03/11/17

Άσκηση 1.1

$p:[a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής

ΝΔΟ: Κάθε λύση της <u>ομογενούς</u> γρ. διαφ. εξίσωσης

$$y'(t) = p(t) \cdot y(t) \quad , a \le t \le b,$$

είναι της μορφής

$$\circledast \qquad y(t) = C e^{\int_a^t p(s)ds} \quad , a \quad t \le b$$

<u>Απόδειξη</u>

<u>Ισχυρισμός</u>: Οι συναρτήσεις $\circledast$ αποτελούν λύσεις

Πράγματι,

$$y'(t) = \underbrace{C e^{\int_a^t p(s)ds}}_{\to y(t)} \cdot \underbrace{\left(\int_a^t p(s)\,ds\right)'}_{= p(t)} = p(t)\,y(t) \quad ✓$$

<u>Ισχυρισμός</u>: Δεν υπάρχουν λύσεις της ΔΕ πέρα αυτών της μορφής $\circledast$

Έστω y λύση. Θεωρώ τη συνάρτηση

$$u(t) = e^{-\int_a^t p(s)ds} \, y(t) \quad , a \le t \le b$$

Θα δείξουμε ότι $u(t) = C$

Έχουμε

$$u'(t) = e^{-\int_a^t p(s)ds} \, y'(t) + \underbrace{\left(e^{-\int_a^t p(s)ds}\right)'}_{= -p(t) \cdot e^{-\int_a^t p(s)ds}} y(t)$$

$$= e^{-\int_a^t p(s)ds} \, \underbrace{[y'(t) - p(t)y(t)]}_{= 0}$$

$$\Rightarrow u(t) = C$$

Επομένως

$$C = e^{-\int_a^t p(s)\,ds} \, y(t) \Rightarrow y(t) = C e^{\int_a^t p(s)ds}$$

Άσκηση 12 (Η μέθοδος μεταβολής των σταθερών)

$p, q : [a,b] \to \mathbb{R}$

<u>Ν.Δ.Ο</u> : Οι λύσεις της $y'(t) = p(t)\cdot y(t) + q(t)$, $a \le t \le b$, είναι της μορφής

$$(**) \quad y(t) = e^{\int_a^t p(s)\,ds}\left[C_0 + \int_a^t q(s)\cdot e^{-\int_a^s p(\tau)\,d\tau}\,ds\right],$$

$a \le t \le b$, με C_0 σταθερα.

<u>Απόδειξη</u>

<u>Ισχυρισμός</u>: Οι δοθείσες συναρτήσεις αποτελούν λύσεις.

Έχουμε

$$y'(t) = p(t)\cdot \underbrace{e^{\int_a^t p(s)\,ds}\left[C_0 + \int_a^t p(s)\, e^{-\int_a^s p(\tau)\,d\tau}\,ds\right]}_{= y(t)}$$

$$+\, \cancel{e^{\int_a^t p(s)\,ds}}\; q(t)\cdot \cancel{e^{-\int_a^t p(\tau)\,d\tau}}$$

$$= p(t)\cdot y(t) + q(t) \quad \checkmark$$

<u>Ισχυρισμός</u>: Δεν υπάρχουν λύσεις πέραν αυτών της δοθείσας μορφή

Έστω $\tilde{y}(t)$ μια λύση.

Αν $y(t)$ λύση της δοθείσας μορφής, τότε έχουμε:

$$\tilde{y}'(t) - y'(t) = p(t)\,\tilde{y}(t) + \cancel{q(t)} - p(t)y(t) - \cancel{q(t)} = p(t)\cdot[\tilde{y}(t) - y(t)]$$

Άρα η $\tilde{y} - y$ αποτελεί λύση της αντίστοιχης <u>ομογενούς</u> Δ.Ε.

Σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση έχουμε

$$\tilde{y}(t) - y(t) = C_1 \cdot e^{\int_a^t p(s)\,ds}$$

Άρα

$$\tilde{y}(t) = y(t) + C_1\, e^{\int_a^t p(s)\,ds}$$

Δεδομένου ότι η y είναι της μορφής (**), βλέπουμε αμέσως ότι και η $\tilde{y}$ είναι της ίδιας μορφής με $C_0 + C$ στη θέση του C_0.

Ερώτημα: Πως οδηγούμαστε στην (**);

Θα προσπαθήσουμε να βρούμε λύσεις της μορφής

$$y(t) = C(t) \cdot e^{\int_a^t p(s)\,ds}$$

με κατάλληλη συνάρτηση C.

