Άσκηση 2.9 01/12/17

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) &, t \geq 0 \\ y'(t) = x(t) &, t \geq 0 \\ x(0) = 1 &, y(0) = 0 \end{cases}$$

(η λύση είναι: $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$) $\longleftarrow$ δεν το ξέρουμε, δεν το χρησιμοποιούμε.

(α) $(x(t))^2 + (y(t))^2 = 1$, $t \geq 0$

Απάντηση:

$$[(x(t))^2 + (y(t))^2]' =$$
$$[(x(t))^2]' + [(y(t))^2]' =$$
$$2 \cdot x(t) \cdot \underbrace{x'(t)}_{= -y(t)} + 2 y(t) \cdot \underbrace{y'(t)}_{= x(t)} =$$
$$-2\, x(t)\, y(t) + 2\, y(t) \cdot x(t) = 0$$

$\Rightarrow$ $(x(t))^2 + (y(t))^2 =$ σταθερά για $t \geq 0$

Ιδιαίτερα

$$(x(t))^2 + (y(t))^2 = (\underbrace{x(0)}_{=1})^2 + (\underbrace{y(0)}_{=0})^2 = 1$$

(β) Μέθοδος του Euler με βήμα h:

$$\begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^n \\ y^n \end{pmatrix} + h \cdot \begin{pmatrix} -y^n \\ x^n \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} x^{n+1} &= x^n - h \cdot y^n \\ y^{n+1} &= y^n + h x^n \end{aligned}\right\} n = \ldots$$

ΝΔΟ

$$(x^n)^2 + (y^n)^2 \to \infty, \ n \to \infty$$

Απάντηση:

$$(x^{n+1})^2 + (y^{n+1})^2 = (x^n - h y^n)^2 + (y^n + h x^n)^2 =$$
$$= (x^n)^2 - \cancel{2 x^n h y^n} + h^2 (y^n)^2 + (y^n)^2 + \cancel{2 x^n h y^n} + h^2 (x^n)^2$$
$$= (1 + h^2) \left[(x^n)^2 + (y^n)^2 \right]$$

Άρα, επαγωγικά

$$(x^n)^2 + (y^n)^2 = (1 + h^2)^n \underbrace{\left[(x^0)^2 + (y^0)^2 \right]}_{=1}$$

$\Rightarrow (x^n)^2 + (y^n)^2 \to \infty, \ n \to \infty$.

(γ) Μέθοδος του Τραπεζίου.

$$\begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{n} \\ y^{n} \end{pmatrix} + \frac{h}{2}\left[\begin{pmatrix} -y^{n} \\ x^{n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y^{n+1} \\ x^{n+1} \end{pmatrix}\right]$$

$$\Rightarrow \quad x^{n+1} = x^n - \frac{h}{2}(y^n + y^{n+1})$$

$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}(x^n + x^{n+1})$$

* μπορώ να υψώσω σε τετράγωνο αλλά θέλει πολλές πράξεις.

ΝΔΟ: $(x^n)^2 + (y^n)^2 = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

Απόδειξη:

$$\left.\begin{aligned} x^{n+1} - x^n &= -\frac{h}{2}(y^n + y^{n+1}) \\ y^{n+1} - y^n &= \frac{h}{2}(x^n + x^{n+1}) \end{aligned}\right\}$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη σχέση με $x^{n+1} + x^n$ και τη δεύτερη με $y^{n+1} + y^n$ και αθροίζουμε, οπότε παίρνουμε:

$$(x^{n+1})^2 - (x^n)^2 + (y^{n+1})^2 - (y^n)^2 = -\frac{h}{2}\cancel{(y^n + y^{n+1})(x^n + x^{n+1})} + \frac{h}{2}\cancel{(x^n + x^{n+1})(y^n + y^{n+1})}$$

$$\Rightarrow \quad (x^{n+1})^2 + (y^{n+1})^2 = (x^n)^2 + (y^n)^2$$

$$\Rightarrow \quad (x^n)^2 + (y^n)^2 = \underbrace{(x^0)^2 + (y^0)^2}_{=1}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{(x^n)^2 + (y^n)^2 = 1}$$

