- ASKHSEIS -

16/11/17

Άσκηση 1.3

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t) + [y(t)]^2, & 1 \le t \le 2, \\ y(1) = y_0 \end{cases}$$

Η ΔΕ είναι εξίσωση του Bernoulli. Λύσεις

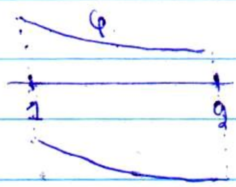
- $y(t) = 0$
- $y(t) = \dfrac{1}{ce^t + 1}$, $c \in \mathbb{R}$ (*)

(Παράδειγμα 1.3)

α) Η (*) αποτελεί λύση της ΔΕ στο $[1,2]$ αν και μόνο αν είτε $c < -\frac{1}{e}$ είτε $c > -\frac{1}{e^2}$.

Θέτουμε $\varphi(t) = ce^t + 1$ και πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι $\varphi(t) \neq 0$, $t \in [1,2]$

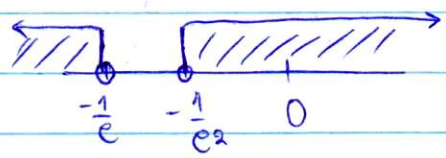
- $c \geq 0$: Τότε $\varphi(t) \geq 1$ $\forall t \in [1,2]$
- $c < 0$: Τότε η φ είναι φθίνουσα.
  Επομένως, η φ δεν μηδενίζεται στο $[1,2]$ αν
  είτε $\varphi(2) > 0$ (οπότε $\varphi(t) > 0$ $\forall t \in [1,2]$)
  είτε $\varphi(1) < 0$ (" $\varphi(t) < 0$ ")



Αλλά

$\varphi(2) > 0 \Leftrightarrow ce^2 + 1 > 0 \Leftrightarrow c > -\frac{1}{e^2}$.

$\varphi(1) < 0 \Leftrightarrow c \cdot e + 1 < 0 \Leftrightarrow c < -\frac{1}{e}$



β) Για $y_0 = \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1}$ ΝΔΟ το πρόβλημα δεν έχει λύση. Ακριβέστερα,

$y(t) \to \infty$ καθώς $t \uparrow \frac{3}{2}$.

$y(1) = \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1} \Leftrightarrow \frac{1}{ce+1} = \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1} \Leftrightarrow \ldots \quad c = -\frac{1}{e\sqrt{e}}$

Άρα, σύμφωνα με την ⊛,

$$y(t)=\frac{1}{1-\frac{e^t}{e\sqrt{e}}}=\frac{1}{1-e^{t-\frac{3}{2}}}\longrightarrow\infty \text{ για } t\uparrow 3/2.$$

γ) Προσδιορισμός της λύσης για $y_0=-1$.

$$y(1)=-1\overset{⊛}{\Longleftrightarrow}\frac{1}{c\cdot e+1}=-1\Longleftrightarrow c=-\frac{2}{e}.$$

Άρα

$$y(t)=\frac{1}{-\frac{2}{e}\cdot e^t+1}=\frac{1}{1-2\cdot e^{t-1}}$$

Τώρα

$$e^{t-1}\geq 1\Leftrightarrow -2\cdot e^{t-1}\leq -2\Leftrightarrow$$

$$1-2\cdot e^{t-1}\leq \underbrace{1-2}_{=-1}$$

$$\Rightarrow\ 1-2\cdot e^{t-1}\neq 0$$

Άσκηση 1.4

$$\begin{cases} y'(t)=y(t)-[y(t)]^2 \\ y(0)=2 \end{cases}$$

στο μεγαλύτερο δυνατό διάστημα I.

Λύση

Εξίσωση του Bernoulli

$y(t)=0$ λύση της ΔΕ. (όχι του ΠΑΤ)

Θέτουμε $v(t)=[y(t)]^{1-\overset{''}{6}2}=\frac{1}{y(t)}$

$$\Rightarrow v'(t)=-\frac{1}{[y(t)]^2}y'(t),$$

οπότε η ΔΕ γράφεται ως $-[y(t)]^2\,v'(t)=y(t)-[y(t)]^2$

$$\underset{y(t)\neq 0}{\Longrightarrow} \quad -v'(t) = \overbrace{\frac{1}{y(t)}}^{v(t)} - 1 \iff v'(t)+v(t) = 1 \iff \left(e^t v(t)\right)' = e^t$$

$$e^t \cdot v(t) = e^t + c$$

$$\Rightarrow \quad v(t) = 1 + c\,e^{-t}$$

Άρα

$$y(t) = \frac{1}{1+ce^{-t}}$$

<u>Αρχική συνθήκη</u>:

$$y(0) = 2 \iff \frac{1}{1+c} = 2 \iff c = -\frac{1}{2}.$$

Άρα

$$y(t) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-t}}$$

$$1-\frac{1}{2}e^{-t} = 0 \iff e^{-t} = 2 \iff \boxed{t = -\log 2.}$$

Η λύση είναι καλά ορισμένη στα $(-\infty, -\log 2)$ και $(-\log 2, \infty)$
Το 0 ανήκει μόνο στο δεύτερο διάστημα, οπότε

$$I = (-\log 2, \infty).$$

Άσκηση 1.5

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{1}{t^2} - \dfrac{y(t)}{t} - [y(t)]^2, & 1 \leq t \leq 2, \\ y(1) = y_0 \end{cases}$$

