Μάθημα 11

* * * 24/5/18 * * *

Κωδικοποίηση καναλιού

$A, \Pi_A \longrightarrow$ ΚΑΝΑΛΙ $\longrightarrow B, \Pi_B$

- Ανίχνευση σφάλματος
- Διόρθωση σφάλματος

Κωδικές επαναλήψεις (κάθε bit επαναλαμβάνεται π.χ. n φορές) ↓ ο ρυθμός μετάδοσης

Έλεγχος άρτιας ή περιττής ισοτιμίας (πρόσθεση ψηφίου ελέγχου ισοτιμίας)

- Ανιχνεύει απλό σφάλμα
- Δεν ανιχνεύει διπλό σφάλμα

Κριτήρια Αποκωδικοποίησης

Δέκτης: Εμφανίζεται b_j

Ερώτημα: Ποιο είναι το a_i που εξέπεμψε ο πομπός;

Ελαχιστοποίηση του σφάλματος αποκωδικοποίησης $\Rightarrow$ κανόνες απόφασης: Αντιστοίχηση των $b_j \longleftrightarrow a_i$

Γνωρίζουμε το $p(a_i)\ \forall i$ και $\Pi_{B|A} = \{p(b_j/a_i)\}, \forall j \forall i$

Κανόνας 1: Κανόνας του τέλειου παρατηρητή $\longrightarrow$ βλέπουμε το b_j στο δέκτη

ή

Κανόνας της μέγιστης από των υστέρων πιθανότητας.

Επιλέγει εκείνο το a' από όλα τα a_i: $\boxed{p(a'/b_j) \geq p(a_i/b_j)}$ $\forall i = 1, \dots, P$

Πιθανότητα εσφαλμένης αποκωδικοποίησης για το b_j:

$p(E|b_j) = 1 - p(a'/b_j)$ Μέση τιμή του σφάλματος:

$$P_E = \sum_{j=1}^{P} p(E|b_j)\, p(b_j) = \sum_{j=1}^{P} [1 - p(a'/b_j)]\, p(b_j) = \sum_{j=1}^{P} p(b_j) - \sum_{j=1}^{P} p(a'/b_j)\, p(b_j)$$

$$= 1 - \sum_{j=1}^{P} p(a')\, p(b_j/a')$$

Ειδική περίπτωση:

ισοπίθανα a_i: $p(a_i) = \frac{1}{P}$

$$P_i = \frac{1}{P} \sum_{j=1}^{P} p(b_j/a')$$

Scanned by CamScanner

Κανόνας 2 : Κανόνας της μέγιστης πιθανοφάνειας (ML, Maximum Likelihood)

Επιλέγει εκείνο το a' από όλα τα a_i για το σύμβολο b_j στο δέκτη $P(b_j/a') \geq P(b_j/a_i)\ \forall i$ (Χρησιμοποιεί μόνο τον $\Pi_{B|A}$)

↓ πιθανότητα καναλιού

Ειδική περίπτωση: a_i ισοπίθανα : $p(a_i) = \frac{1}{p}, \forall i$

Τότε $p(b_j/a) = \frac{p(a_i/b_j)\cdot p(b_j)}{p(a_i)} = p\ p(b_j)\ p(a_i/b_j)$

Ο κανόνας γίνεται:

$p(b_j/a') \geq p(b_j/a_i) \Leftrightarrow p\ p(b_j)\, p(a'/b_j) \geq p\ p(b_j)\cdot p(a_i/b_j) \Leftrightarrow$

$\boxed{p(a'/b_j) \geq p(a_i/b_j)}\ \forall i$

Ο ίδιος κανόνας με τον κανόνα του MAP.

Παράδειγμα

$$\text{Κανάλι με } \Pi_{B|A} = \begin{array}{c} \xrightarrow{b_j} \\ \begin{bmatrix} 3/4 & 3/16 & 1/16 & 0 \\ 0 & 3/4 & 3/16 & 1/16 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \Big\downarrow a_i = \{\pi(b_j/a_i)\}$$

α) Να υπολογίσετε το μέσο σφάλμα αποκωδικοποίησης σύμφωνα με τον κανόνα μέγιστης πιθανοφάνειας.

(όταν τα i είναι ισοπίθανα οι κανόνες είναι ίδιοι)

Κανόνας αποκωδικοποίησης: $b_1 \longleftrightarrow a_1$

$b_2 \longleftrightarrow a_2$

$b_3 \longleftrightarrow a_3$

$b_4 \longleftrightarrow a_4$

(Θεωρώντας ισοπίθανα a_i) : $P_E = 1 - \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{4} P(b_j/a') = 1 - \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+1\right) = 18{,}7\%$

β) Να υπολογιστεί το σφάλμα σύμφωνα με τον κανόνα της μεγιστοποίησης της εκ των υστέρων πιθανότητας.

Πρέπει να υπολογιστεί ο πίνακας $\Pi_{A|B} = \{p(a_i/b_j)\}$

$p(a_i/b_j) = \frac{p(b_j/a_i)\,p(a_i)}{p(b_j)}$

$$\Pi_{A|B} = \begin{bmatrix} 1 & 1/5 & 1/16 & 0 \\ 0 & 4/5 & 3/16 & 1/21 \\ 0 & 0 & 3/4 & 4/21 \\ 0 & 0 & 0 & 16/21 \end{bmatrix}$$

Scanned by CamScanner

Αποκωδικοποίηση $b_1 \longleftrightarrow a_1$

$b_2 \longleftrightarrow a_2$

$b_3 \longleftrightarrow a_3$

$b_4 \longleftrightarrow a_4$

Αν είναι ισοπίθανα το σφάλμα θα είναι το ίδιο

Scanned by CamScanner

2ο Θεώρημα Shannon

Δίνονται

- Πηγή πληροφορίας με μνήμη, αλφάβητο p συμβόλων και εντροπία H.
- Κανάλι χωρητικότητας C
- $\varepsilon > 0$

Αν $H \le C$, υπάρχει κώδικας που εξασφαλίζει πιθανότητα εσφαλμένης αποκωδικοποίησης $\Pi_\varepsilon \le \varepsilon$.
Ο κώδικας αντιστοιχίζει τα σύμβολα της πηγής σε κώδικα μήκους ν ψηφίων: $\lim_{\nu \to +\infty} \Pi_\varepsilon = 0$

Αν $H > C$ δεν υπάρχει τέτοιος κίνδυνος.

<u>Υπενθύμιση:</u> Γνωρίζουμε ότι $I = H(A) - H(A|B)$, $C = \max_{\pi(a_i)} I$

<u>Προσοχή</u>: Η χωρητικότητα είναι η σημαντικότερη παράμετρος. Μιλάμε για κώδικες καναλιού.

Απόδειξη για τυπικά μηνύματα

(Σημείωση: Η απόδειξη που ακολουθεί δεν μπαίνει)

- κανάλι χωρητικότητας $C = H(X) - H(X|Y)$
- Πηγή με $H'(X) < C$
- πιθανότητα μετάδοσης τυπικού μηνύματος $m(x_i)$

μήκος L

$\boxed{X_i \Pi_x} \rightarrow \boxed{\text{Κανάλι}} \rightarrow \boxed{Y_j \Pi_j}$

τυπικά μηνύματα που εκπέμπει η πηγή X.

$$p[m(x_i) \in M_R] = \frac{2^{\ell H'(x)}}{2^{\ell H(x)}} = 2^{\ell[H'(x) - H(x)]}$$

τυπικά μηνύματα που περνάνε μέσα από το κανάλι

- Σφάλμα από δέκτη. Εμφανίζεται το $m(x_j)$, $i \neq j$
- Ο αριθμός των διαφορετικών μηνυμάτων με σφάλμα είναι $M_{X|Y}$

Έχω δει στον δέκτη ένα X που είναι σφάλμα του Y.

Scanned by CamScanner

· Πιθανότητα εσφαλμένης μετάδοσης $P_E = \sum_{j=1}^{M_{x/y}} p[m(x_j) \in M_R]$

$$p[m(x_j) \in M_{x/y}] \Leftrightarrow P_E \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{M_{x/y}} [p(x_j \in M_R)] = \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{M_{x/y}} 2^{\ell[H'(x)-H(x)]}$$

$$= |M_{x/y} - 1| \, 2^{\ell[H'(x)-H(x)]} = [2^{\ell H(x/y)} - 1] \, 2^{\ell[H'(x)-H(x)]} \quad \mathbf{(1)}$$

$$H'(x) < C \Leftrightarrow H'(x) < H(x) - H(x/y) \Leftrightarrow H'(x) = H(x) - H(x/y) - \varepsilon \quad \mathbf{(2)}$$

$$(1) \wedge (2) \Leftrightarrow P_E \leq [2^{\ell H(x/y)} - 1] \, 2^{\ell[H(x) - H(x/y) - \varepsilon - H(x)]}$$

$$= [2^{\ell H(x/y)} - 1] \, 2^{-\ell[H(x/y) + \varepsilon]}$$

$$= 2^{-\ell\varepsilon} - 2^{-\ell H(x/x) - \varepsilon} = 2^{-\ell\varepsilon} [1 - 2^{-\ell H(x/y)}]$$

$$= 2^{-\ell\varepsilon} \underbrace{\left[1 - \frac{1}{2^{\ell H(x/y)}}\right]}_{\text{ελάχιστα μικρότερο του 1.}} \Leftrightarrow P_E \leq 2^{-\ell\varepsilon}$$

! Μεγαλώνοντας πολύ το ℓ έχω $P_E \to 0$

Ανίχνευση και διόρθωση σφαλμάτων

- Έλεγχος ισοτιμίας (προσθήκη ψηφίων ελέγχου ισοτιμίας)
  - Ανίχνευση απλού σφάλματος
  - Δεν ανιχνεύει διπλό σφάλμα
  - Αυξάνει η πολυπλοκότητα
  - Το σφάλμα μπορεί να εκφραστεί σε ψ.ε.

