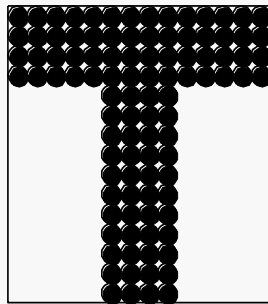


Συσχετιστικές Μνήμες

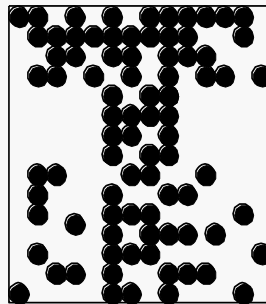
Δίκτυο Hopfield

Συσχετιστική Μνήμη

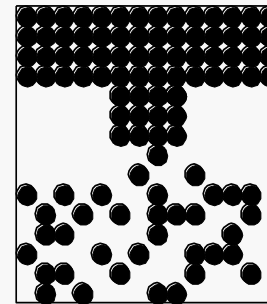
- Η **ανάκληση** ενός γεγονότος σε μία χρονική στιγμή προκαλείται από τη **συσχέτιση** αυτού του γεγονότος με κάποιο **ερέθισμα**.
- Πολλές φορές επίσης καλούμαστε να αναγνωρίσουμε μερικώς κατεστραμμένα γράμματα ή να αναγνωρίσουμε μέσα από ένα παράθυρο ενώ βρέχει (παρουσία θορύβου).



ΓΝΗΣΙΟ Γ



20% ΘΟΡΥΒΟΣ
ΣΕ ΟΛΟΚΛΗΡΗ
ΤΗΝ ΕΙΚΟΝΑ

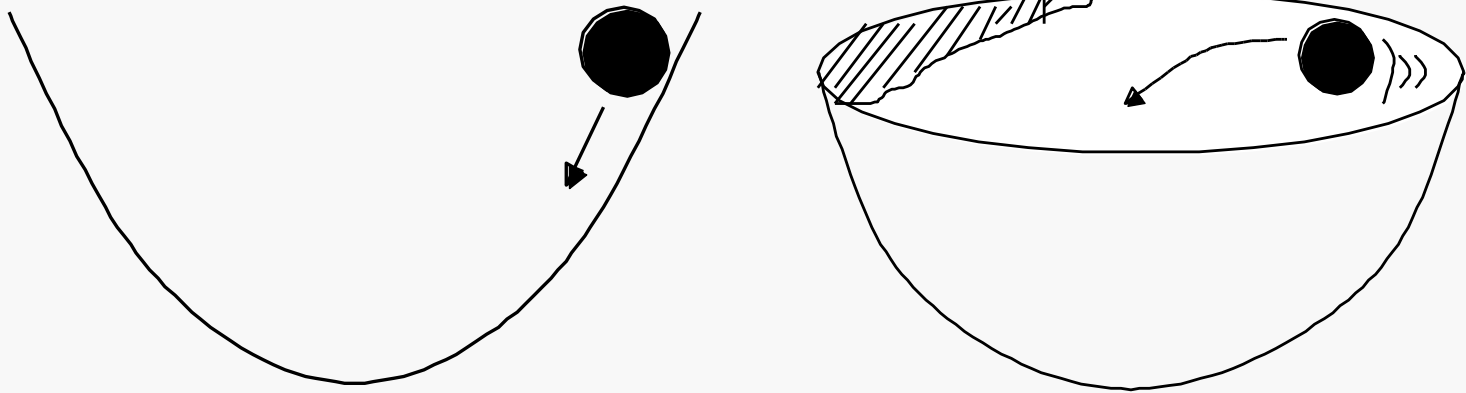


Η ΜΙΣΗ ΕΙΚΟΝΑ
ΚΑΤΕΣΤΡΑΜΜΕΝΗ
ΑΠΟ ΘΟΡΥΒΟ

Συσχετιστική Μνήμη

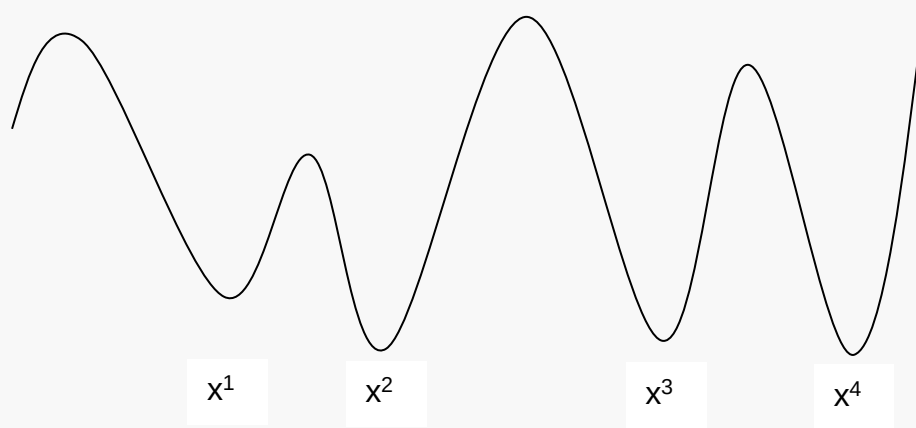
- Οι συμβατικοί υπολογιστές (μηχανές von Neumann) μπορούν να υλοποιήσουν μια τέτοια εργασία με πολύ περιορισμένο τρόπο.
- Το λογισμικό που συνήθως χρησιμοποιείται για αποθήκευση, αναζήτηση και ανάκτηση είναι οι βάσεις δεδομένων.
- Σε τέτοια προγράμματα η αναζήτηση γίνεται με τη χρήση ενός κλειδιού.
- Οι πληροφορίες που η βάση δεδομένων απαιτεί είναι πολύ συγκεκριμένες.
- Αντίθετα στις βιολογικές μνήμες ανακαλούνται παραδείγματα χρησιμοποιώντας ελλιπείς πληροφορίες.

Μηχανικό ανάλογο συσχετικής μνήμης



- Αρχική θέση: **ερέθισμα**, τελική θέση: **ανάκληση**
- Η σφαίρα καταλήγει πάντα στο ίδιο σημείο (**σημείο ισορροπίας**) επειδή '**θυμάται**' πού είναι ο πυθμένας του δοχείου (κατάσταση **ελάχιστης δυναμικής ενέργειας**).

Μηχανικό ανάλογο συσχετικής μνήμης



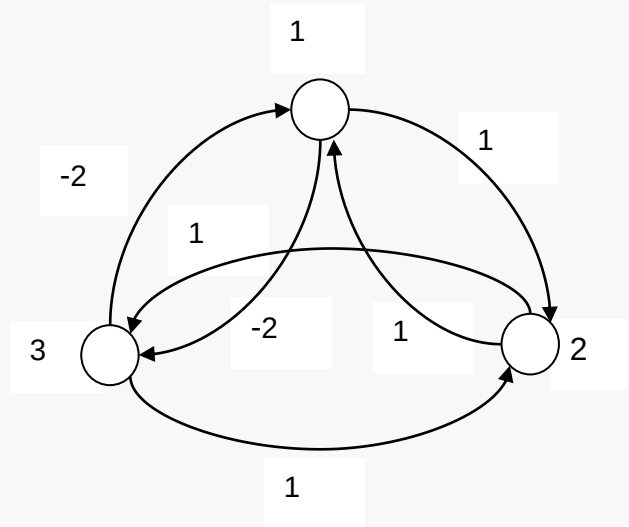
x^1, x^2, x^3, x^4 είναι οι αποθηκευμένες καταστάσεις

- Αν η σφαίρα ξεκινήσει από κάποιο τυχαίο σημείο, τότε θα καταλήξει στο πλησιέστερο τοπικό κοίλο (τοπικό ελάχιστο).
- Επομένως, ανακαλεί το πλησιέστερο αποθηκευμένο πρότυπο. Αυτό το σημείο είναι και ένα **τοπικό ελάχιστο της ενέργειας** του συστήματος.

Σύστημα συσχετικής μνήμης

- Η κατάσταση του συστήματος περιγράφεται από ένα **διάνυσμα κατάστασης** $x=(x_1,x_2,...,x_n)$.
- Υπάρχει ένα σύνολο **καταστάσεων ισορροπίας** $\{x^1,x^2,...,x^m\}$, όπου $x^i=(x_{i1},x_{i2},...,x_{in})$. Αυτές αντιστοιχούν στα αποθηκευμένα παραδείγματα και αποτελούν τα τοπικά ελάχιστα της ενέργειας του συστήματος.
- Το σύστημα ξεκινάει από μία **αρχική κατάσταση (ερέθισμα)** και καταλήγει σε μία από τις **καταστάσεις ισορροπίας (ανάκληση)** που αντιστοιχεί σε κάποιο από τα αποθηκευμένα πρότυπα. Η διαδικασία αυτή συνοδεύεται από **μείωση της ενέργειας E του συστήματος**.

Δίκτυο Hopfield



- Πλήρως συνδεδεμένο
- Αμφίδρομες συνδέσεις
- **Συμμετρικά βάρη ($w_{ij} = w_{ji}$)**, $w_{ii} = 0$.
- Πολώσεις b_i .
- **Επαναληπτικό (recurrent) ΤΝΔ (συνδέσεις ανάδρασης)..**

Δυναμικά Συστήματα

- **Δυναμικό σύστημα:** ξεκινώντας από μια αρχική κατάσταση, η κατάσταση του συστήματος εξελίσσεται χρονικά.
- Μπορεί να καταλήξει σε κατάσταση ισορροπίας (ευσταθές σύστημα) ή να λειτουργεί επ' άπειρο (π.χ. χαοτικό δυναμικό σύστημα).
- Το δίκτυο Hopfield είναι (υπό προϋποθέσεις) ευσταθές δυναμικό σύστημα το οποίο καταλήγει σε κάποια κατάσταση ισορροπίας.

Δίκτυο Hopfield

- Δίκτυο Hopfield **διακριτού χρόνου και διακριτής εξόδου**:
 - ο χρόνος προχωράει με διακριτά βήματα $t, t+1, \dots$
 - οι έξοδοι των νευρώνων είναι διακριτές: διπολικές (bipolar) τιμές (**1 ή -1**).
- Σε ένα τέτοιο δίκτυο με n νευρώνες μπορούν να αποθηκευτούν παραδείγματα
$$x = (x_1, \dots, x_n) \text{ (όπου } x_i \text{ είναι } -1 \text{ ή } 1).$$
- Τα παραδείγματα αυτά θέλουμε να αποτελούν καταστάσεις ισορροπίας του δικτύου, με κατάλληλη επιλογή των τιμών των βαρών w_{ij} .
- Έχει μελετηθεί και το δίκτυο Hopfield συνεχούς χρόνου και συνεχούς εξόδου, με εξόδους στο $(-1, 1)$ ή στο $(0, 1)$.

Δίκτυο Hopfield

- Δίκτυο Hopfield **διακριτού χρόνου και διακριτής εξόδου**:
 - ο χρόνος προχωράει με διακριτά βήματα $t, t+1, \dots$
 - οι έξοδοι των νευρώνων είναι διακριτές: διπολικές (bipolar) τιμές (1 ή -1).
- Σε ένα τέτοιο δίκτυο με n νευρώνες μπορούν να αποθηκευτούν παραδείγματα
$$x = (x_1, \dots, x_n) \text{ (όπου } x_i \text{ είναι } -1 \text{ ή } 1).$$
- Τα παραδείγματα αυτά θέλουμε να αποτελούν καταστάσεις ισορροπίας του δικτύου, με κατάλληλη επιλογή των τιμών των βαρών w_{ij} .
- Έχει μελετηθεί και το δίκτυο Hopfield συνεχούς χρόνου και συνεχούς εξόδου, με εξόδους στο $(-1, 1)$ ή στο $(0, 1)$.

Δίκτυο Hopfield

- Ενημέρωση της κατάστασης (εξόδου) ενός κόμβου i την χρονική στιγμή t :

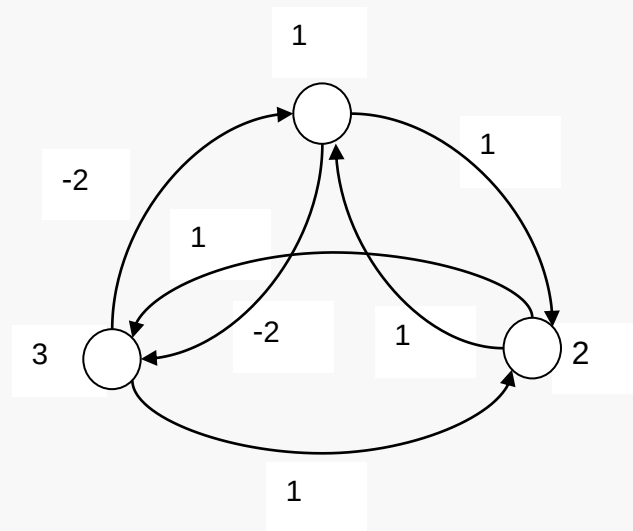
$$u_i(t) = \sum_{j=1}^n w_{ij} y_j(t) + b_i \longrightarrow y_i(t+1) = \text{sgn}(u_i(t))$$

$\text{sgn}(u) = 1$ αν $u > 0$, $\text{sgn}(u) = -1$ αν $u < 0$.

- Αν $u_i(t) = 0$, θέτουμε $y_i(t+1) = y_i(t)$
- Ορισμός: Μια κατάσταση $y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$ αποτελεί **κατάσταση ισορροπίας** ενός δικτύου Hopfield, όταν $y_i(t+1) = y_i(t)$ για κάθε $i = 1, \dots, n$.
- Μια κατάσταση $y = (y_1, \dots, y_n)$ είναι κατάσταση ισορροπίας, εάν και μόνο εάν ικανοποιεί την **συνθήκη ισορροπίας** για κάθε $i = 1, \dots, n$:
$$y_i = \text{sgn}\left(\sum_{j=1}^n w_{ij} y_j + b_i\right) \Leftrightarrow y_i \cdot \left(\sum_{j=1}^n w_{ij} y_j + b_i\right) \geq 0$$

Δίκτυο Hopfield

- Άσκηση: Θεωρείστε το δίκτυο Hopfield με τρεις κόμβους που απεικονίζεται στο παρακάτω Σχήμα. Οι πολώσεις είναι ίσες με μηδέν. Να εξετάσετε εάν η κατάσταση $\gamma = (-1, -1, 1)$ είναι κατάσταση ισορροπίας του δικτύου.



Σύγχρονη λειτουργία δικτύου Hopfield

- Αρχικοποίηση: $t=0$, εφαρμογή του παραδείγματος εισόδου x και καθορισμός της αρχικής κατάστασης $y(0)$ θέτοντας $y_i(0)=x_i$
- Σε κάθε χρονική στιγμή t , έστω $y(t)=(y_1(t), \dots, y_n(t))^T$ η κατάσταση του δικτύου. Ενημερώνονται **ταυτόχρονα** όλοι οι κόμβοι του υπολογίζοντας πρώτα τα $u_i(t)$ για όλα τα i :

$$u_i(t) = \sum_{j=1}^n w_{ij} y_j(t) + b_i$$

και στη συνέχεια τα $y_i(t+1) = \text{sgn}(u_i(t))$ για όλα τα i .

- Η τεχνική της σύγχρονης ενημέρωσης δεν μπορεί να εγγυηθεί τη σύγκλιση του δικτύου σε κάποια κατάσταση ισορροπίας.
- Αποδεικνύεται ότι το δίκτυο **είτε θα καταλήξει σε κατάσταση ισορροπίας είτε θα εμπλακεί σε κύκλο μήκους δύο**, δηλαδή θα παλινδρομεί συνεχώς μεταξύ δύο καταστάσεων.

Ασύγχρονη λειτουργία δικτύου Hopfield

- Αρχικοποίηση: $t=0$, εφαρμογή του παραδείγματος εισόδου x και καθορισμός της αρχικής κατάστασης $y(0)$ θέτοντας $y_i(0)=x_i$
- Σε κάθε χρονική στιγμή t , έστω $y(t)=(y_1(t), \dots, y_n(t))^T$ η κατάσταση του δικτύου.

- Τυχαία επιλογή ενός κόμβου i .

- Ενημέρωση της εξόδου $y_i(t+1)$:

$$u_i(t) = \sum_{j=1}^n w_{ij} y_j(t) + b_i \quad y_i(t+1) = \text{sgn}(u_i(t))$$

- $t:=t+1$

- Μέχρι να φτάσουμε σε κατάσταση ισορροπίας: $y_i(t+1)=y_i(t)$ για κάθε $i=1, \dots, n$.
- Η τελική κατάσταση ισορροπίας αποτελεί την απόκριση του δικτύου στο ερέθισμα $y(0)=x$.

Ασύγχρονη λειτουργία δικτύου Hopfield

- Στην πράξη οι νευρώνες επιλέγονται για ενημέρωση με τη σειρά και όχι τυχαία. Όταν ολοκληρωθεί η εξέταση όλων των νευρώνων μια φορά θεωρούμε ότι έχει ολοκληρωθεί μια **εποχή**. Η σειρά ενημέρωσης μπορεί να μεταβάλλεται σε κάθε εποχή ή να διατηρείται η ίδια.
- Θεωρούμε ότι έχουμε καταλήξει σε κατάσταση ισορροπίας όταν ολοκληρωθεί μια εποχή (έχουν εξεταστεί όλοι) και δεν έχει μεταβληθεί η έξοδος κανενός νευρώνα.
- Η ασύγχρονη λειτουργία **εγγυάται** τη σύγκλιση του δικτύου σε κατάσταση ισορροπίας διότι το δίκτυο χαρακτηρίζεται από μια συνάρτηση που ονομάζεται **συνάρτηση ενέργειας**:

$$E(t) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_i(t) y_j(t) w_{ij} - \sum_{i=1}^n b_i y_i(t)$$

Ασύγχρονη λειτουργία δικτύου Hopfield

- Στην περίπτωση της ασύγχρονης λειτουργίας (όπου ένας μόνο κόμβος ενημερώνεται σε κάθε βήμα), αποδεικνύεται ότι **η συνάρτηση ενέργειας είτε ελαττώνεται είτε παραμένει αμετάβλητη**, δηλ. $E(t+1)-E(t) \leq 0$.
- Δεδομένου ότι τα $y_i(t)$ λαμβάνουν τιμές 1 ή -1 και τα βάρη είναι πεπερασμένοι αριθμοί, **η συνάρτηση ενέργειας E είναι φραγμένη από κάτω**.
- Δεδομένου ότι **η συνάρτηση ενέργειας δεν μπορεί να μειώνεται επ' άπειρο** (αφού είναι φραγμένη από κάτω), το δίκτυο κάποτε θα τερματίσει σε κατάσταση ισορροπίας (δεν μπορεί να λειτουργεί επ' άπειρο).

Παράδειγμα

- Δίνεται ένα δίκτυο Hopfield με δύο νευρώνες, τιμές βαρών $w_{12}=w_{21}=-1$ και μηδενικές πολώσεις.
- Έστω ότι η αρχική κατάσταση ($t=0$) είναι η $y(0)=(1,1)$, δηλ. $y_1(0)=1$ και $y_2(0)=1$.
- Αν εφαρμόσουμε **σύγχρονη ενημέρωση** παρατηρούμε ότι:
$$y_1(t=1)=\text{sgn}(w_{21}y_2(0)+b_1)=\text{sgn}(-1)=-1$$
$$y_2(t=1)=\text{sgn}(w_{12}y_1(0)+b_2)=\text{sgn}(-1)=-1$$
- Αρα $y(1)=(-1,-1)$. Στη συνέχεια υπολογίζουμε για $t=2$.
$$y_1(t=2)=\text{sgn}(w_{21}y_2(1)+b_1)=\text{sgn}(1)=1$$
$$y_2(t=2)=\text{sgn}(w_{12}y_1(1)+b_2)=\text{sgn}(1)=1$$
- Κατά συνέπεια $y(2)=(1,1)=y(0)$ (κύκλος μήκους 2).
- Το ίδιο βρίσκουμε για αρχική κατάσταση $y=(-1,-1)$.

Παράδειγμα

- Ας εξετάσουμε τώρα την περίπτωση που η αρχική κατάσταση είναι $y(0)=(1,-1)$ και το δίκτυο πάλι λειτουργεί με **σύγχρονη ενημέρωση**.

$$y_1(t=1)=\text{sgn}(w_{21}y_2(0)+b_1)=\text{sgn}(1)=1$$

$$y_2(t=1)=\text{sgn}(w_{12}y_1(0)+b_2)=\text{sgn}(-1)=-1$$

- Αρα $y(1)=(1,-1)=y(0)$, δηλ. η $y=(1,-1)$ είναι κατάσταση ισορροπίας.
- Το ίδιο βρίσκουμε και για αρχική κατάσταση $y=(-1,1)$.

Παράδειγμα

- **Ασύγχρονη ενημέρωση** με αρχική κατάσταση $y(0)=(1,1)$.
Έστω ότι επιλέγεται πρώτα ο νευρώνας 1 για ενημέρωση:

$$y_1(t=1)=\text{sgn}(w_{21}y_2(0)+b_1)=\text{sgn}(-1)=-1$$

$$y_2(t=1)=1 \text{ (δεν εξετάζεται για ενημέρωση)}$$

- Άρα $y(1)=(-1,1)$. Στη συνέχεια επιλέγεται ο νευρώνας 2:

$$y_1(t=2)=-1 \text{ (δεν εξετάζεται για ενημέρωση)}$$

$$y_2(t=2)=\text{sgn}(w_{12}y_1(1)+b_2)=\text{sgn}(1)=1$$

- Άρα $y(2)=(-1,1)$. Στη συνέχεια εάν εξετάσουμε πάλι το νευρώνα 1 θα δούμε ότι η κατάστασή του δεν θα αλλάξει, άρα είμαστε σε **κατάσταση ισορροπίας**.

Καθορισμός βαρών

- Εστω ότι έχουμε **m παραδείγματα (διάστασης n) για αποθήκευση**. Έστω ότι x_{pi}, x_{pj} (με τιμές 1 ή -1) είναι τα στοιχεία i και j του παραδείγματος p.
- Θέλουμε τα παραδείγματα προς αποθήκευση να γίνουν καταστάσεις ισορροπίας ενός δικτύου Hopfield. Το δίκτυο θα έχει n κόμβους (όση και η διάσταση των παραδειγμάτων).
- **Κανόνας του Hebb:**
$$w_{ij} = \sum_{p=1}^m x_{pi} x_{pj}, w_{ii} = 0, b_i = 0, i, j = 1, \dots, n$$
- Ο κανόνας είναι εμπειρικός και συμμετρικός ($w_{ij} = w_{ji}$).
- Δεν εγγυάται την αποθήκευση. Μπορεί να αποθηκευτούν και άλλα παραδείγματα χωρίς να το επιθυμούμε.
- Χωρητικότητα κατά προσέγγιση: $m=0.15N$

Ασκηση

- Δίνονται δύο παραδείγματα $x=(1,-1,-1)$, $y=(-1,1,1)$. Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα δίκτυο Hopfield για την αποθήκευση αυτών των προτύπων.
- α) Πόσους νευρώνες θα έχει το δίκτυο;
- β) Να υπολογίσετε τα βάρη του δικτύου (κανόνας Hebb) και να εξετάσετε εάν τα δύο παραδείγματα είναι καταστάσεις ισορροπίας του δικτύου που προκύπτει.