Η ΔΕ είναι εξίσωση Riccaty και η γενική της λύση είναι

$$(*) \quad y(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{ct^3 - \frac{t}{2}} \quad \text{με } c \in \mathbb{R}$$

(παράδειγμα 1.4).

α) ΝΔΟ για $y_0=-3$ το ΠΑΤ δεν έχει λύση. Ακριβέστερα,

$$y(t)\to -\infty \text{ για } t\uparrow\sqrt{2}.$$

$$y(1)=-3 \overset{*}{\Leftrightarrow} 1+\frac{1}{c-\frac{1}{2}}=-3 \Leftrightarrow c=\frac{1}{4}$$

Άρα, αντικαθιστώντας στην (*),

$$y(t)=\frac{1}{t}+\frac{1}{\frac{t^3}{4}-\frac{t}{2}}.$$

$$\Rightarrow y(t)=\frac{1}{t}+\frac{4}{t\cdot(t^2-2)}$$

Προφανώς

$$y(t)\longrightarrow -\infty \text{ για } t\uparrow\sqrt{2}.$$

β) Προσδιορισμός της λύσης για $y_0=3$

$$y(2)=3 \overset{*}{\Leftrightarrow} 1+\frac{1}{c-\frac{1}{2}}=3 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow c=1.$$

Άρα, σύμφωνα με την (*),

$$y(t)=\frac{1}{t}+\frac{1}{t^3-\frac{t}{2}}=\frac{1}{t}+\frac{2}{t(2t^2-1)}$$

Για $t\geq 1$ έχουμε $2t^2-1\geq 2-1=1 \Rightarrow 2t^2-1\neq 0$ στο $[1,2]$

Άσκηση 1.6

$$y'(t)=\frac{1+[y(t)]^2}{2t\,y(t)} \quad \text{εξ. χωριζ. μεταβλητών.}$$

$$\frac{2y(t)y'(t)}{1+[y(t)]^2}=\frac{1}{t}\Rightarrow \int_a^t \frac{2y(s)y'(s)}{1+[y(s)]^2}\,ds=\int_a^t \frac{1}{s}\,ds \quad (a,t \text{ ομόσημοι})$$

πίσω

$\tau = [y(s)]^2$

Τότε $\displaystyle\int_{[y(a)]^2}^{[y(t)]^2} \frac{1}{1+\tau}\, d\tau = \log|t| - \log|a|$

$$\log(1+[y(t)]^2) - \log(1+[y(a)]^2) = \log|t| - \log|a|$$

$$\log(1+[y(t)]^2) = \log|t| + \underbrace{\log(1+[y(a)]^2) - \log|a|}_{\log|c|}$$

$$\Rightarrow \log(1+[y(t)]^2) = \log|ct|$$

$$\Rightarrow 1 + [y(t)]^2 = \pm ct$$

$$\Rightarrow y(t) = \pm\sqrt{\cancel{\pm} ct - 1}$$

$$\boxed{ct - 1 \geq 0}$$

- ΑΣΚΗΣΕΙΣ - 21/11/17.

Άσκηση 17

$y'(t) = \dfrac{2t-1}{[y(t)]^3 - y(t)}$. Βρείτε τη γενική λύση.

ΛΥΣΗ

Πρόκειται για ΔΕ χωριζομένων μεταβλητών.
Έχουμε

$$y'(t) = \frac{2t-1}{[y(t)]^3 - y(t)} \Leftrightarrow$$

$$\{[y(t)]^3 - y(t)\}\, y'(t) = 2t-1$$

$$\Rightarrow \int_a^t \{[y(s)]^3 - y(s)\}\, y'(s)\, ds = \int_a^t (2s-1)\, ds \Rightarrow \quad \tau := y(s)$$

$$\int_{y(a)}^{y(t)} (\tau^3 - \tau)\, d\tau = \int_a^t (2s-1)\, ds \Rightarrow$$

$$\frac{1}{4}[y(t)]^4 - \frac{1}{4}[y(a)]^4 - \frac{1}{2}[y(t)]^2 + \frac{1}{2}[y(a)]^2 = t^2 - a^2 - t + a$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}[y(t)]^4 - \frac{1}{2}[y(t)]^4 = \underbrace{\frac{1}{4}[y(a)]^4 - \frac{1}{2}[y(a)]^2 + t^2 - t - a^2 + a}_{c}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}[y(t)]^4 - \frac{1}{2}[y(t)]^2 = t^2 - t + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Η λύση y πρέπει να είναι τω. $[y(t)]^3 - y(t) \neq 0 \Leftrightarrow y(t) \neq 0$ και $y(t) \neq \pm 1$ σε ένα κατάλληλο διάστημα.

Άσκηση 18

$$y'(t) = \frac{3[y(t)]^2 + t^2}{2t\,y(t)}$$ ομογενής ΔΕ (είναι και ΔΕ του Bernoulli)

α) Γενική λύση;

$$y'(t) = \frac{3[y(t)]^2 + t^2}{2t\,y(t)} = \frac{3\left(\frac{y(t)}{t}\right)^2 + 1}{2\cdot\frac{y(t)}{t}}$$

Θέτουμε $v(t) = \frac{y(t)}{t}$ και έχουμε

$$y(t) = t\,v(t) \rightsquigarrow y'(t) = v(t) + t\,v'(t)$$

Αντικαθιστώντας στην αρχική ΔΕ παίρνουμε

$$v(t) + t v'(t) = \frac{3[v(t)]^2 + 1}{2v(t)} = \frac{3}{2}\,v(t) + \frac{1}{2v(t)}$$

Άρα

$$t\,v'(t) = \underbrace{\frac{1}{2}\,v(t) + \frac{1}{2}\,\frac{1}{v(t)}}_{\neq 0}$$ οπότε δεν υπάρχουν ιδιάζουσες λύσεις

Έχουμε

$$\frac{2v'(t)}{v(t) + \frac{1}{v(t)}} = \frac{1}{t} \Longleftrightarrow \frac{2v(t)\,v'(t)}{[v(t)]^2 + 1} = \frac{1}{t},$$

ΔΕ χωριζομένων μεταβλητών

Επομένως

$$\int_a^t \frac{2v(s)\,v'(s)}{[v(s)]^2 + 1}\,ds = \int_a^t \frac{1}{s}\,ds$$ (α και t ομόσημα)

Θέτουμε $\tau = [v(s)]^2$ και έχουμε

Τυρο.

$$\int_{[v(\alpha)]^2}^{[v(t)]^2} \frac{1}{\tau+1}\, d\tau = \int_{\alpha}^{t} \frac{1}{s}\, ds,$$

οπότε

$$\log\left([v(t)]^2+1\right) - \log\left([v(\alpha)]^2+1\right) = \log|t| - \log|\alpha|$$

δηλαδή

$$\log\left([v(t)]^2+1\right) = \log|t| \underbrace{-\log|\alpha| + \log\left([v(\alpha)]^2+1\right)}_{\log|c|}$$

$$\Rightarrow \log\left([v(t)]^2+1\right) = \log|ct|$$

$$\Rightarrow [v(t)]^2+1 = \cancel{\pm} ct \quad \text{με } c\in\mathbb{R}$$

Άρα

$$[v(t)]^2 = \underbrace{ct-1}_{>0}$$

$$\Rightarrow \frac{[y(t)]^2}{t^2} = ct-1 \Rightarrow \boxed{[y(t)]^2 = t^2(ct-1)}$$

(β) ΠΑΤ με $y(1)=1$.

ΛΥΣΗ

$y(1)=1 \Leftrightarrow 1 = c-1 \Rightarrow c=2$

Επομένως

$$[y(t)]^2 = t^2 \underbrace{(2t-1)}_{>0} \quad t>\frac{1}{2}$$

Για $t>\frac{1}{2}$ παίρνουμε

$$y(t) = \pm\sqrt{t^2(2t-1)} = \pm t\sqrt{2t-1}$$

Με το $-$ έχουμε $y(1)=-1$, άρα αυτή η λύση απορρίπτεται.

Συμπέρασμα:

$$\boxed{y(t) = t\cdot\sqrt{2t-1} \quad , \; \frac{1}{2} < t < \infty}$$

Άσκηση 1.9

$$y'(t) = \frac{-2t + y(t)}{t + 2y(t)}$$ πλήρης (είναι και ομογενής)

Ζητούμενο: Γενική λύση.