Σε κωδική λέξη μήκους ν ψηφίων με πιθανότητα αλλοίωσης q, η πιθανότητα να αλλοιωθούν ξ από αυτά τα ψηφία είναι διωνυμική

$$P(\xi) = \binom{\nu}{\xi} (1-q)^{\nu-\xi} q^{\xi}$$

Scanned by CamScanner

- Διδιάστατος έλεγχος ισοτιμίας

Κωδική λέξη 1
Κωδική λέξη 2
Κωδική λέξη 3
.
.
.
Κωδική λέξη μ

| Ψ. Ε. | } μ Ψ.Ε

| Ψ. Ε. |

ν Ψ.Ε.

Αρχικά μ κωδικές λέξεις μήκους ν η καθε μία μ,ν ψηφία

Τελικά $(\mu+1)(\nu+1)$ ψηφία

Μειώνεται η ροή πληροφορίας κατά

$$\boxed{1-\frac{\mu\nu}{(\mu+1)(\nu+1)}}$$

Κριτήριο επιλογής της κωδικής λέξης στο δέκτη με βάση τη λέξη που έλαβε ελάχιστη απόσταση Hamming.

Θεώρημα ανίχνευσης t σφαλμάτων

Ένας κώδικας καναλιού ανιχνεύει μέχρι t σφάλματα αν και μόνο αν η ελάχιστη απόσταση Hamming μεταξύ 2 κωδικών λέξεων είναι $d_{min} > t$.

Απόδειξη

Έστω a^* η κλ. που μεταδόθηκε και t bits αλλοιώθηκαν. Ο δέκτης έλαβε την b (αλλοιωμένη a^* κατά t bits) $\Rightarrow d(a^*, b) = t$

Για να ισχυριστούμε ότι η b δεν είναι κάποια άλλη κλ. προφανώς $d(b, a_i) > 0 \ \forall i$ (1)

Τριγωνική ανισότητα: $d(a^*, b) + d(b, a_i) \geq d(a^*, a_i) \Leftrightarrow d(b, a_i) \geq d(a^*, a_i) - d(a^*, b)$ (2)

Αφαίρεση κατά μέλη (1) και (2): $d(a^*, a_i) - d(a^*, b) > 0 \Leftrightarrow d(a^*, a_i) > d(a_i, b)$
$\Leftrightarrow \boxed{d(a^*, a_i) > t}$

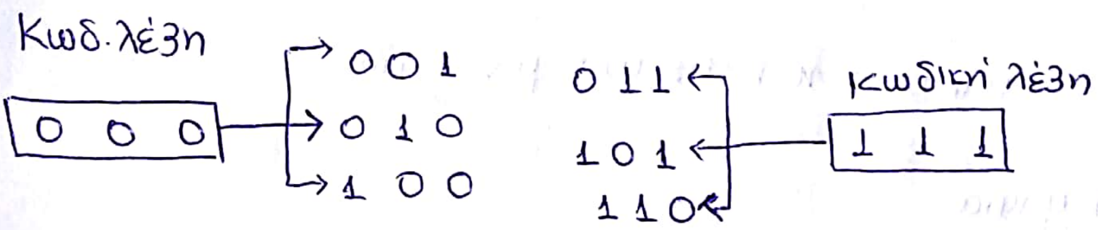
Scanned by CamScanner

Θεώρημα διόρθωσης t σφαλμάτων

Ένας κώδικας διορθώνει μέχρι t σφάλματα ανν η ελάχιστη απόσταση μεταξύ των κωδικών λέξεων είναι $d_{min} > 2t$ $(d_{min} \geq 2t+1)$

Παράδειγμα

Κώδικας με ελάχιστη απόσταση ($d_{min}=3$) μεταξύ των κωδικών λέξεων. Αν το μήκος των κωδικών λέξεων είναι 3 (δυαδικές τριάδες) υπάρχουν μόνο δύο τέτοιες τριάδες που να διορθώνουν 1 σφάλμα.



Επαλήθευση: $d_{min} > 2t \Leftrightarrow 3 > 2 \cdot 1$ ισχύει

Θεώρημα

Κώδικας που έχει κωδικές λέξεις δυαδικές ν-άδες και επιτρέπει τη διόρθωση t σφαλμάτων έχει αριθμό κ.λ. $p \leq \dfrac{2^{\nu}}{\sum_{i=0}^{t} \binom{\nu}{i}}$ (Ικανή αλλά όχι αναγκαία συνθήκη)

Απόδειξη
- Δυαδικές ν-άδες: 2^{ν}
- Για μια κωδική λέξη ο αριθμός των ν-άδων που διαφοροποιούνται κατά $0, 1, 2, \dots, t$ bits

$$\binom{\nu}{0} + \binom{\nu}{1} + \binom{\nu}{2} + \dots + \binom{\nu}{t} = \sum_{i=0}^{t} \binom{\nu}{i}$$

- Έστω ότι είναι p οι ν-άδες κωδικές λέξεις $p \sum_{i=0}^{t} \binom{\nu}{i} \leq 2^{\nu}$

Αν $\nu = 4$ και $t = 1$ προκύπτει ότι $p \leq 3,2$
πρακτικά υπάρχουν μόνο 2 τέτοιες δυαδικές 4-άδες.

*** Καλή Επιτυχία ***

Scanned by CamScanner