Για τέτοιες y έχουμε:

$$y'(t) = C(t)\, p(t) \cdot e^{\int_a^t p(s)ds} + C'(t)\, e^{\int_a^t p(s)ds}$$

$$= p(t)\, y(t) + C'(t) \cdot e^{\int_a^t p(s)ds}$$

Άρα η δεδομένη y είναι λύση αν και μόνο αν

$$C'(t) \cdot e^{\int_a^t p(s)ds} = q(t)$$

οπότε

$$C'(t) = q(t)\, e^{-\int_a^t p(s)ds}$$

Επομένως,

$$\underbrace{\int_a^t C'(s)\,ds}_{C(t) - \underbrace{C(a)}_{C}} = \int_a^t q(s) \cdot e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau} ds$$

Άσκηση 1.4

$$\begin{cases} y' = y^2, & 0 \le t \le 2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Θεωρία: Το πρόβλημα δεν έχει λύση. Η μόνη λύση στο διάστημα $[0,1)$ είναι $y(t) = 1/1-t$

*ΘΕΩΡΗΜΑ 1.2

Θεωρούμε διαστήματα της μορφής $[1-c, 1+c]$ (με $y_0 = 1$) και εφαρμόζουμε το Θεώρημα 1.2.
Τότε παίρνουμε ύπαρξη σε ένα διάστημα $[0, b']$.
Για ποιά τιμή του c, παίρνει το b' τη μεγαλύτερη τιμή του;

Η $f(t,y)=y^2$ ικανοποιεί την τοπική συνθήκη του Lipschitz σε κάθε διάστημα της μορφής $[1-c, 1+c]$ για $c>0$.

Εφαρμόζουμε το <u>θεώρημα 1.2</u>:

$$A = \max_{\substack{0\le t\le 2 \\ 1-c\le y\le 1+c}} |f(t,y)| = (1+c)^2$$

Τότε το Θεώρημα (1.2) εξασφαλίζει ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης σε ένα διάστημα $[0,b']$

$$\text{με } b' = \min\Big(2, \underbrace{\frac{c}{(1+c)^2}}_{\le 1/2}\Big) = \frac{c}{(1+c)^2}$$

$$= \frac{1}{2+\underbrace{(c+\frac{1}{c})}_{\ge 2}}$$

$c+\frac{1}{c} \ge 2 \Leftrightarrow$

$c^2+1 \ge 2c \Leftrightarrow$

$(c-1)^2 \ge 0$

Για $c=1$ το b' γίνεται μέγιστο και η αντίστοιχη μέγιστη τιμή είναι: $b' = 1/4$.

(μπορώ να μελετήσω τη συνάρτηση $\frac{c}{(1+c)^2}$ αν δεν μπορώ μ' αυτό τον τρόπο)

Άσκηση 1.9

$f: [a,b]\times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ συνεχής και

$\exists L\ge 0 \ \forall t\in[a,b] \ \forall x,\tilde{x}\in\mathbb{R}^m$

$\|f(t,x)-f(t,\tilde{x})\| \le L\|x-\tilde{x}\|$, με $\|\cdot\|$ την Ευκλείδεια νόρμα στον $\mathbb{R}^m$

$$\begin{cases} y'(t) = f(t,y(t)) & a\le t\le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z'(t) = f(t,z(t)), & a\le t\le b \\ z(a) = z_0 \end{cases}$$

<u>ΝΔΟ</u>:

$$\| y(t) - z(t) \| \le e^{L(t-a)} \|y_0 - z_0\|$$

<u>Απόδειξη</u>:

Έχουμε $y'(t) - z'(t) = f(t,y(t)) - f(t,z(t))$

$\Rightarrow (y'(t)-z'(t), y(t)-z(t)) = (f(t,y(t)) - f(t,z(t)), y(t)-z(t))$

$$\leq \underbrace{\|f(t,y(t)) - f(t,z(t))\|}_{\leq L\|y(t)-z(t)\|} \cdot \|y(t) - z(t)\|$$

Άρα
$$(y'(t) - z'(t), y(t) - z(t)) \leq L\|y(t) - z(t)\|^2$$

Θέτουμε $\varepsilon(t) := y(t) - z(t)$ και έχουμε $(\varepsilon'(t), \varepsilon(t)) \leq L\|\varepsilon(t)\|^2$.