ΛΥΣΗ

$M(t,y) = 2t + y$, $N(t,y) = t + 2y$

Προφανώς

$$\underbrace{\frac{\partial M}{\partial y}(t,y)}_{1} = \underbrace{\frac{\partial N}{\partial t}(t,y)}_{1}$$

άρα η ΔΕ είναι όντως πλήρης

Ζητούμε μια συνάρτηση $f = f(t,y)$ τω.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = M \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N.$$

Δηλαδή

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,y) = 2t + y \Rightarrow f(t,y) = t^2 + yt + g(y)$$

το $t^2 + ty$ βγαίνει αν σκεφτώ πως ολοκληρώνω

Για να ικανοποιείται και η $\frac{\partial f}{\partial y} = N$ πρέπει να έχουμε

$\cancel{t} + g'(y) = \cancel{t} + 2y$

$\Rightarrow g'(y) = 2y \Rightarrow g(y) = y^2 \cancel{+C}$

Άρα μια τέτοια f είναι η $f(t,y) = t^2 + yt + y^2$.
Επομένως, η λύση της ΔΕ δίνεται σε πεπλεγμένη μορφή από τη σχέση $f(t, y(t)) = c$

ή $t^2 + ty(t) + [y(t)]^2 = c$ ⊛ με $c \in \mathbb{R}$

Επαλήθευση:

Παραγωγίζοντας την (*) ως προς t παίρνουμε

$$\frac{d}{dt}\left(t^2+ty(t)+[y(t)]^2\right)=0$$

ή

$$2t+y(t)+ty'(t)+2y(t)\cdot y'(t)=0$$

$$\Leftrightarrow\ [t+2y(t)]\,y'(t)=[2t+y(t)]$$

$$\Rightarrow\ y'(t)=-\frac{2t+y(t)}{t+2y(t)}\ ✓$$

Άσκηση 1.10

$$y'(t)=-\frac{t+[y(t)]^2}{t\cdot y(t)}$$ αναγόμενη σε πλήρη. Γενική λύση;

ΛΥΣΗ

Έχουμε με

$$M(t,y)=t+y^2,\quad N(t,y)=ty,$$

$$\underbrace{\frac{\partial M}{\partial y}(t,y)}_{2y}\neq\underbrace{\frac{\partial N}{\partial t}(t,y)}_{y}$$

Οπότε η ΔΕ δεν είναι πλήρης.

Τώρα

$$\frac{1}{N(t,y)}\underbrace{\left[\frac{\partial M}{\partial y}(t,y)-\frac{\partial N}{\partial t}(t,y)\right]}_{y}=\frac{1}{t}$$

Αυτή η ποσότητα είναι ανεξάρτητη του y, οπότε υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας $\mu=\mu(t)$, πχ.

$$\mu(t)=e^{\int\frac{1}{N(t,y)}\left[\frac{\partial M}{\partial y}(t,y)-\frac{\partial N}{\partial t}(t,y)\right]dt}=e^{\int\frac{1}{t}\,dt}=e^{\log t}=t$$

Επομένως, πολλαπλασιάζαμε αριθμητή και παρανομαστή στην αρχική ΔΕ με το t και τη γράφουμε στη μορφή

$$y'(t) = -\frac{t^2 + t[y(t)]^2}{t^2 y(t)}$$

Τώρα

$$\tilde{M}(t,y) = t^2 + ty^2 \, , \quad \tilde{N}(t,y) = t^2 y$$

και $$\underbrace{\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y}(t,y)}_{2ty} = \underbrace{\frac{\partial \tilde{N}}{\partial t}(t,y)}_{2ty}$$

Ζητούμε μια συνάρτηση $f = f(t,y)$ τω.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \tilde{M} \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \tilde{N}.$$

Έχουμε $\frac{\partial f}{\partial t} = \tilde{M} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t}(t,y) = t^2 + ty^2 \Rightarrow$

$$f(t,y) = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2y^2}{2} + g(y).$$

Θέλουμε να ικανοποιείται και η $\frac{\partial f}{\partial y} = \tilde{N}$, δηλαδή

$$t^2 y + g'(y) = t^2 y \Rightarrow g'(y) = 0 \, , \quad \text{πχ} \ g(y) = 0$$

Συμπέρασμα:

$$f(t,y) = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2y^2}{2}$$

Άρα, για $t \neq 0$, η λύση της αρχικής ΔΕ δίνεται σε πεπλεγμένη μορφή από τη σχέση $f(t, y(t)) = c$, $c \in \mathbb{R}$ δηλαδή

(**) $$\frac{t^3}{3} + \frac{t^2[y(t)]^2}{2} = c.$$

Επαλήθευση:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{t^3}{3}+\frac{t^2[y(t)]^2}{2}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$t^2+\frac{1}{2}\left(2t[y(t)]^2+t^2\,2y(t)y'(t)\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$t^2\,y(t)\,y'(t)=-t^2+t[y(t)]^2 \Leftrightarrow$$

$$y'(t)=-\frac{t^{\cancel{2}}+\cancel{t}[y(t)]^2}{t^{\cancel{2}}y(t)}$$

-ΤΕΛΟΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ-