

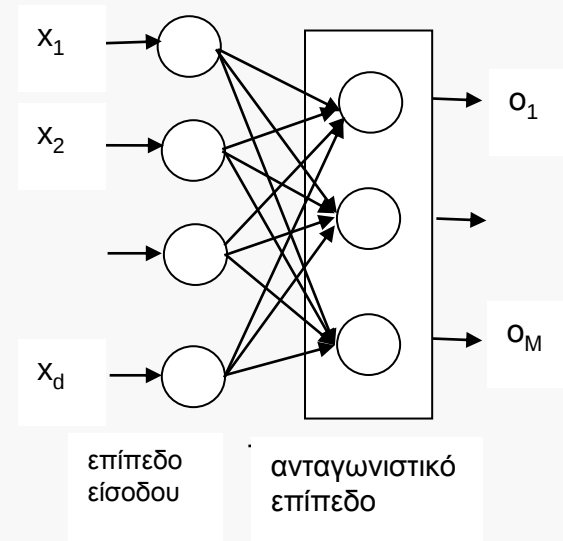
ΑΝΤΑΓΩΝΙΣΤΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ ΔΙΚΤΥΑ LVQ και SOM

Μάθηση χωρίς επίβλεψη (unsupervised learning)

- **Σύνολο εκπαίδευσης** $D=\{(x^n)\}$, $n=1,\dots,N$.
- $x^n=(x_{n1},\dots,x_{nd})^T$, **δεν υπάρχουν** τιμές-στόχοι t^n .
- Προβλήματα μάθησης χωρίς επίβλεψη:
 - **Ομαδοποίηση** (clustering)
 - Κατασκευή **χάρτη δεδομένων** (data map)
 - **Εκτίμηση πυκνότητας πιθανότητας** (probability density function estimation)
 - **Μείωση της διάστασης** των δεδομένων (dimensionality reduction).
- Θα ασχοληθούμε με **TNΔ ανταγωνιστικής μάθησης** (competitive learning)

ΤΝΔ Ανταγωνιστικής Μάθησης

- Ανταγωνιστική μάθηση υλοποιείται με ένα ΤΝΔ που περιλαμβάνει
 - το επίπεδο εισόδου
 - ένα επίπεδο από **ανταγωνιστικούς νευρώνες**, το οποίο ονομάζεται **ανταγωνιστικό επίπεδο** (competitive layer).
- Τύποι δικτύων: **LVQ, SOM**



ΤΝΔ Ανταγωνιστικής Μάθησης

- Κάθε ανταγωνιστικός νευρώνας i
 - Έχει διάνυσμα βαρών $w_i = (w_{i1}, \dots, w_{id})^T$ που αντιστοιχεί σε κάποιο σημείο του χώρου των δεδομένων
 - υπολογίζει ένα μέτρο ομοιότητας (ή απόστασης) ανάμεσα στο δεδομένου εισόδου $x = (x_1, \dots, x_d)^T$ και στο διάνυσμα w_i .
- Για διάνυσμα εισόδου x :
 - 'ανταγωνισμός' μεταξύ των νευρώνων του ανταγωνιστικού επιπέδου
 - **νικητής-νευρώνας**: το διάνυσμα βαρών του είναι πλησιέστερα προς το διάνυσμα εισόδου x .
 - ο νικητής νευρώνας m θέτει την έξοδό του $o_m = 1$, ενώ οι υπόλοιποι νευρώνες i δίνουν έξοδο $o_i = 0$.

ΤΝΔ Ανταγωνιστικής Μάθησης

- Εκπαίδευση: ο **νικητής-νευρώνας** είναι αυτός ο οποίος συνήθως μεταβάλλει τις τιμές των βαρών του περισσότερο (ή και αποκλειστικά) σε σύγκριση με τους υπόλοιπους ανταγωνιστικούς νευρώνες (βασική αρχή της ανταγωνιστικής μάθησης).
- Επίτευξη αυτό-οργάνωσης (self-organization): συγκεκριμένοι νευρώνες μαθαίνουν να ανταποκρίνονται σε συγκεκριμένα ερεθίσματα (διανύσματα εισόδου).
- Μέτρο απόστασης: συνήθως ευκλείδεια ($||x - w_i||$).
- Για είσοδο x , ο νικητής-νευρώνας m είναι αυτός με τη **μικρότερη απόσταση** $||x - w_m||^2$.
- Η εκπαίδευση επιτυγχάνεται 'μετακινώντας' το διάνυσμα βαρών w_m του νικητή-νευρώνα προς το διάνυσμα εισόδου x .