Έχουμε
$$(\|\varepsilon(t)\|^2)' = \left((\varepsilon_1(t))^2 + \dots + (\varepsilon_m(t))^2\right)'$$
$$= 2\,\varepsilon_1(t)\varepsilon_1'(t) + \dots + 2\,\varepsilon_m(t)\cdot\varepsilon_m'(t)$$
$$= 2\cdot(\varepsilon'(t), \varepsilon(t))$$

Άρα $\quad \frac{1}{2}(\|\varepsilon(t)\|^2)' \leq L\underbrace{\|\varepsilon(t)\|^2}_{\varphi(t)}$

Με $\varphi(t) = \|\varepsilon(t)\|^2$ παίρνουμε

$$\frac{1}{2}\varphi'(t) \leq L\cdot\varphi(t) \Leftrightarrow \varphi'(t) - 2L\cdot\varphi(t) \leq 0 \Leftrightarrow$$
$$\left(e^{-2Lt}\cdot\varphi(t)\right)' \leq 0$$

Η $e^{-2Lt}\cdot\varphi(t)$ είναι φθίνουσα, οπότε $e^{-2Lt}\varphi(t) \leq e^{-2La}\varphi(a)$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi(t) \leq e^{2L(t-a)}\varphi(a)}$$

Άρα
$$\|\varepsilon(t)\|^{\cancel{2}} \leq e^{\cancel{2}L(t-a)}\cdot\|\varepsilon(a)\|^{\cancel{2}}$$
ή
$$\|y(t) - z(t)\| \leq e^{L(t-a)}\|y_0 - z_0\|$$

Άσκηση 1.10

$f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής τ.ω. $\forall t \in [a,b]$ $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

$$(f(t,y_1) - f(t,y_2)) \cdot (y_1 - y_2) \le v\,(y_1 - y_2)^2$$

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z'(t) = f(t, z(t)), & a \le t \le b \\ z(a) = z_0 \end{cases}$$

<u>ΝΔΟ</u>

$$|y(t) - z(t)| \le e^{v(t-a)} |y_0 - z_0| \quad \forall t \in [a,b]$$

<u>Απόδειξη</u>

$$y'(t) - z'(t) = f(t, y(t)) - f(t, z(t)) \Rightarrow$$

$$[y'(t) - z'(t)] \cdot [y(t) - z(t)] = \underbrace{[f(t,y(t)) - f(t,z(t))] \cdot [y(t) - z(t)]}_{\le v \cdot [y(t) - z(t)]^2}$$

Με $\varepsilon(t) := y(t) - z(t)$ έχουμε

$$\underbrace{\varepsilon'(t) \cdot \varepsilon(t)}_{= 1/2 \cdot ((\varepsilon(t))^2)'} \le v\,[\varepsilon(t)]^2$$

Με $\varphi(t) = (\varepsilon(t))^2$ έχουμε

$$\frac{1}{2} \cdot \varphi'(t) \le v\,\varphi(t) \Leftrightarrow \varphi'(t) \le 2v\varphi(t) \Rightarrow$$

$$\varphi'(t) - 2v\varphi(t) \le 0 \Leftrightarrow \left(e^{-2vt} \varphi(t)\right)' \le 0 \Rightarrow$$

$$e^{-2vt} \varphi(t) \le e^{-2va} \varphi(a) \Rightarrow \varphi(t) \le e^{2v(t-a)} \varphi(a)$$

Άρα

$$|\varepsilon(t)|^{\cancel{2}} \le e^{\cancel{2}v(t-a)} \cdot |\varepsilon(a)|^{\cancel{2}} \Rightarrow |y(t) - z(t)| \le e^{v(t-a)} |y_0 - z_0|$$

10/11/17

Άσκηση 1.11

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z' = f(t,z), & a \le t \le b \\ z(a) = z_0 \end{cases}$$

Υπόθεση

$\forall t \in [a,b]$ $\forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^m$

$(f(t,x) - f(t,\tilde{x}), x - \tilde{x}) \le 0$ με $(,)$ το Ευκλείδιο εσωτ. γινόμενο

ΝΔΟ: $\|y(t)$

Απόδειξη

Αφαιρώντας τα συστήματα ΔΕ κατά μέλη παίρνουμε

$$y'(t) - z'(t) = f(t, y(t)) - f(t, z(t))$$

Άρα

$$(y'(t) - z'(t), y(t) - z(t)) = \underbrace{(f(t,y(t)) - f(t,z(t)), y(t) - z(t))}_{\le 0}$$

οπότε με $\varepsilon(t) =$

$$\underbrace{(\varepsilon'(t), \varepsilon(t))}_{\overset{\text{Άσκηση 1.9}}{=} \frac{1}{2}(\|\varepsilon(t)\|^2)'} \le 0$$

Επομένως, η $\|\varepsilon(t)\|^2$ είναι φθίνουσα, οπότε και η $\|\varepsilon(t)\|$ είναι φθίνουσα. Ιδιαίτερα

$$\|\varepsilon(t)\| \le \|\varepsilon(a)\| \quad \forall t \in [a,b]$$

δηλαδή

$$\|y(t) - z(t)\| \le \|y_0 - z_0\| \quad \forall t \in [a,b]$$

Άσκηση 1.13 (Ανισότητα Gronwall σε ολοκληρωτική μορφή)

$\varphi : [0,T] \to \mathbb{R}$ συνεχής , $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \geq 0$

Αν $\varphi(t) \leq \alpha + \beta \int_0^t \varphi(s)\,ds \quad \forall t \in [0,T]$,

<u>ΝΔΟ</u>:

$$\varphi(t) \leq \alpha \cdot e^{\beta t} \quad \forall t \in [0,T]$$

<u>Απόδειξη</u>

$$\psi(t) = (\alpha+\varepsilon)\, e^{\beta t} \quad , \varepsilon > 0$$

<u>Ισχυρισμός</u>:

$$\psi(t) = \alpha + \varepsilon + \beta \int_0^t \psi(s)\,ds .$$

Έχω,

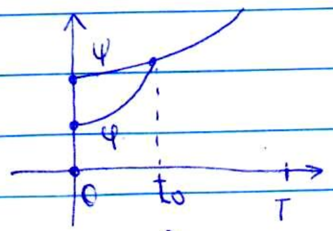
$$\alpha+\varepsilon+\beta \int_0^t \psi(s)\,ds = \alpha+\varepsilon+\beta \int_0^t (\alpha+\varepsilon) \cdot e^{\beta s} ds$$

$$= \alpha+\varepsilon+(\alpha+\varepsilon)\cdot[e^{\beta t} - e^{\beta 0}] = (\alpha+\varepsilon)\cdot e^{\beta t} = \psi(t)$$

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι

$$\varphi(t) < \psi(t) \quad \forall t \in [0,T]$$

Για $t=0$ έχουμε : $\varphi(0) \leq \alpha < \alpha+\varepsilon = \psi(0)$



Έστω t_0 ο μικρότερος θετικός αριθμός, $t_0 \leq T$, τ.ω.

- $\forall t \in [0,t_0) \quad \varphi(t) < \psi(t)$
- $\varphi(t_0) = \psi(t_0)$

Θα υποθέσω ότι υπάρχει τέτοιο t_0 και θα οδηγηθώ σε άτοπο. Άρα $\varphi < \psi$.

Τότε θα έχουμε

$$\varphi(t_0) \leq \alpha + \beta \int_0^{t_0} \varphi(s)\,ds \leq \alpha+\beta \int_0^{t_0} \psi(s)\,ds < \underbrace{\alpha+\varepsilon+\beta \int_0^{t_0} \psi(s)\,ds}_{= \psi(t_0)}$$

ΑΤΟΠΟ.

Συμπέρασμα: Τέτοιο το δεν υπάρχει, οπότε

$$\varphi(t) < \psi(t) \quad \forall t \in [a,b]$$

Άρα

$$\varphi(t) < (a+\varepsilon)e^{bt} \Rightarrow$$
$$\varphi(t) \leq a e^{bt}$$

Άσκηση 115 (Ανισότητα του Gronwall σε διαφορική μορφή)

$\varphi : [0,T] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη.

$$\varphi'(t) \leq b\,\varphi(t) \quad \forall t \in [0,T] \Rightarrow \varphi(t) \leq \varphi(0)\cdot e^{bt} \quad \forall t \in [0,T]$$

Απόδειξη:

1. $$\varphi'(t) \leq b\cdot\varphi(t) \Rightarrow \underbrace{\int_0^t \varphi'(s)\,ds}_{\varphi(t)-\varphi(0)} \leq \int_0^t b\cdot\varphi(s)\,ds$$

$$\Rightarrow \varphi(t) \leq \underbrace{\varphi(0)}_{a} + b\int_0^t \varphi(s)\,ds$$

Το αποτέλεσμα έπεται από την Άσκηση 113

2.

$$\varphi'(t) \leq b\cdot\varphi(t) \Rightarrow \varphi'(t) - b\,\varphi(t) \leq 0 \Rightarrow$$
$$\left(e^{-bt}\varphi(t)\right)' \leq 0 \Rightarrow$$
$e^{-bt}\varphi(t)$ φθίνουσα.

