega) = 2T_0 \dfrac{\sin(\Omega T_0)}{\Omega T_0}$

Το $X(\Omega)$ δεν έχει πεπερασμένη μέγιστη συχνότητα επειδή εκτείνεται από το $-\infty$ μέχρι το $+\infty$



Συνεπώς, δε μπορεί να δειγματοληπτηθεί ιδανικά $\Longrightarrow$ Η πρόταση είναι $\boxed{\text{λανθασμένη}}$

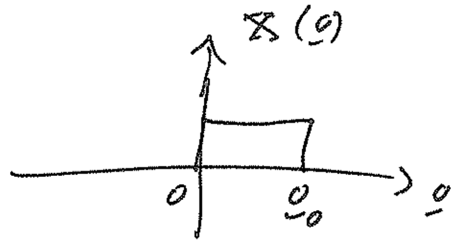


β) $X(\Omega) = u(\Omega+\Omega_0) - u(\Omega-\Omega_0)$

Μέγιστη συχνότητα $\Omega_0 \Longrightarrow$ Ιδανική συχνότητα δειγματοληψίας

$\Omega_s \geq 2\Omega_0 \Leftrightarrow T_s \leq \frac{1}{2} T_0 \Leftrightarrow T_s \leq \frac{1}{2}\frac{2\pi}{\Omega_0} \Leftrightarrow T_s \leq \frac{\pi}{\Omega_0}$

Η πρόταση είναι $\boxed{\text{αληθής}}$

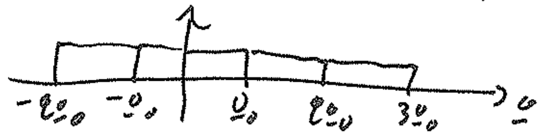


γ) $X(\Omega) = u(\Omega) - u(\Omega-\Omega_0)$

Για τους ίδιους λόγους με το ερώτημα β), πρέπει

$\Omega_s \geq 2\Omega_0 \Leftrightarrow T_s \leq \frac{\pi}{\Omega_0}$ και η πρόταση είναι $\boxed{\text{ψευδής}}$

(Δειγματοληψία με $\Omega_s = 2\Omega_0$ δίνει φάσμα σήματος διακριτού χρόνου:



)

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
Μάθημα: **ΠΛΥ607 Σήματα και Συστήματα**
Παν. έτος 2013-2014
Διδάσκων: Χ. Νίκου

Σειρά Ασκήσεων 3

Παράδοση: Πέμπτη 5 Ιουνίου 2014

Άσκηση 1 (15%)

Ένα ΓΧΑ σύστημα διακριτού χρόνου έχει κρουστική απόκριση:

$$h[n] = 5\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n].$$

Να υπολογιστεί η έξοδος του συστήματος $y[n]$ αν στην είσοδό του διαβιβαστεί το σήμα:

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n].$$

Η άσκηση να λυθεί με χρήση του μετασχηματισμού Ζ (όχι με συνέλιξη).

Άσκηση 2 (30%)

Ένα σύστημα διακριτού χρόνου περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών:

$$y[n] - 1.2135\,y[n-1] + 0.5625\,y[n-2] = \frac{2}{3}x[n] + \frac{1}{3}x[n-1]$$

α) Αν το σύστημα είναι αιτιατό, να υπολογιστεί η συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ και η κρουστική απόκριση $h[n]$ του συστήματος.

β) Είναι το σύστημα ευσταθές;

Άσκηση 3 (30%)

Ένα ΓΧΑ σύστημα διακριτού χρόνου περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών:

$$y[n] - \frac{1}{6}y[n-1] - \frac{1}{6}y[n-2] = x[n]$$

α) Να υπολογιστεί η απόκριση συχνοτήτων $H(e^{j\omega})$ του συστήματος.

β) Να υπολογιστεί η έξοδος του συστήματος για είσοδο:

$$x[n] = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right) + \frac{1}{3}\cos(\pi n) + 1$$

Άσκηση 4 (25%)

Δίνεται το σήμα συνεχούς χρόνου:

$$x(t) = \frac{\sin^2(100\pi t)}{(\pi t)^2}.$$

Να υπολογιστεί η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας του σήματος (συχνότητα Nyquist) ώστε να μην εμφανίζεται επικάλυψη συχνοτήτων (aliasing).

Άσκηση 1

$$h[n] = 5\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] \Leftrightarrow H(z) = 5\,\frac{z}{z+1/2}, \quad |z| > 1/2$$

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \Leftrightarrow X(z) = \frac{z}{z-1/3}, \quad |z| > 1/3$$

$$Y(z) = H(z)\,X(z) = \frac{5z^2}{(z+1/2)(z-1/3)}, \quad |z| > 1/3$$

$$\Leftrightarrow \frac{Y(z)}{z} = \frac{5}{(z+1/2)(z-1/3)} = \text{--- Απλά κλάσματα ---} =$$

$$= \frac{3}{z+1/2} + \frac{2}{z-1/3} \Leftrightarrow Y(z) = 3\,\frac{z}{z+1/2} + 2\,\frac{z}{z-1/3}$$

$$\Leftrightarrow y[n] = 3\left(-1/2\right)^n u[n] + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

Άσκηση 2

a) $Y(z) - 1{,}2135\, z^{-1} Y(z) + 0{,}5625\, z^{-2} Y(z) = \frac{2}{3} X(z) + \frac{1}{3} z^{-1} X(z)$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{3} z^{-1}}{1 - 1{,}2135\, z^{-1} + 0{,}5625\, z^{-2}} = \frac{\frac{2}{3} z^2 + \frac{1}{3} z}{z^2 - 1{,}2135\, z + 0{,}5625}$$

$$\Leftrightarrow \frac{H(z)}{z} = \frac{\frac{2}{3} z + 1/3}{\left(z - \frac{3}{4} e^{j\pi/5}\right)\left(z - \frac{3}{4} e^{-j\pi/5}\right)} \rightarrow \text{πόλοι:}$$

$z_1 = 0{,}6068 + j0{,}4409$

$z_2 = 0{,}6068 - j0{,}4409$

ή $z_1 = \frac{3}{4} e^{j\pi/5}$

$z_2 = 3/4\, e^{-j\pi/5}$

Με ανάλυση σε απλά κλάσματα:

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{0{,}9008\, e^{-j68{,}3^\circ}}{z - \frac{3}{4} e^{j\pi/5}} + \frac{0{,}9008\, e^{j68{,}3}}{z - \frac{3}{4} e^{-j\pi/5}}$$

$$\Leftrightarrow H(z) = 0{,}9008\, e^{-j68{,}3^\circ} \cdot \frac{z}{z - \frac{3}{4} e^{j\pi/5}} + 0{,}9008\, e^{j68{,}3^\circ} \frac{z}{z - \frac{3}{4} e^{-j\pi/5}}$$

$$\Leftrightarrow h[n] = 0{,}9008\, e^{-j68{,}3} \left(\frac{3}{4} e^{j\pi/5}\right)^n u[n] + 0{,}9008\, e^{j68{,}3} \left(\frac{3}{4} e^{-j\frac{\pi}{5}}\right)^n u[n]$$

$$\Leftrightarrow h[n] = 0{,}9008 \left(\frac{3}{4}\right)^n \left[e^{j\left(\frac{\pi}{5} n - 68{,}3^\circ\right)} + e^{-j\left(\frac{\pi}{5} n - 68{,}3^\circ\right)} \right] u[n]$$

$$\Leftrightarrow h[n] = 0{,}9008 \left(\frac{3}{4}\right)^n \cos\left(\frac{\pi}{5} n - 68{,}3^\circ\right) u[n]$$

β) Το σύστημα είναι ευσταθές επειδή οι πόλοι βρίσκονται εντός του κύκλου $|z| = 1$

Άσκηση 3

α) $y[n] - \frac{1}{6} y[n-1] - \frac{1}{6} y[n-2] = x[n] \Leftrightarrow$

$$Y(z) - \frac{1}{6} z^{-1} Y(z) - \frac{1}{6} z^{-2} Y(z) = X(z) \Leftrightarrow$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{6} z^{-1} - \frac{1}{6} z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - \frac{1}{6} z - \frac{1}{6}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{H(z)}{z} = \frac{z}{z^2 - \frac{1}{6} z - \frac{1}{6}} = \text{---- Απλά κλάσματα ....} =$$

$$= \frac{3}{5} \frac{1}{z - 1/2} + \frac{2}{5} \frac{1}{z + 1/3}$$

$$\Leftrightarrow H(z) = \frac{3}{5} \frac{z}{z - 1/2} + \frac{2}{5} \frac{z}{z + 1/3} \qquad \begin{matrix} |z| > 1/2 \\ \boxed{} \\ |z| > 1/3 \end{matrix}$$

ως αιτιακό
$\Downarrow$
Ο $|z| = 1$
ανήκει
στην Π.Σ

$$H(e^{jw}) = \frac{3}{5} \frac{e^{jw}}{e^{jw} - 1/2} + \frac{2}{5} \frac{e^{jw}}{e^{jw} + 1/3} =$$

$$= \frac{3}{5} \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-jw}} + \frac{2}{5} \frac{1}{1 + \frac{1}{3} e^{-jw}}$$

β) Είσοδος $x[n] = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right) + \frac{1}{3}\cos(\pi n) + 1$

Πρόκειται για άθροισμα σημάτων απλής συχνότητας :

$$H\left(e^{j\frac{\pi}{3}}\right) = \frac{3}{5}\,\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\pi/3}} + \frac{2}{5}\,\frac{1}{1+\frac{1}{3}e^{-j\pi/3}} = 0{,}96\,e^{-j16{,}10}$$

$$H\left(e^{j\pi}\right) = \frac{3}{5}\,\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\pi}} + \frac{2}{5}\,\frac{1}{1+\frac{1}{3}e^{-j\pi}} = 1$$

$$H\left(e^{j0}\right) = \frac{3}{5}\,\frac{1}{1-\frac{1}{2}} + \frac{2}{5}\,\frac{1}{1+1/3} = \frac{3}{2}$$

Άρα,

$$y[n] = \frac{1}{2}\cdot 0{,}96\sin\left(\frac{\pi}{3}n - 16{,}10^{\circ}\right) + \frac{1}{3}\cos(\pi n) + \frac{3}{2}\cdot 1$$

$$= 0{,}48\sin\left(\frac{\pi}{3}n - 16{,}10^{\circ}\right) + \frac{1}{3}\cos(\pi n) + \frac{3}{2}$$

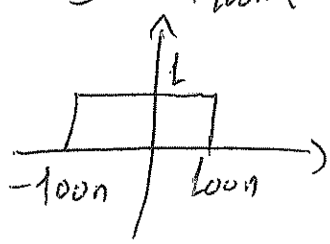
Άσκηση 4

$$x(t) = \frac{\sin^2(100\pi t)}{(\pi t)^2} = \frac{\sin(100\pi t)}{\pi t} \; \frac{\sin(100\pi t)}{\pi t}$$

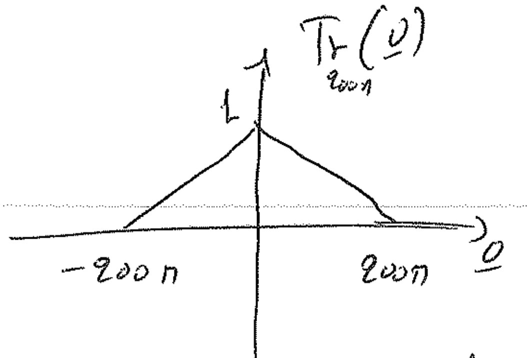
Πρέπει να βρούμε τη μέγιστη συχνότητα του σήματος:

$$X(\underline{\Omega}) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\left\{ \frac{\sin(100\pi t)}{\pi t} \right\} * \mathcal{F}\left\{ \frac{\sin(100\pi t)}{\pi t} \right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi} P_{100\pi}(\underline{\Omega}) * P_{100\pi}(\underline{\Omega})$$ με



Άρα: $$X(\underline{\Omega}) = \frac{1}{2\pi} Tr_{200\pi}(\underline{\Omega})$$ με



Τριγωνικός παλμός στη συχνότητα

Η μέγιστη συχνότητα που έχει το $x(t)$ είναι 200π Hz.

Άρα η συχνότητα Nyquist είναι:

$$F_N = 2 \cdot 200\pi = 400\pi \text{ Hz}$$