ΤΝΔ Ανταγωνιστικής Μάθησης

Ερώτηση: Έστω ένα ΤΝΔ ανταγωνιστικής μάθησης με τρεις ανταγωνιστικούς νευρώνες και αντίστοιχα διανύσματα βαρών:

$$w_1=(0,0,0)^T, w_2=(1,1,1)^T, w_3=(-1,-1,-1)^T$$

α) Ποια είναι η διάσταση d των δεδομένων εισόδου;

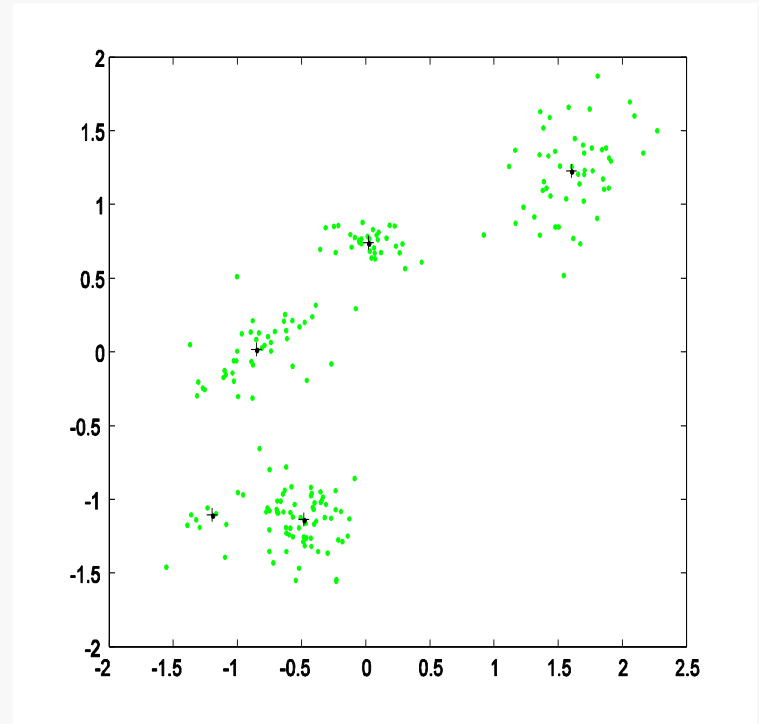
β) Αν η είσοδος στο ΤΝΔ είναι το παράδειγμα

$$x=(-0.3,0.1,-0.2)^T$$

ποιος θα είναι ο νικητής-νευρώνας με βάση την ευκλείδεια απόσταση;

Ομαδοποίηση (clustering)

- **Διαμερισμός** του συνόλου παραδειγμάτων σε υποσύνολα που ονομάζονται ομάδες (clusters): θέλουμε τα δεδομένα της **ίδιας ομάδας** είναι **'κοντά' μεταξύ τους** (σύμφωνα με κάποια νόρμα απόστασης) και **μακριά από τα δεδομένα των άλλων ομάδων**.
- Συνήθως ο αριθμός των ομάδων δίνεται από τον χρήστη.
- Κάθε ομάδα μπορεί περιγράφεται από ένα αντιπρόσωπο: συνήθως το **κέντρο της ομάδας** (κεντροειδές) → μέσος όρος των παραδειγμάτων της ομάδας.



Αλγόριθμος k-μέσων (k-means)

- Σύνολο εκπαίδευσης $D=\{(x^n)\}$, $x^n=(x_{n1},\dots,x_{nd})^T$, $n=1,\dots,N$.
- Αριθμός ομάδων M . Δίνεται από τον χρήστη.
- Κατάλληλος για την εύρεση ομάδων σε μορφή 'νεφών'.
- Χρησιμοποιεί ως αντιπρόσωπο για κάθε ομάδα O_j ένα διάνυσμα $w_j=(w_{j1},\dots,w_{jd})^T$ που περιέχει τις συντεταγμένες του κέντρου της ομάδας.
- Ο αλγόριθμος k-μέσων είναι πολύ διαδεδομένος κυρίως λόγω της απλότητας και της ευκολίας στην υλοποίησή του.

Αλγόριθμος k-μέσων (k-means)

- Αρχικοποίηση: αρχικοποίηση του μετρητή επαναλήψεων $t:=0$ και των M κέντρων $w_j(0)$ $j=1,\dots,M$.
- Σε κάθε επανάληψη t
 - Για όλα τα δεδομένα εκπαίδευσης x^n ($n=1,\dots,N$)
 - Υπολογισμός της Ευκλείδειας απόστασης $d(x^n, w_m)$ του x^n από όλα τα κέντρα w_m .
 - Τοποθέτηση του x^n στο σύνολο O_j με τη μικρότερη απόσταση από το κέντρο w_j της αντίστοιχης ομάδας, δηλαδή για την οποία ισχύει: $d(x^n, w_j) = \min_m d(x^n, w_m)$
 - Για κάθε ομάδα j υπολογισμός των νέων κέντρων $w_j(t+1)$ ως το μέσο όρο των στοιχείων του συνόλου O_j .
 - Έλεγχος τερματισμού: έχουν τα διανύσματα w_j μεταβληθεί μεταξύ δύο επαναλήψεων; Εάν ναι, τότε $t:=t+1$ και έναρξη νέας επανάληψης, αλλιώς τερματισμός.

Αλγόριθμος k-μέσων (k-means)

- Ο αλγόριθμος ελαχιστοποιεί την **συνολική διασπορά** των ομάδων

$$S(w_1, \dots, w_M) = \sum_{j=1}^M \sum_{x^n \in O_j} \|x^n - w_j\|^2$$

- Διασπορά μιας ομάδας j ονομάζουμε το άθροισμα των αποστάσεων των παραδειγμάτων από το κέντρο w_j της ομάδας.
- Ο αλγόριθμος k-means εξαρτάται από την αρχικοποίηση των κέντρων.
- Τα κέντρα συνήθως αρχικοποιούνται επιλέγοντας **τυχαία** M παραδείγματα.
- Μία προσέγγιση: Πολλές επανεκτελέσεις και διατήρηση της καλύτερης λύσης (αυτής με την μικρότερη συνολική διασπορά) .

Αλγόριθμος LVQ για ομαδοποίηση

- Learning Vector Quantization (LVQ) (Εκπαιδευόμενος Διανυσματικός Κβαντιστής)
- **Σειριακή (on-line) έκδοση του k-means**
- **Υλοποιείται με ΤΝΔ ανταγωνιστικής μάθησης**
- Δίνεται σύνολο εκπαίδευσης $D=\{(x^n)\}$, $x^n=(x_{n1},\dots,x_{nd})^T$, $n=1,\dots,N$.
- Αριθμός ομάδων M . Δίνεται από τον χρήστη.
- ΤΝΔ ανταγωνιστικής μάθησης με M ανταγωνιστικούς νευρώνες.
- Το διάνυσμα βαρών $w_j=(w_{j1},\dots,w_{jd})^T$ του ανταγωνιστικού νευρώνα j περιέχει τις συντεταγμένες του κέντρου της ομάδας O_j .

Αλγόριθμος LVQ για ομαδοποίηση

- Αρχικοποίηση των M κέντρων $w_i(0)$ ($i=1,\dots,M$).
- Αρχικοποίηση του ρυθμού μάθησης, του μετρητή εποχών $t:=0$ και του μετρητή επαναλήψεων $\tau:=0$.
- Σε κάθε εποχή t , για $n=1,\dots,N$:
 - Εφαρμογή του παραδείγματος x^n ως εισόδου στο ΤΝΔ.
 - Εύρεση του νικητή-νευρώνα m : με το ελάχιστο $d(x^n, w_m)$
 - Ενημέρωση των βαρών μόνο του νικητή-νευρώνα m , ώστε το w_m **να πλησιάσει** στο παράδειγμα x^n

$$w_{mj}(\tau+1) = w_{mj}(\tau) + \eta (x_{nj} - w_{mj}), \quad j=1,\dots,d$$

$$w_{ij}(\tau+1) = w_{ij}(\tau), \quad i \neq m, j=1,\dots,d$$

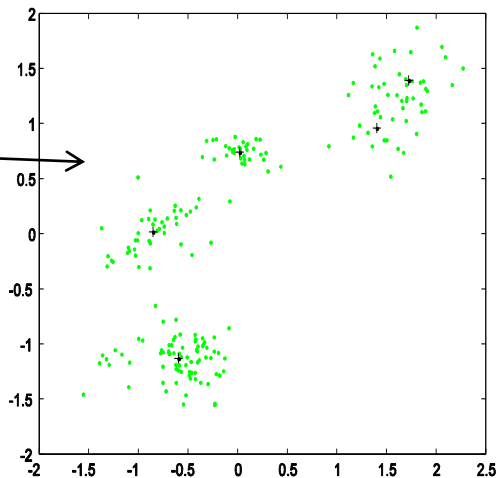
– $\tau:=\tau+1$

- Έλεγχος τερματισμού. Εάν όχι $t:=t+1$ και έναρξη νέας εποχής.

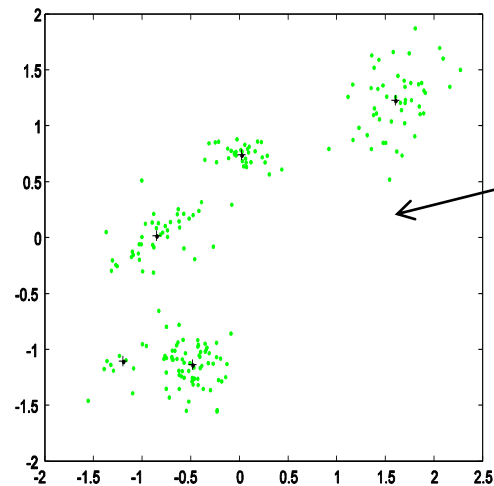
Αλγόριθμος LVQ για ομαδοποίηση

- Ελαχιστοποιείται η συνολική διασπορά των ομάδων (όπως και στον k-means).
- Εξαρτάται από την αρχικοποίηση των κέντρων: συνήθως αρχικοποιούνται επιλέγοντας **τυχαία** M παραδείγματα.
- Μία προσέγγιση: Πολλές επανεκτελέσεις και διατήρηση της καλύτερης λύσης (αυτής με την μικρότερη συνολική διασπορά).

τοπικό
ελάχιστο



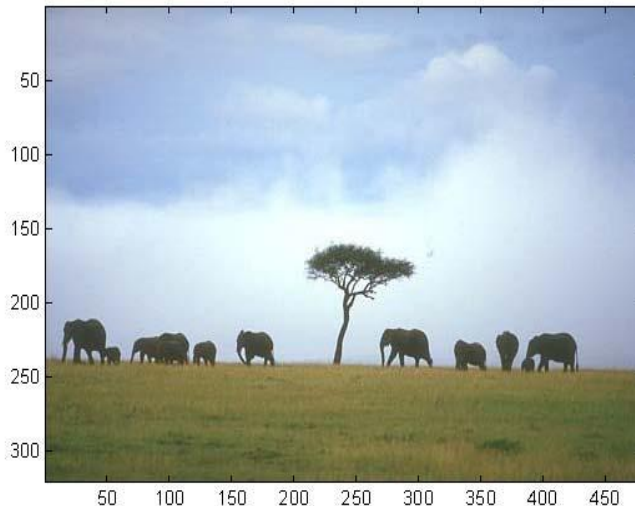
Βέλτιστη
λύση



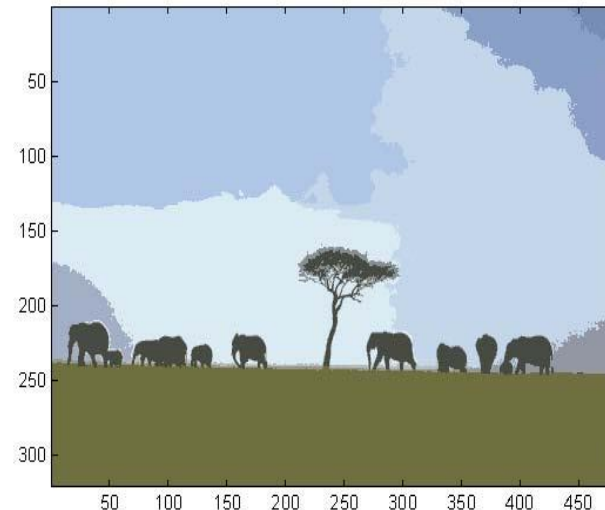
Διανυσματικός Κβαντισμός Εικόνας

- Η εικόνα χωρίζεται σε παράθυρα (π.χ. 8x8). Οι τιμές των pixels σε κάθε παράθυρο συνιστούν ένα διάνυσμα διάστασης d .
- Τα διανύσματα των παραθύρων ομαδοποιούνται σε M ομάδες.
- Τελικά **κάθε παράθυρο της εικόνας αναπαρίσταται από το κέντρο της ομάδας** στην οποία ανήκει.

Αρχική
εικόνα



Συμπιε-
σμένη
εικόνα



Αλγόριθμος LVQ για ταξινόμηση

- Υλοποιείται με ΤΝΔ ανταγωνιστικής μάθησης
- Σύνολο εκπαίδευσης $D=\{(x^n), C(x^n)\}$, $x^n=(x_{n1}, \dots, x_{nd})^T$, $n=1, \dots, N$.
- Αριθμός ομάδων M . Δίνεται από τον χρήστη.
- ΤΝΔ ανταγωνιστικής μάθησης με M ανταγωνιστικούς νευρώνες.
- Το διάνυσμα βαρών $w_j=(w_{j1}, \dots, w_{jd})^T$ του ανταγωνιστικού νευρώνα j περιέχει τις συντεταγμένες του κέντρου της ομάδας O_j .
- Κάθε ανταγωνιστικός νευρώνας j έχει επίσης και κατηγορία $C(j)$ (την αναθέτει ο χρήστης).
- Η αρχικοποίηση γίνεται θέτοντας το διάνυσμα βαρών ενός νευρώνα που τον αντιστοιχίζουμε στην κατηγορία C_i ίσο με κάποιο παράδειγμα εκπαίδευσης της κατηγορίας C_i .

Αλγόριθμος LVQ για ταξινόμηση

- Σε κάθε βήμα εφαρμόζουμε ως είσοδο ένα παράδειγμα x^n και βρίσκουμε τον νικητή-νευρώνα m . Τα βάρη των υπόλοιπων νευρώνων δεν μεταβάλλονται. Τα βάρη του νικητή νευρώνα m μεταβάλλονται ως εξής:
 - Αν η κατηγορία του x^n και του νικητή νευρώνα m **συμπίπτουν**, το διάνυσμα βαρών w_m **‘μετακινείται’** προς το πρότυπο x^n : $w_{mj}(\tau+1) = w_{mj}(\tau) + \eta (x_{nj} - w_{mj})$, $j=1, \dots, d$
 - Αν η κατηγορία του x^n και του νικητή νευρώνα m **διαφέρουν**, το διάνυσμα βαρών w_m **‘απομακρύνεται’** από το πρότυπο x^n : $w_{mj}(\tau+1) = w_{mj}(\tau) - \eta (x_{nj} - w_{mj})$, $j=1, \dots, d$
- Μετά το τέλος της εκπαίδευσης, ταξινόμηση νέου παραδείγματος: κατηγορία του νικητή-νευρώνα.

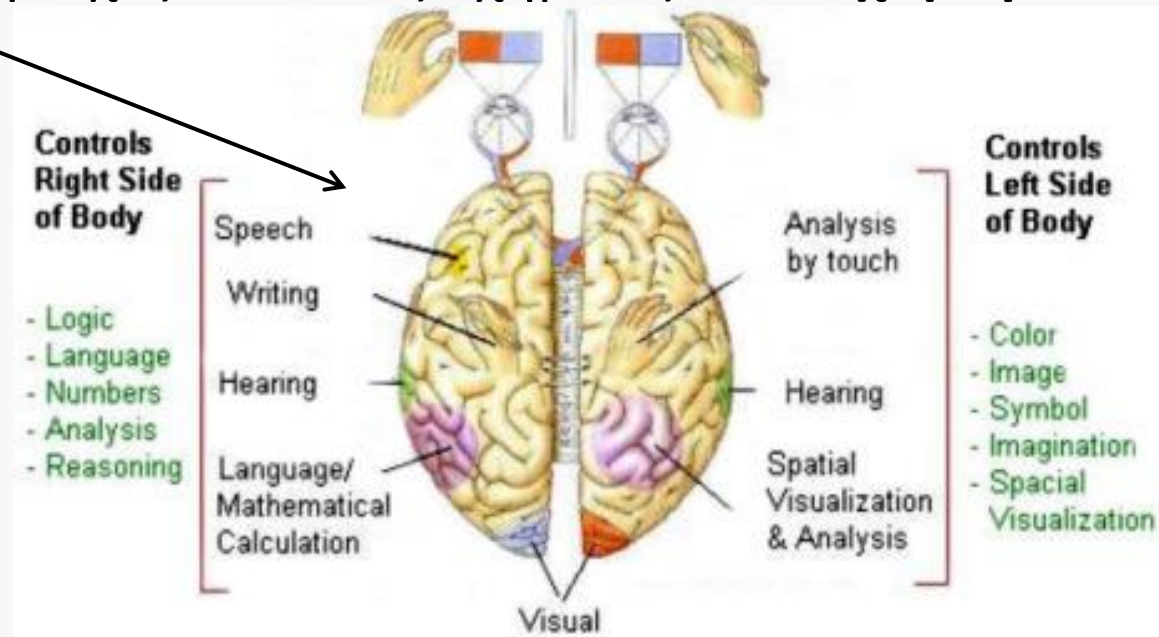
Αλγόριθμος LVQ για ταξινόμηση

Ερώτηση: Έστω ένα δίκτυο LVQ για ταξινόμηση δύο κατηγοριών με τρεις ανταγωνιστικούς νευρώνες και αντίστοιχα διανύσματα βαρών: $w_1=(0,0,0)^T$, $w_2=(1,1,1)^T$, $w_3=(-1,-1,-1)^T$. Ο νευρώνας 1 είναι κατηγορίας C_1 και οι υπόλοιποι κατηγορίας C_2 .

Σε ποια κατηγορία θα ταξινομηθούν τα παραδείγματα $x^1=(0.2,0.1,-0.3)^T$ και $x^2=(1.2,0.9,0.7)^T$;

Το δίκτυο SOM (Self-Organizing Map)

- Προτάθηκε από τον T. Kohonen στα μέσα της δεκαετίας του 1980, σε μια προσπάθεια μοντελοποίησης της **διαδικασίας αυτο-οργάνωσης** που παρατηρείται στον εγκέφαλο.
- Οι νευρώνες στον φλοιό του εγκεφάλου είναι οργανωμένοι σε πολλές περιοχές οι οποίες σχηματίζουν το **χάρτη του εγκεφάλου**.



Το δίκτυο SOM (Self-Organizing Map)

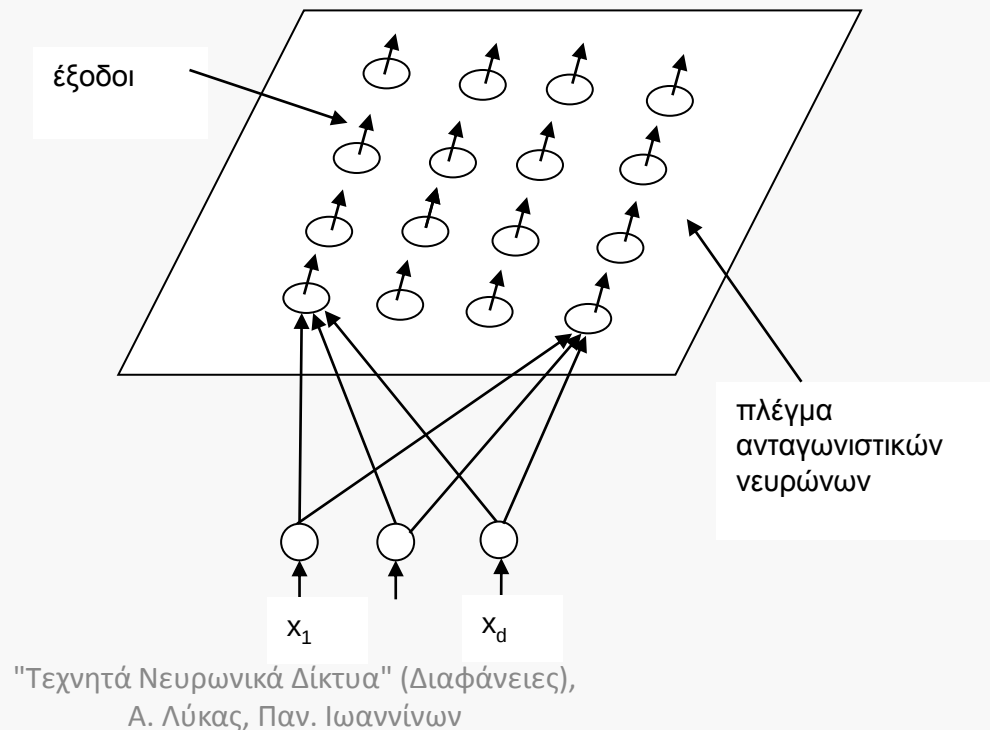
- Το χαρακτηριστικό της οργάνωσης σε περιοχές είναι ότι διαφορετικά εξωτερικά ερεθίσματα (από τα αισθητήρια όργανα) διεγείρουν τους νευρώνες σε διαφορετικές περιοχές στον εγκέφαλο.
- Συγκεκριμένα, αισθήσεις όπως της αφής, της όρασης και της ακοής, απεικονίζονται σε διαφορετικές περιοχές του εγκεφαλικού φλοιού.
- Στην ουσία ο χάρτης ορίζεται από έναν **πλέγμα** νευρώνων οι οποίοι είναι συντονισμένοι με τέτοιο τρόπο ώστε **γειτονικοί νευρώνες να αντιδρούν σε παρόμοια ερεθίσματα**.
- Τα σήματα εισόδου απεικονίζονται στα σημεία του χάρτη, ανάλογα με τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά τους.

Το δίκτυο SOM (Self-Organizing Map)

- Δίκτυο SOM: τεχνητό ανάλογο του βιολογικού χάρτη.
- Είναι ΤΝΔ ανταγωνιστικής μάθησης με ένα επιπλέον χαρακτηριστικό: θεωρούμε ότι οι ανταγωνιστικοί νευρώνες είναι τοποθετημένοι στους κόμβους ενός πλέγματος μιας ή δύο (συνήθως) διαστάσεων.
- Κάθε ανταγωνιστικός νευρώνας χαρακτηρίζεται από δύο ποσότητες: α) το διάνυσμα βαρών (σημείο στο χώρο R^d) και β) τις συντεταγμένες της θέσης του στο πλέγμα.
- **Οι νευρώνες εκπαιδεύονται ώστε η θέση τους στο πλέγμα να συσχετίζεται με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά των προτύπων εισόδου.**

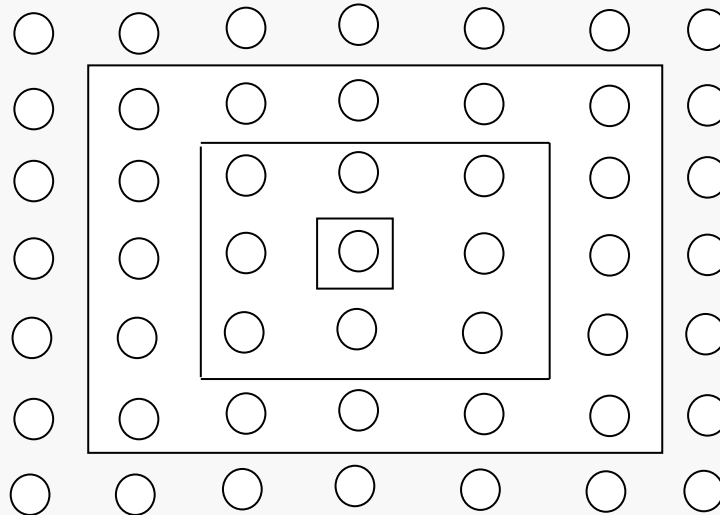
Το δίκτυο SOM (Self-Organizing Map)

- Υλοποιείται ένας **τοπογραφικός χάρτης (topographic map)** των δεδομένων εισόδου: οι θέσεις στο πλέγμα των νευρώνων που είναι νικητές κατά τον ανταγωνισμό για κάποιο παράδειγμα εισόδου είναι ενδεικτικές των χαρακτηριστικών αυτού του παραδείγματος.



Εκπαίδευση του δικτύου SOM

- Πρέπει πρώτα να οριστεί η **γειτονιά στο πλέγμα G_i** κάθε νευρώνα i : το σύνολο των νευρώνων που 'περιβάλλουν' στο πλέγμα τον νευρώνα i .
- Μπορεί να έχει οποιαδήποτε μορφή (τετραγωνική, σφαιρική, εξαγωνική κλπ). Συνήθως η γειτονιά G_i είναι συμμετρική γύρω από τον νευρώνα i και περιλαμβάνει τον i .



Εκπαίδευση SOM με διακριτή γειτονιά

- Δίνεται σύνολο εκπαίδευσης $D=\{(x^n)\}$, $x^n=(x_{n1},\dots,x_{nd})^T$, $n=1,\dots,N$.
- Καθορισμός του αριθμού $M=M_1 \times M_2$ των ανταγωνιστικών νευρώνων των διαστάσεων M_1 και M_2 του διδιάστατου πλέγματος. Αρχικοποίηση των M κέντρων $w_i(0)$ ($i=1,\dots,M$), του ρυθμού μάθησης, της έκτασης της γειτονιάς, του μετρητή εποχών $t:=0$ και του μετρητή επαναλήψεων $\tau:=0$.
- Σε κάθε εποχή t εφαρμογή των παρακάτω βημάτων για $n=1,\dots,N$
 - Εφαρμογή του x^n ως εισόδου στο ΤΝΔ, εύρεση του νικητή νευρώνα m .
 - Ενημέρωση των βαρών **μόνο του νικητή-νευρώνα m και των γειτονικών του**, δηλαδή των νευρώνων του συνόλου $\Gamma_m(\tau)$:

$$w_{ij}(\tau+1)=w_{ij}(\tau)+\eta(\tau)(x_{nj}-w_{ij}(\tau)), \quad i \in \Gamma_m(\tau), j=1,\dots,d$$

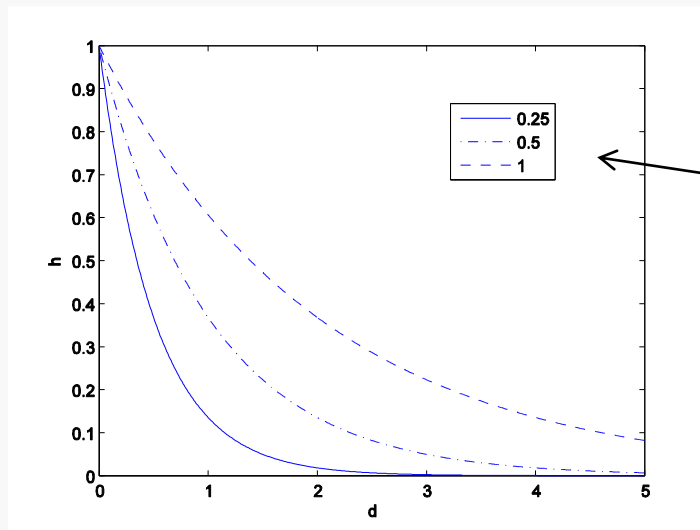
$$w_{ij}(\tau+1)=w_{ij}(\tau), \quad i \notin \Gamma_m(\tau), j=1,\dots,d$$

– $\tau:=\tau+1$

- Σταδιακή αργή μείωση του ρυθμού μάθησης και της γειτονιάς $\Gamma(t)$.
- Έλεγχος τερματισμού. Εάν όχι τότε $t:=t+1$ και εκτέλεση νέας εποχής.

Εκπαίδευση SOM με συνεχή γειτονιά

- **Συνεχής γειτονιά:** οποιοσδήποτε νευρώνας j ανήκει στη γειτονιά Γ_i του νευρώνα i με κάποιο **βαθμό συμμετοχής** h_{ij} που είναι αντιστρόφως ανάλογος απόστασης $d_{ij} = ||r_i - r_j||^2$ στο πλέγμα μεταξύ των δύο νευρώνων.



$$h_{ij}(\tau) = \exp\left(-\frac{d_{ij}}{2\sigma_h^2(\tau)}\right)$$

Εκπαίδευση SOM με διακριτή γειτονιά

- Σε κάθε εποχή t , εφαρμογή των παρακάτω για $n=1,\dots,N$
 - Εφαρμογή του x^n ως εισόδου στο ΤΝΔ, εύρεση του νικητή νευρώνα m .
 - Ενημέρωση των βαρών όλων των νευρώνων με **συντελεστή βαρύτητας** το βαθμό συμμετοχής h_{mi} στη γειτονιά του νικητή-νευρώνα m ως εξής:

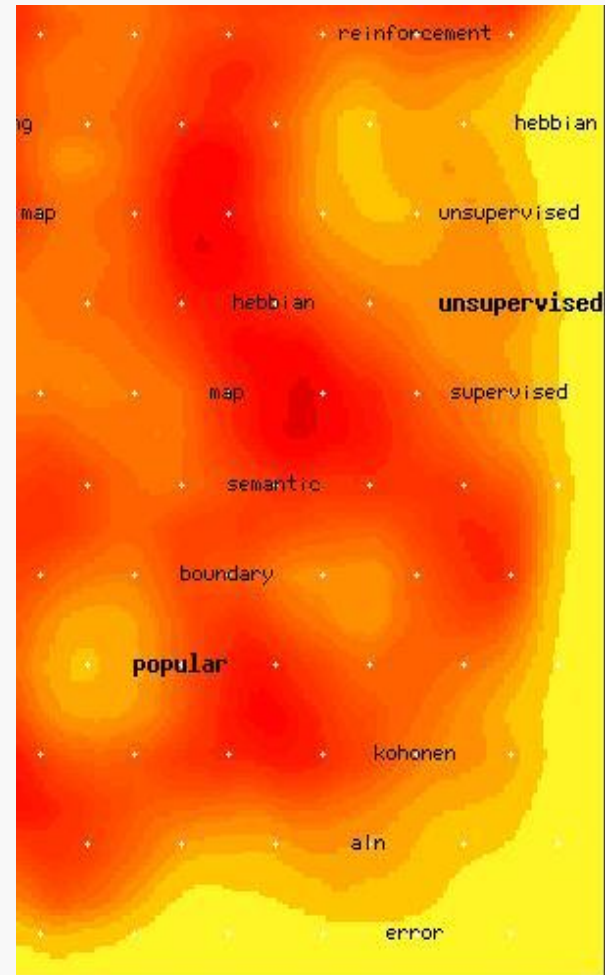
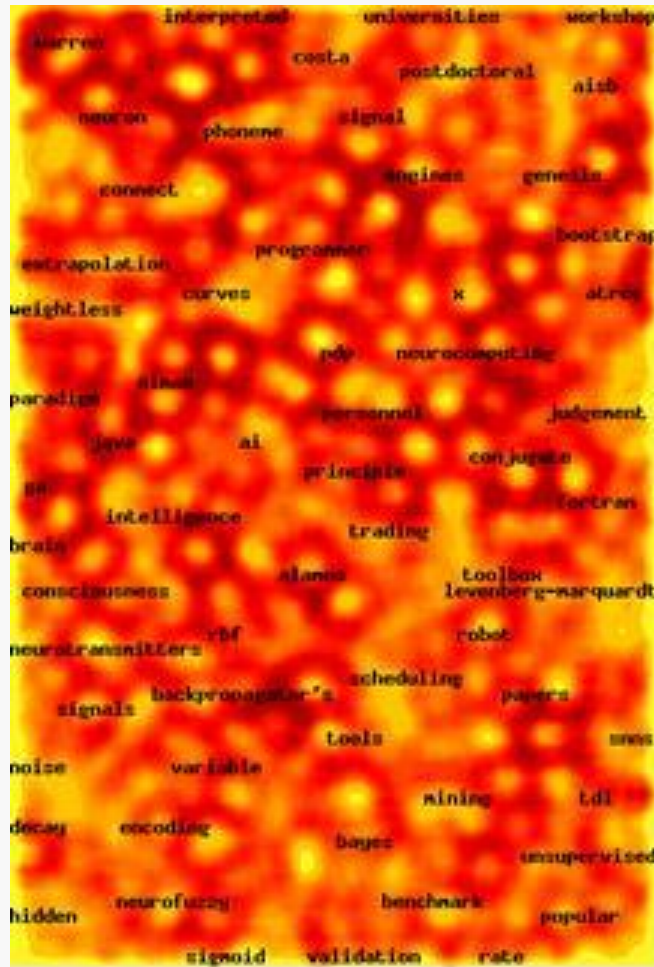
$$h_{mi}(\tau) = \exp\left(-\frac{\|r_m - r_i\|^2}{2\sigma_h^2(\tau)}\right), \quad i=1,\dots,M$$

$$w_{ij}(\tau+1) = w_{ij}(\tau) + \eta(\tau) h_{mi}(\tau) (x_{nj} - w_{ij}(\tau)), \quad j=1,\dots,d$$

$$\tau := \tau + 1$$

- Σταδιακή αργή μείωση του $\eta(\tau)$ και του $\sigma_h(\tau)$.
- Έλεγχος τερματισμού. Εάν όχι τότε $t:=t+1$ και έναρξη νέας εποχής.

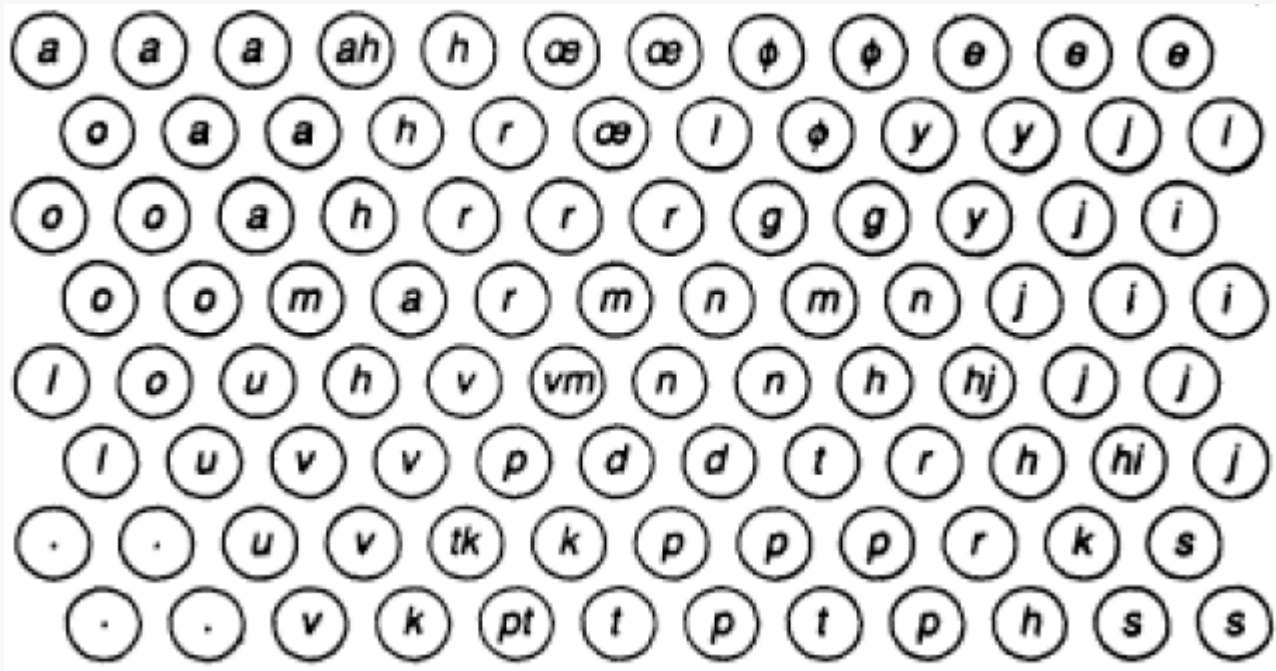
Εφαρμογή: WebSOM



Χάρτης κειμένων (ευρετήριο)

"Τεχνητά Νευρωνικά Δίκτυα" (Διαφάνειες),
Α. Λύκας, Παν. Ιωαννίνων

Εφαρμογή: neural phonetic typewriter



Χάρτης φωνημάτων