Ιδιαίτερα,

$$e^{-bt}\varphi(t) \leq \cancelto{1}{e^{-b0}}\varphi(0) \quad \forall t \in [0,T]$$
$$\Rightarrow \varphi(t) \leq \varphi(0)\cdot e^{bt} \quad \forall t \in [0,T]$$

$\boxed{\text{Ισχύει και για } b<0.}$

Άσκηση 1.27

$$\begin{cases} y'(t) = My(t), & t \geq 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Υπόθεση: $\forall x \in \mathbb{R}^m \quad (Mx, x) \leq 0$

δηλ. ο πίνακας $M \in \mathbb{R}^{m,m}$ είναι μη θετικά ορισμένος.

ΝΔΟ: $\|y(t)\|$ φθίνουσα

Απόδειξη:

$$y'(t) = My(t) \Rightarrow (y'(t), y(t)) = \underbrace{(My(t), y(t))}_{\leq 0}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(y'(t), y(t))}_{= \frac{1}{2}(\|y(t)\|^2)'} \leq 0$$

$\Rightarrow \|y(t)\|^2$ φθίνουσα $\Rightarrow \|y(t)\|$ φθίνουσα.

$f(t,y) = My + g(t)$,

ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz, αν και μόνο αν

$\forall x \in \mathbb{R}^m \quad (Mx,$

Άσκηση 1.28

$x'(t) = -2x(t) + y(t), \quad t \geq 0$

$y'(t) = 2x(t) - 2y(t), \quad t \geq 0$

$x(0) = x_0,$

$y(0) = y_0.$

ΝΔΟ: $[x(t)]^2 + [y(t)]^2$ φθίνουσα

$\rightsquigarrow$

Απόδειξη

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι ο πίνακας M είναι μη θετικά ορισμένος. Μετά το αποτέλεσμα έπεται από την προηγούμενη Άσκηση.

Για $x \in \mathbb{R}^2$ έχουμε

$$Mx = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1 + x_2 \\ 2x_1 - 2x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (Mx, x) = (-2x_1 + x_2) \cdot x_1 + (2x_1 - 2x_2)\, x_2$$
$$= -2x_1^2 + 3x_1x_2 - 2x_2^2$$
$$= \underbrace{-2\cdot(|x_1| - |x_2|)^2}_{\leq 0} \underbrace{- 4|x_1x_2| + 3x_1x_2}_{\leq 0} \leq 0$$

Άσκηση 1.22

$M \in \mathbb{R}^{m,m}$ αντισυμμετρικός.

δηλαδή $M^T = -M$,

δηλαδή $M_{ij} = -M_{ji}$

$$\begin{cases} y'(t) = My(t), & t \geq 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

<u>ΝΔΟ</u> $\|y(t)\| = \|y_0\|, \ \forall t \geq 0$

Απόδειξη

<u>Ισχυρισμός</u>: $\forall x \in \mathbb{R}^m \quad (Mx, x) = 0$

$$(Mx)_i = \sum_{j=1}^{m} M_{ij} x_j$$

$$(Mx, x) = \sum_{i=1}^{m} (Mx)_i x_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} M_{ij} x_j x_i = -\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} M_{ji} x_j x_i =$$

$$= - \sum_{j=1}^{m} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{m} M_{ji}\, x_i \right)}_{= (Mx)_j} x_j \qquad = -(Mx, x)$$

$$\Rightarrow \quad (Mx, x) = 0$$

$$y'(t) = My(t) \Rightarrow$$

$$(y'(t), y(t)) = \underbrace{(My(t), y(t))}_{=0}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{(y'(t), y(t))}_{= \frac{1}{2}(\|y(t)\|^2)'} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \|y(t)\|^2 = \|y(0)\|^2$$

$$\Rightarrow \quad \|y(t)\| = \|y_0\|$$