(δ) Πεπλεγμένη μέθοδος του Euler:

$$\begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{n} \\ y^{n} \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} -y^{n+1} \\ x^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x^{n+1} &= x^n - h y^{n+1} \\ y^{n+1} &= y^n + h x^{n+1} \end{aligned}\right\}$$

(χωρίζω τα y^{n+1} και x^{n+1})
(— " — x^n και y^n)

$$\left.\begin{aligned} x^{n+1} + h y^{n+1} &= x^n \\ y^{n+1} - h x^{n+1} &= y^n \end{aligned}\right\}$$

Άρα

$$(x^n)^2 + (y^n)^2 = (x^{n+1} + h\cdot y^{n+1})^2 + (y^{n+1} - h x^{n+1})^2$$

$$= (x^{n+1})^2 + \cancel{2hx^{n+1}y^{n+1}} + h^2(y^{n+1})^2 + (y^{n+1})^2 - \cancel{2hx^{n+1}y^{n+1}} + h^2(x^{n+1})^2$$

$$= (1+h^2)\,[(x^{n+1})^2 + (y^{n+1})^2]$$

Άρα

$$(x^{n+1})^2 + (y^{n+1})^2 = \frac{1}{1+h^2}[(x^n)^2 + (y^n)^2]$$

οπότε επαγωγικά

$$(x^n)^2 + (y^n)^2 = \frac{1}{(1+h^2)^n} \to 0, \quad n \to \infty$$

Άσκηση 2.11

$$\begin{cases} x'(t) = -2x(t) + y(t), & t \in [0,1] \\ y'(t) = 2x(t) - 2y(t), & -\text{"}- \\ x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

(Άσκηση 1.28) $\to (x(t))^2 + (y(t))^2$ φθίνουσα

Πεπλεγμένη μέθοδος του Euler

$$\begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^n \\ y^n \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} -2x^{n+1} + y^{n+1} \\ 2x^{n+1} - 2y^{n+1} \end{pmatrix}$$

ΝΔΟ:

$$(x^{n+1})^2 + (y^{n+1})^2 \le (x^n)^2 + (y^n)^2$$

Απαίτηση:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$\forall x \in \mathbb{R}^2 \quad (Mx, x) \le 0$ μη θετικά ορισμένος (αρνητικά ημιορισμένο)

$$\begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^n \\ y^n \end{pmatrix} + h\,M \begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix}$$

Παίρνουμε το εσωτερικό γινόμενο με $\begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix}$ και έχουμε

$$(x^{n+1})^2 + (y^{n+1})^2 = x^n x^{n+1} + y^n y^{n+1} + h \underbrace{\left(M \begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix}\right)}_{\le 0}$$

Άρα

$$(x^{n+1})^2 + (y^{n+1})^2 \le x^n x^{n+1} + y^n y^{n+1}$$

$$\overset{CS}{\leq} \sqrt{(x^n)^2+(y^n)^2} + \sqrt{(x^{n+1})^2+(y^{n+1})^2}$$

$$\Rightarrow \cancel{\sqrt{}}(x^{n+1})^2+(y^{n+1})^2 \leq \cancel{\sqrt{}}(x^n)^2+(y^n)^2$$

Άσκηση 2.12

$$\begin{cases} y'(t) = M\cdot y(t), & t\geq 0 \\ y(0)=y_0 \end{cases}$$

(Άσκηση 1.27)

με $M\in\mathbb{R}^{m,m}$ μη θετικά ορισμένος, δηλ

$\forall x\in\mathbb{R}^m \quad (Mx,x)\leq 0$

• Πεπλεγμένη μέθοδος του Euler:

$$\boxed{y^{n+1} = y^n + hMy^{n+1}}$$

ΝΔΟ

$$\|y^{n+1}\|\leq\|y^n\|$$

Απάντηση:

