

Κώδικας Hamming

Επιτρέπει την αναγνώριση της θέσης του αλλοιωμένου ψηφίου (1 bit).

Η κάθε κωδική λέξη n ψηφίων αποτελείται από:

- μ ψηφία πληροφορίας (ψ.π.).
- $n-\mu$ ψηφία ελέγχου (ψ.ε.).

Με τα $n-\mu$ ψηφία ελέγχου δημιουργείται το σύνδρομο που δείχνει τη θέση του σφάλματος.

Αριθμός ψηφίων ελέγχου

Το σύνδρομο πρέπει να παίρνει τόσες διαφορετικές τιμές για να περιγράψει:

- απλό σφάλμα στα μ ψηφία πληροφορίας.
- απλό σφάλμα στα $\nu - \mu$ ψηφία ελέγχου.
- κανένα σφάλμα.

Συνεπώς, για μ ψ.π. Ο αριθμός των ψ.ε. υπολογίζεται από τη σχέση:

$$2^{\nu - \mu} \geq \mu + (\nu - \mu) + 1 \Leftrightarrow 2^{\nu - \mu} \geq \nu + 1$$

Σχηματισμός της κωδικής λέξης

Αρίθμηση των ψηφίων από 1 έως ν ξεκινώντας από το LSB.

Τα $\psi.\epsilon.$ (E_i) τοποθετούνται στις θέσεις με τακτικό αριθμό:

$$2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^{\nu-\mu-1}$$

Τα $\psi.\pi.$ Τοποθετούνται στις ενδιάμεσες κενές θέσεις:

τ.α.	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Ψηφίο	Π_5	Π_4	E_3	Π_3	Π_2	Π_1	E_2	Π_0	E_1	E_0

Έλεγχος ισοτιμίας (1)

Το $\psi.ε.$ (E_i) ελέγχει την ισοτιμία σε όλες τις θέσεις με τακτικό αριθμό που η δυαδική του μορφή έχει μονάδα στην $(i+1)$ θέση ξεκινώντας από το LSB.

π.χ.

Το E_0 ελέγχει τις θέσεις με μονάδα στην θέση 1
(000**1**, 001**1**, ..., 110**1**, 111**1**).

Το E_1 ελέγχει τις θέσεις με μονάδα στην θέση 2
(00**1**0, 00**1**1, ..., 10**1**0, 11**1**1).

Το E_2 ελέγχει τις θέσεις με μονάδα στην θέση 3
(0**1**00, 0**1**01, ..., 1**1**10, 1**1**11).

.....

Έλεγχος ισοτιμίας (2)

Αριθμός θέσης		Ψ. Ε. και θέσεις που ελέγχουν		
Δεκαδικό	Δυαδικό	E_0	E_1	E_2
1	0001	X		
2	0010		X	
3	0011	X	X	
4	0100			X
5	0101	X		X
6	0110		X	X
7	0111	X	X	X
8	1000			
9	1001	X		
10	1010		X	
11	1011	X	X	
12	1100			X
13	1101	X		X
14	1110		X	X
15	1111	X	X	X

Εξισώσεις ελέγχου ισοτιμίας

$$E_0 + \Pi_0 + \Pi_1 + \Pi_3 + \Pi_4 + \dots = Z_0$$

$$E_1 + \Pi_0 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_5 + \dots = Z_1$$

$$E_2 + \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_7 + \dots = Z_2$$

⋮
⋮

$$\dots + \dots + \dots + \dots + \dots + \dots = \dots$$

Σύνδρομο

Για άρτια ισοτιμία πρέπει να ισχύει:

$$Z_0 = Z_1 = Z_2 = \dots = 0$$

Αν υπάρχει σφάλμα, ο αριθμός :

$$\Sigma = \dots\dots Z_3 Z_2 Z_1 Z_0$$

δείχνει τον τακτικό αριθμό της θέσης του αλλοιωμένου ψηφίου.

Παράδειγμα (1)

Κωδικοποίηση δυαδικών τετράδων (4 ψ.π).

Υπολογισμός του αριθμού των ψ.ε.

$$2^{v-\mu} \geq v+1 \Leftrightarrow 2^{v-4} \geq v+1 \Leftrightarrow v = 7$$

Απαιτούνται $v-\mu=3$ ψ.ε.

Σχηματισμός κωδικής λέξης: $\Pi_3 \Pi_2 \Pi_1 E_2 \Pi_0 E_1 E_0$

Παράδειγμα (2)

Έστω η δυαδική τετράδα που θα κωδικοποιηθεί:

$$\Pi_3 \Pi_2 \Pi_1 \Pi_0 = 0010$$

Τα 3 ψ.ε. ελέγχουν την άρτια ισοτιμία:

$$E_0 = \Pi_0 + \Pi_1 + \Pi_3 = 0 + 1 + 0 = 1$$

$$E_1 = \Pi_0 + \Pi_2 + \Pi_3 = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$E_2 = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 = 1 + 0 + 0 = 1$$

Παράδειγμα (3)

Η κωδική λέξη με τα ψ.π. και τα ψ.ε. είναι:

$$\Pi_3 \Pi_2 \Pi_1 E_2 \Pi_0 E_1 E_0 = 0011001$$

Έστω ότι το κανάλι αντιστρέφει το Π_2 . Η κωδική λέξη που λαμβάνει ο δέκτης είναι:

$$\Pi_3 \color{red}{\Pi_2} \Pi_1 E_2 \Pi_0 E_1 E_0 = 0\color{red}{1}11001$$

Παράδειγμα (4)

Στην αποκωδικοποίηση σχηματίζεται το σύνδρομο:

$$Z_0 = E_0 + \Pi_0 + \Pi_1 + \Pi_3 = 1 + 0 + 1 + 0 = 0$$

$$Z_1 = E_1 + \Pi_0 + \Pi_2 + \Pi_3 = 0 + 0 + \textcolor{red}{1} + 0 = 1$$

$$Z_2 = E_2 + \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 = 1 + 1 + \textcolor{red}{1} + 0 = 1$$

$$\Sigma = Z_2 Z_1 Z_0 = 110$$

Παράδειγμα (5)

Η δεκαδική μορφή του συνδρόμου:

$$\Sigma = Z_2 Z_1 Z_0 = 110 = (6)_{10}$$

δείχνει ότι υπάρχει σφάλμα στην θέση 6, ξεκινώντας από το LSB.

$$\Pi_3 \Pi_2 \Pi_1 E_2 \Pi_0 E_1 E_0 = 0 \mathbf{1} 11001$$

Διόρθωση:

$$\Pi_3 \Pi_2 \Pi_1 E_2 \Pi_0 E_1 E_0 = 0011001$$