13/12/17

- ΑΣΚΗΣΕΙΣ -

Άσκηση 3.12

$$\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1q} & \tau_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{q1} & \cdots & a_{qq} & \tau_q \\ \hline b_1 & \cdots & b_q & \end{array}$$

ΝΔΟ: $p \geq 1 \iff b_1 + \dots + b_q = 1$

Απόδειξη:

$$y^{n} = y(t^n) + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}), \quad i=1,\dots,q.$$

$$\delta^n = y(t^n) + h \sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, y^{n,i}) - y(t^{n+1})$$

Τώρα

$$y^{n,i} = y(t^n) + O(h)$$

$$t^{n,i} = t^n + O(h)$$

οπότε

$$\delta^n = y(t^n) + h \sum_{i=1}^{q} b_i \left[f(t^n, y(t^n)) + O(h) \right] - y(t^{n+1})$$

$$= y(t^n) + h(b_1 + \dots + b_q)\, y'(t^n) + O(h^2) - y(t^{n+1})$$

$$= \cancel{y(t^n)} + h(b_1 + \dots + b_q)\, y'(t^n) + O(h^2) - \left[\cancel{y(t^n)} + h y'(t^n) + O(h^2) \right]$$

$$= h(b_1 + \dots + b_q - 1) \underset{\neq 0}{\boxed{y'(t^n)}} + O(h^2)$$

άρα $p \geq 1 \iff \delta^n = O(h^2) \iff b_1 + \dots + b_q - 1 = 0$.

Άσκηση 3.15

$$\begin{array}{ccc|c} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \end{array}$$

συνέπεια?

$$p \geq 1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Άσκηση 3.12}}}{\Longleftrightarrow} \underset{\text{σωστό}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1}$$

Συμπέρασμα: Η μέθοδος είναι συνεπής.

Άσκηση 3.9

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \hline 1 & \end{array} \Rightarrow p=1$$

Απόδειξη

1ος τρόπος: (χωρίς πράξεις)

- $b_1 = 1 \Rightarrow p \geq 1$
- $p \leq 2$, αφού $p \leq 2q$

Για $q=1$ η μόνη μέθοδος με $p=2$ είναι η

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline 1 & \end{array}$$

Άρα $p<2$.

2ος τρόπος: (με πράξεις)

$$\zeta^{n,1} = y(t^n) + h\frac{1}{3} f(\underset{\substack{\uparrow \\ t^n + \frac{h}{3}}}{t^{n,1}}, S^{n,1})$$

$$\delta^n = y(t^n) + h f(t^{n,1}, \zeta^{n,1}) - y(t^{n+1}) =$$

$$= y(t^n) + h\, f\left(t^n + \frac{h}{3}, y(t^n)\cancel{)} + \frac{h}{3} f(t^{n,1}, y^{n,1})\right) - y(t^{n+1})$$

$$= \cancel{y(t^n)} + h \underbrace{f(\cancel{t^n, y(t^n)})}_{y'(t^n)} + O(h^2) - [\cancel{y(t^n)} + h\, \cancel{y'(t^n)} + O(h^2)]$$

$$= O(h^2)$$

$$\Rightarrow p \geq 1$$

Παράδειγμα

$$\begin{cases} y'(t) = 2t, & 0 \leq t \leq 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Λύση: $y(t) = t^2$

Τοπικό σφάλμα:

$$\delta^n = y(t^n) + h\, 2 \cdot \left(t^n + \frac{h}{3}\right) - y(t^{n+1})$$

$$= (t^n)^2 + 2ht^n + \frac{2}{3}h^2 - (t^n + h)^2$$

$$= \cancel{(t^n)^2} + \cancel{2ht^n} + \frac{2}{3}h^2 - \cancel{(t^n)^2} - \cancel{2ht^n} - h^2$$

$$= -\frac{1}{3}h^2$$

$$\Rightarrow |\delta^n| \geq \frac{1}{3}h^2 \Rightarrow \boxed{p \leq 1}$$

Άσκηση 3.3

$$\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & \tau_2 \\ \hline b_1 & b_2 & \end{array}$$

Μέθοδοι με τάξη $p = 2$.

$\rightsquigarrow$

Λύση

$$J^{n,1} = y(t^n)$$

$$J^{n,2} = y(t^n) + h a_{21} f(t^{n,1}, J^{n,1})$$

$$= y(t^n) + h\, a_{21} \underbrace{f(t^n, y(t^n))}_{y'(t^n)} \quad = y(t^n) + h a_{21} y'(t^n)$$

$$\delta^n = y(t^n) + h\, b_1 f(t^{n,1}, J^{n,1}) + h b_2 f(t^{n,2}, J^{n,2}) - y(t^{n+1})$$

$$= y(t^n) + b_1 \cdot h \cdot y'(t^n) + b_2 h\, f(t^n + \tau_2 h,\ y(t^n) + a_{21} h y'(t^n)) - y(t^{n+1})$$

Taylor ως προς

$$= \cancel{y(t^n)} + b_1 \cdot h \cdot y'(t^n) + b_2 \cdot h [f(t^n\, y(t^n)) + \tau_2 h f_t(t^n, y(t^n)) + a_{21} h y'(t^n) f_y(t^n, y(t$$
$$+ O(h^2)] - [\cancel{y(t^n)} + h y'(t^n) + \frac{h^2}{2} y''(t^n) + O(h^3)]$$

$$= (b_1 + b_2 - 1) h y'(t^n) + b_2 \tau_2 h^2 f_t(t^n, y(t^n)) + b_2 a_{21} h^2 y'(t^n) f_y(t^n, y(t^n)) +$$
$$+ O(h^3) - \frac{h^2}{2} f_t(t^n, y(t^n)) - \frac{h^2}{2} y'(t^n) \cdot f_y(t^n, y(t^n) + O(h^3)$$

$$= (b_1 + b_2 - 1) h y'(t^n) + (b_2 \tau_2 - \frac{1}{2}) h^2 f_t(y^n, y(t^n)) + (b_2 a_{21} - \frac{1}{2}) h^2 y'(t^n) \cdot f_y(t^n, y(t^n)$$
$$+ O(h^3)$$

$$\Rightarrow \quad \delta^n = O(h^3) \iff \left.\begin{matrix} b_1 + b_2 - 1 = 0 \\ b_2 \tau_2 - \frac{1}{2} = 0 \\ b_2 a_{21} - \frac{1}{2} = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} b_1 + b_2 = 1 \\ b_2 \tau_2 = 1/2 \\ b_2 a_{21} = 1/2 \end{matrix}$$

Γιατί μπορούμε να επιλέξουμε την f είτε ανεξάρτητη του t είτε ανεξάρτητη του y)

Για $p \geq 2$, επιλέγουμε $b_2 \neq 0$ και

$$\begin{cases} b_1 = 1 - b_2 \\ a_{21} = \tau_2 = \dfrac{1}{2 b_2} \end{cases}$$

Παράδειγμα

$$\begin{cases} y' = y, & 0 \le t \le 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Λύση: $y(t) = e^t$

Τότε

$$\delta^n = e^{nh} + h b_1 e^{nh} + h b_2 [y(t^n) + h a_{21} y'(t^n)] - y(t^{n+1})$$

$$= e^{nh} [1 + (b_1 + b_2) h + b_2 a_{21} h^2 - e^h]$$

$$= e^h [1 + h + \frac{h^2}{2} - e^h]$$

Taylor: $1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{e^\xi}{6} h^3$

$$= -\frac{1}{6} h^3 e^{nh} \quad \text{με } \xi \in (0,1)$$

$$\Rightarrow |\delta^n| \ge \frac{1}{6} h^3$$

$$\Rightarrow \boxed{p \le 2}$$

Σχόλιο

Το παράδειγμα

$$\begin{cases} y'(t) = t^2, & 0 \le t \le 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

δεν μας οδηγεί στο συμπέρασμα $p \le 2$ μόνο στην περίπτωση $\tau_2 = \frac{2}{3}$.

Άσκηση 3.13

$$\begin{cases} y'(t) = 1, & 0 \le t \le 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Λύση: $y(t) = t$.

$N \in \mathbb{N}$, $h = \frac{1}{N}$, $t^n = nh$, $n = 0, \dots, N$.

Μέθοδος RK $\begin{array}{c|c} A & \tau \\ \hline b^T & \end{array}$

Υπόθεση

$$y^N \to 1, \quad N \to \infty$$

ΝΔΟ: μέθοδος συνεπής.

Απάντηση

$y^0 = 0$

$$y^{n+1} = y^n + h \cdot (b_1 + \dots + b_q), \quad n = 0, \dots, N-1$$

Συμπέρασμα

$$y^n = n \cdot h (b_1 + \dots + b_q)$$

Ιδιαίτερα

$$y^N = \underset{=1}{Nh} (b_1 + \dots + b_q)$$

$$\Rightarrow \boxed{y^N = b_1 + \dots + b_q}$$

Άρα $y^N \to 1$, $N \to \infty \Leftrightarrow b_1 + \dots + b_q \to 1 \Leftrightarrow \boxed{b_1 + \dots + b_q = 1}$

$$\Leftrightarrow \boxed{p \geq 1}$$

14/12/17

- ΑΣΚΗΣΕΙΣ -

Άσκηση 3.14

$$\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1q} & \tau_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{q1} & \cdots & a_{qq} & \tau_q \\ \hline b_1 & \cdots & b_q & \end{array}$$

$$y^{n,i} = y(t^n) + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}), \quad i=1,\dots,q.$$

ΝΔΟ:

- $\max\limits_{n,i} |y(t^{n,i}) - y^{n,i}| = Ch$
- $\max\limits_{n} |y(t^{n,i}) - y^{n,i}| \le Ch^2 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{q} a_{ij} = \tau_i, \quad i=1,\dots,q$

Απόδειξη

$$y^{n,i} = y(t^n) + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j})$$

Τώρα

$$f(t^{n,j}, y^{n,j}) = f(\underset{\uparrow}{\boxed{t^n}} + \tau_j h, \underset{\uparrow}{\boxed{y(t^n)}} + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}))$$

Taylor ως προς αυτό το σημείο

$$= f(t^n, y(t^n)) + O(h) = y'(t^n) + O(h)$$

Αντικαθιστάμε στην προηγούμενη σχέση και παίρνουμε

$$y^{n,i} = y(t^n) + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij}\, y'(t^n) + O(h^2)$$

Επίσης

$$y(t^{n,i}) = y(t^n + \tau_i \cdot h) = y(t^n) + \tau_i h y'(t^n) + O(h^2),$$

οπότε,

$$y^{n,i} = y(t^{n,i}) - \tau_i h y'(t^n) + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij}\, y'(t^n) + O(h^2)$$

$$\Rightarrow y^{n,i} - y(t^{n,i}) = h\left[\sum_{j=1}^{q} a_{ij} - \tau_i\right] y'(t^n) + O(h^2)$$

Από αυτή τη σχέση προκύπτουν αμέσως οι δύο ζητούμενες εκτιμήσεις.