Παίρνουμε εσωτερικό γινόμενο με το y^{n+1} και έχουμε

$$\|y^{n+1}\|^2 = (y^n, y^{n+1}) + h\underbrace{(My^{n+1}, y^{n+1})}_{\leq 0}$$

$$\Rightarrow \|y^{n+1}\|^{\cancel{2}} \leq (y^n, y^{n+1})$$
$$\leq \|y^n\|\cdot\cancel{\|y^{n+1}\|}$$
$$\Rightarrow \boxed{\|y^{n+1}\|\leq\|y^n\|}$$

Μέθοδος του τραπεζίου (ή μέθοδος του μέσου)

$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}\left[My^n + My^{n+1}\right]$$

ΝΔΟ: $\|y^{n+1}\|\leq\|y^n\|$

Απάντηση:

$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}M(y^n+y^{n+1}) \Rightarrow$$
$$y^{n+1} - y^n = \frac{h}{2}M\cdot(y^n+y^{n+1})$$

Παίρνω το εσωτερικό γινόμενο

με y^n+y^{n+1} και έχουμε:

$$\underbrace{(y^{n+1}-y^n, y^{n+1}+y^n)}_{\|y^{n+1}\|^2-\|y^n\|^2} = \frac{h}{2}\underbrace{(M(y^n+y^{n+1}), y^n+y^{n+1})}_{\leq 0}$$

Διαφ. τετραγώνων

$$\Rightarrow \|y^{n+1}\|^2-\|y^n\|^2 \leq 0 \rightsquigarrow \boxed{\|y^{n+1}\|^2 \leq \|y^n\|^2}$$

Άσκηση 2.14

Άσκηση 1.29

$$\begin{cases} y'(t) = My(t), & t\geq 0, \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

$M\in\mathbb{R}^{m,m}$ αντισυμμετρικός.

Μέθοδος του τραπεζίου (μέθοδος του μέσου)

$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}[My^n + My^{n+1}]$$

<u>ΝΔΟ</u>: $\|y^n\| = \|y_0\|$, $n\in\mathbb{N}_0$

Απάντηση:

- M αντισυμμετρικός $\Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}^m$ $(Mx,x)=0$

$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}M(y^n+y^{n+1})$$

$$\Rightarrow y^{n+1}-y^n = \frac{h}{2}M(y^n+y^{n+1})$$

Παίρνουμε το εσωτερικό γινόμενο με y^n+y^{n+1} και έχουμε

$$(y^{n+1}-y^n, y^{n+1}+y^n) = \frac{h}{2}\underbrace{(M(y^n+y^{n+1}), y^n+y^{n+1})}_{=0}$$

$$\Rightarrow (y^{n+1}-y^n, y^{n+1}+y^n) = 0$$

$$\Rightarrow \|y^{n+1}\|^2-\|y^n\|^2 = 0$$

$$\Rightarrow \|y^{n+1}\|^2 = \|y^n\|^2$$

$$\Rightarrow \|y^n\| = \|y^0\| = \|y_0\|$$

Άσκηση 2.15

$$\begin{cases} y' = -e^y, & t \in [0,1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Πεπλεγμένη μέθοδος του Euler

<u>ΝΔΟ</u>: Οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες

<u>Απάντηση</u>

Θέτουμε $f(y) = -e^y$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η f ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz.

Έχουμε $f'(y) = -e^y \leq 0$, οπότε η f φθίνουσα, άρα ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz.

<u>Άσκηση 2.17</u>

$$y' = f(t,y), \quad a \leq t \leq b,$$
$$y(a) = y_0$$

Η f ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz στο $\mathbb{R}$.

<u>Μέθοδος του μέσου</u>:

$$(*) \quad y^{n+1} = y^n + h \cdot f\left(t^n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y^n + y^{n+1})\right)$$

ΝΔΟ: Προσεγγίσεις καλά ορισμένες

<u>Απόδειξη</u>

<u>1ος</u> τρόπος: Με $g(x) := x - y^n - hf\left(t^n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y^n + x)\right)$

η $(*)$ γράφεται στη μορφή

$$g(y^{n+1}) = 0.$$

Επομένως, αρκεί να αποδείξαμε ότι η g έχει ακριβώς μια ρίζα.

<u>Μοναδικότητα</u>:

Η g είναι γνήσια αύξουσα, οπότε έχει το πολύ μια ρίζα.

<u>Ύπαρξη ρίζας</u>: Για $x \leq 0$ έχουμε

$$f\left(t^n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y^n + x)\right) \geq f\left(t^n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y^n + 0)\right)$$

$$\Rightarrow -hf\left(t^n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y^n + x)\right) \leq -h \cdot f\left(t^n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}y^n\right)$$

οπότε $g(x) = x - y^n - hf\left(t^n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}y^n\right) \to -\infty$ για $x \to -\infty$

<u>Συμπέρασμα</u>

$\hookrightarrow$ Η g παίρνει και αρνητικές τιμές.

Για $x \geq 0$, εντελώς αντίστοιχα έχουμε
$$g(x) \geq x - y^n - hf(t^n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}y^n) \to \infty \text{ για } x \to \infty$$

Επομένως, η g παίρνει και θετικές τιμές.

Συνεπώς, η g έχει τουλάχιστον μια ρίζα.

2ος τρόπος: Θέτουμε $x^* = \frac{1}{2}(y^n + y^{n+1})$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι το x^* είναι καλά ορισμένο. Τώρα

$$y^{n+1} = 2x^* - y^n$$
οπότε η (*) γράφεται ως
$$2x^* - y^n = y^n + hf(t^n + \frac{h}{2}, x^*)$$
ή
$$(**) \quad 2x^* = 2y^n + hf(t^n + \frac{h}{2}, x^*).$$

Με $\tilde{g}(x) = 2x - 2y^n - hf(t^n + \frac{h}{2}, x)$ η (**) γράφεται στη μορφή $\boxed{\tilde{g}(x^*) = 0.}$

Όπως προηγουμένως, η $\tilde{g}$ είναι γνησίως αύξουσα, συνεχής, και παίρνει και αρνητικές τιμές.
Άρα έχει ακριβώς μια ρίζα x^*.

Άσκηση 2.18 5/12/17

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f'(x) \le 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ (άρα f φθίνουσα)

$\begin{cases} y' = f(y), & a \le t \le b, \\ y(a) = y_0 \end{cases}$

Μέθοδος του τραπεζίου.

$(*)$ $y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}\left[f(y^n) + f(y^{n+1})\right]$

<u>ΝΔΟ</u>: Προσεγγίσεις καλά ορισμένες.

<u>Απόδειξη</u>

Θέτουμε $g(x) = x - y^n - \frac{h}{2}\left[f(y^n) + f(x)\right]$

και γράφουμε την $(*)$ στη μορφή $g(y^{n+1}) = 0$

Άρα, αρκεί να αποδείξουμε ότι η g έχει ακριβώς μια ρίζα.

<u>Μοναδικότητα</u>: Η g είναι γνησίως αύξουσα, οπότε έχει το πολύ μια ρίζα.

<u>Ύπαρξη ρίζας</u>: Για $x \le 0$ έχουμε $f(x) \ge f(0)$

$\iff -\frac{h}{2}\left[f(y^n) + f(x)\right] \le -\frac{h}{2}\left[f(y^n) + f(0)\right]$

οπότε

$$g(x) \le x \overbrace{- y^n - \frac{h}{2}\left[f(y^n) + f(0)\right]}^{\text{σταθερά}} \to -\infty \text{ για } x \to -\infty$$

Επομένως, η g παίρνει και αρνητικές τιμές.

Εντελώς αντίστοιχα βλέπουμε ότι η g παίρνει και θετικές, οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής έχει τουλάχιστον μια ρίζα.

Άσκηση 2.19

$q: [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής

$\begin{cases} y'(t) = -(y(t))^3 + q(t), & t \in [0,1] \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Μέθοδος του τραπεζίου

ΝΔΟ: Προσεγγίσεις καλά ορισμένες.

<u>Απόδειξη</u>:

Με $f(t,y) = -y^3 + q(t)$

έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t,y) = -3y^2 \leq 0,$$

Επομένως, η f ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz ως προς y. Ακολουθώντας τη λύση της Άσκησης 2.18 αποδεικνύουμε ότι οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες.

-ΤΕΛΟΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 2ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ-