Άσκηση 4.1

$$a_2 y^{n+2} + a_1 y^{n+1} + a_0 y^n = h f(t^{n+2}, y^{n+2})$$

$q = 2 \rightsquigarrow a_2, a_1, a_0 = ;$

ευστάθεια;

Λύση

$p \geq 2 \iff C_0 = C_1 = C_2 = 0 \iff$

$a_0 + a_1 + a_2 = 0$

$C_1 \to a_1 + 2a_2 - 1 = 0$

$C_2 \to \frac{1}{2!}(a_1 + 2^2 a_2) - \frac{1}{1!} 2^{2-1} \cdot 1 = 0$

$\Rightarrow \boxed{a_2 = \frac{3}{2},\ a_1 = -2,\ a_0 = \frac{1}{2}}$

$C_3 = -\frac{1}{3} \neq 0 \Rightarrow p \leq 2$

Αυτή είναι η διβηματική μέθοδος ανάδρομων διαφορών.

Ευστάθεια

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\rho(z) = \frac{3}{2} z^2 - 2z + \frac{1}{2}$$

ρίζες: $z_1 = 1,\ z_2 = \frac{1}{3}$

Ικανοποιείται η συνθήκη των ριζών, συνεπώς η μέθοδος είναι ευσταθής.

Άσκηση 4.16

$a_3 = 1,\ a_2 = -\frac{11}{6},\ a_1 = 1,\ a_0 = -\frac{1}{6}$

$b_3 = \frac{1}{12},\ b_2 = \frac{1}{6},\ b_1 = -\frac{1}{2},\ b_0 = \frac{7}{6}$

Είναι ευσταθής; και γιατί;

Λύση

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\rho(z) = z^3 - \frac{11}{6} z^2 + z - \frac{1}{6}$$

$$= (z^3-1) - \frac{11}{6}(z^2-1) + z - 1$$

$$= (z-1)(z^2+z+1) - \frac{11}{6}(z-1)\cdot(z+1) + z-1$$

$$= (z-1)\cdot\frac{1}{6}(6z^2-5z+1)$$

<u>Ρίζες</u>: $z_1 = 1$, $z_2 = \frac{1}{2}$, $z_3 = \frac{1}{3}$

Ικανοποιείται η συνθήκη των ριζών, οπότε η μέθοδος είναι ευσταθής

<u>Άσκηση 4.17</u>

Συνέπεια της μεθόδου της Άσκησης 4.16 και εξήγηση.

<u>Λύση</u>

μέθοδος συνεπής $\Leftrightarrow p \geq 1 \Leftrightarrow C_0 = C_1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \rho(1) = 0 \\ \rho'(1) = \sigma(1) \end{cases}$$

με $\sigma(z) = \frac{1}{12}z^3 + \frac{1}{6}z^2 - \frac{1}{2}z + \frac{7}{6}$

Τώρα

$$\rho(1) = 1 - \frac{11}{6} + 1 - \frac{1}{6} = 2-2=0 \checkmark$$

$$\rho'(1) = 3 - \frac{11}{3} + 1 = \frac{1}{3}$$

και

$$\sigma(1) = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{7}{6} = \dots = \frac{1}{3}$$

οπότε $\rho'(1) = \sigma(1)$

Άρα η μέθοδος είναι συνεπής.

Άσκηση 1.22

k-βηματική μέθοδος ευσταθής και συνεπής

ΝΔΟ: $b_k + \dots + b_0 \neq 0$

Λύση

Απόδειξη

Μέθοδος συνεπής:

$$\begin{cases} \rho(1)=0 \\ \rho'(1)=\sigma(1) \end{cases}$$

άρα

$$\begin{cases} \rho(1)=0 \\ \rho'(1)=b_k+\dots+b_0 \end{cases}$$

Αν $b_k + \dots + b_0 = 0$, τότε το $z=1$ θα ήταν διπλή ρίζα του ρ.

Συμπέρασμα: Η μέθοδος δεν είναι ευσταθής

Άτοπο!

Άσκηση 1.23

$$(*)\ \frac{3}{2} y^{n+2} - 2y^{n+1} + \frac{1}{2} y^n = h f(t^{n+2}, y^{n+2})$$

Υπόθεση: Η f ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz

$\forall t \in [a,b]\ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

$$[f(t,y_1) - f(t,y_2)](y_1 - y_2) \leq 0$$

ΝΔΟ: Οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες (για κάθε h)

Λύση

Απόδειξη:

Θέτουμε $g(x) := \frac{3}{2} x - 2y^{n+1} + \frac{1}{2} y^n - h f(t^{n+2}, x)$

και η $(*)$ γράφεται ως $g(y^{n+2}) = 0$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η g έχει ακριβώς μια ρίζα

Μοναδικότητα → Η $-h \cdot f(t^{n+2}, x)$ είναι αύξουσα, συνεπώς η g είναι γνησίως αύξουσα.

Άρα έχει το πολύ μια ρίζα.

Ύπαρξη ρίζας → Η g είναι συνεχής

Αφού η $-hf(t^{n+2}, x)$ είναι αύξουσα, για $x \leq 0$ έχουμε

$$g(x) \leq \frac{3}{2} x \underbrace{- 2y^{n+1} + \frac{1}{2} y^n - hf(t^{n+2}, 0)}_{c}$$

$\Rightarrow g(x) \to -\infty$ για $x \to -\infty$

Συμπερασμα: Η g παίρνει και αρνητικές τιμές

Αντίστοιχα, για $x \geq 0$ έχουμε

$$g(x) \geq \frac{3}{2} x - 2y^{n+1} + \frac{1}{2} y^n - hf(t^{n+2}, 0)$$

οπότε $g(x) \to \infty$ για $x \to \infty$

Άρα η g παίρνει και θετικές τιμές.

Σύμφωνα με το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής η g παίρνει και την τιμή μηδέν, δηλαδή έχει τουλάχιστον μια ρίζα.

→ Συνολικά, η g έχει ακριβώς μια ρίζα.

Άσκηση 4.2

ΝΔΟ: $C_j = \frac{1}{j!}(a_1 + 2^j a_2 + \dots + k^j a_k) - \frac{1}{(j-1)!}(b_1 + 2^{j-1} b_2 + \dots + k^{j-1} b_k)$, $j \geq 2$

ΛΥΣΗ

Απόδειξη

$$\rho^n = \sum_{j=0}^{k} [a_j y(t^{n+j}) - hb_j y'(t^{n+j})]$$

$$= \sum_{j=0}^{k} [a_j y(t^n + j \cdot h) - h b_j y'(t^n + j \cdot h)]$$

Έστω $\tilde{p}$ οσοδήποτε μεγάλος φυσικός αριθμός και $y \in C^{\tilde{p}+1}[a,b]$

Αναπτύσσοντας κατά Taylor,

π.χ ως προς το σημείο t^n, έχουμε

$$\rho^n = \sum_{j=0}^{k}\left[a_j \sum_{v=0}^{\tilde{p}} \frac{(j\cdot h)^v}{v!}\, y^{(v)}(t^n) - h\cdot b_j \sum_{v=0}^{\tilde{p}-1} \frac{(j\cdot h)^v}{v!}\, y^{(v+1)}(t^n)\right] + O(h^{\tilde{p}+1})$$

$$= \sum_{j=0}^{k}\left[a_j \cdot y(t^n) + a_j \sum_{v=1}^{\tilde{p}} \frac{(j\cdot h)^v}{v!}\, y^{(v)}(t^n) - h\, b_j \sum_{v=0}^{\tilde{p}-1} \frac{(j\cdot h)^v}{v!}\, y^{(v+1)}(t^n)\right] + O(h^{\tilde{p}+1})$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{k} a_j\right)}_{=C_0} y(t^n) + \sum_{j=0}^{k} a_j \sum_{v=1}^{\tilde{p}} \frac{(j\cdot h)^v}{v!}\, y^{(v)}(t^n) - h\cdot b_j \sum_{v=1}^{\tilde{p}} \frac{(j h)^{v-1}}{(v-1)!}\, y^{(v)}(t^n) \Big] + O(h^{\tilde{p}+1})$$

$$= C_0 \cdot y(t^n) + \sum_{v=1}^{\tilde{p}} h^v \left[\sum_{j=0}^{k} a_j \frac{j^v}{v!} - \sum_{j=0}^{k} b_j \frac{j^{v-1}}{(v-1)!}\right] y^{(v)}(t^n) + O(h^{\tilde{p}+1})$$

$$= C_0\, y(t^n) + h\underbrace{\left(\sum_{j=1}^{k} j\, a_j - \sum_{j=0}^{k} b_j\right)}_{=C_1} y'(t^n) + \sum_{v=2}^{\tilde{p}} h^v \underbrace{\left[\frac{1}{v!}\sum_{j=1}^{k} j^v a_j - \frac{1}{(v-1)!}\sum_{j=1}^{k} j^{v-1} b_j\right]}_{=C_v} y^{(v)}(t^n) + O(h^{\tilde{p}+1})$$