1º ΚΕΦΑΛΑΙΟ 14/12/17

• Πολυβηματικές μέθοδοι •

Προκαταρκτικά:

Συμβολισμοί και Παραδείγματα

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$f : [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$

Έστω $N \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{N}$, $t^n = a + nh$, $n = 0, \dots, N$

(Δεν υπάρχουν εδώ $t^{n,i}$)

Παράδειγμα διβηματικής μεθόδου:

$$y^{n+2} - y^n = 2h f(t^{n+1}, y^{n+1}), \quad n = 0, \dots, N-2.$$

Πώς προκύπτει;

$\boxed{\text{1ος τρόπος}}$: Αριθμητική διαφόριση

$$y(t^{n+1}) = f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))$$

Με

$$y'(t^{n+1}) \approx \frac{y(t^{n+2}) - y(t^n)}{2h}$$

έχουμε

$$\frac{y(t^{n+2}) - y(t^n)}{2h} \approx f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))$$

Αντικαθιστώντας το $\approx$ με $=$ και τα $y(t^i)$ με y^i, $i = n, n+1, n+2$ οδηγούμαστε στο βήμα της μεθόδου.

$\boxed{\text{2ος τρόπος}}$: Αριθμητική ολοκλήρωση

$$y'(t) = f(t, y(t)) \Rightarrow$$

$$\underbrace{\int_{t^n}^{t^{n+2}} y'(t)\, dt}_{= y(t^{n+2}) - y(t^n)} = \int_{t^n}^{t^{n+2}} f(t, y(t))\, dt$$

$$\Rightarrow y(t^{n+2}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+2}} f(t, y(t))\, dt$$

Προσεγγίζουμε το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος με τον <u>τύπο του μέσου</u> και παίρνουμε

$$y(t^{n+2}) - y(t^n) \approx 2h\, f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))$$

Ανακαθιστώντας το $\approx$ με $=$ και τα $y(t^i)$ με y^i, $i = n, n+1, n+2$ οδηγούμαστε στο βήμα της μεθόδου.

Αυτή η μέθοδος είναι άμεση (για τον υπολογισμό του y^{n+2} δεν χρειάζεται να λύσω κάποια εξίσωση)

- <u>Μέθοδος του Simpson:</u>

y^0, y^1 δεδομένα

$$y^{n+2} - y^n = \frac{h}{3}\left[f(t^{n+2}, y^{n+2}) + 4f(t^{n+1}, y^{n+1}) + f(t^n, y^n)\right],$$
$$n = 0, \dots, N-2.$$

<u>Τρόπος κατασκευής:</u>

Όπως προηγουμένως, έχουμε

$$y(t^{n+2}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+2}} f(t, y(t))\, dt$$

Προσεγγίζουμε το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος με τον τύπο του Simpson και παίρνουμε

Τύπος του Simpson:

$$\int_c^d \varphi(x)\,dx = \frac{d-c}{6}\left[\varphi(d) + 4\varphi\left(\frac{c+d}{2}\right) + \varphi(c)\right]$$

$$y(t^{n+2}) - y(t^n) \approx \frac{h}{3}\Big(f(t^{n+2}, y(t^{n+2})) +$$
$$4f(t^{n+1}, y(t^{n+1})) + f(t^n, y(t^n))\Big)$$

Ανακαθιστάμε τα $\approx$ με $=$ ....

και οδηγούμαστε στο βήμα της μεθόδου.

Αυτή είναι μια πεπλεγμένη διβηματική μέθοδος.

Εστω $k \in \mathbb{N}$. Η γενική k-βηματική μέθοδος περιγράφεται από $2k+2$ πραγματικές σταθερές $\alpha_k, \dots, \alpha_0$, $\beta_k, \dots, \beta_0$ και είναι της μορφής

$$\begin{cases} y^0, \dots, y^{k-1} \text{ δεδομένα} \\ \alpha_k y^{n+k} + \alpha_{k-1} y^{n+k-1} + \dots + \alpha_0 y^n = h[\beta_k f(t^{n+k}, y^{n+k}) + \dots + \beta_0 f(t^n, y^n)], \end{cases}$$

$n = 0, \dots, N-k$

Υπόθεση: $|\alpha_0| + |\beta_0| > 0$

$\alpha_k \neq 0$

(μέθοδοι με $\alpha_k = 0$ και $\beta_k \neq 0$ είναι άχρηστες!)

Χ.π.τ.γ. πολλές φορές υποθέτουμε ότι $\boxed{\alpha_k = 1}$

Αν $\beta_k = 0$, η μέθοδος είναι άμεση (δεν απαιτείται επίλυση εξίσωσης για τον υπολογισμό του αγνώστου y^{n+k})

Αν $\beta_k \neq 0$, η μέθοδος είναι πεπλεγμένη.

Υπολογιστικό κόστος ανά βήμα:
Ένας υπολογισμός της f ανά βήμα (πολύ χαμηλό!!)
Στην περίπτωση πεπλεγμένης μεθόδου πρέπει να λύσουμε και ένα σύστημα της μορφής

⊛ $\boxed{\alpha_k y^{n+k} = h \cdot \beta_k f(t^{n+k}, y^{n+k}) + g^n}$

με γνωστό g^n. Αυτό είναι ένα σύστημα με m εξισώσεις και m αγνώστους.
(Στην περίπτωση μεθόδων RK το αντίστοιχο σύστημα έχει $m \cdot q$ εξισώσεις και mq αγνώστους).

Μειονέκτημα: Οι πολυβηματικές μέθοδοι υστερούν έναντι των μεθόδων RK όσον αφορά τις ιδιότητες ευστάθειας.

Ύπαρξη + μοναδικότητα των προσεγγίσεων.

(α) Στις άμεσες μεθόδους προφανείς χωρίς περιορισμούς στην f ή στο h

(β) Πεπλεγμένες μέθοδοι:

(β₁) Η f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz:
Όπως ακριβώς στην περίπτωση της πεπλεγμένης μεθόδου του Euler αποδεικνύεται ότι οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες για αρκετά μικρό h.

(β₂) Η f ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz.
Αν $\alpha_k \beta_k > 0$, τότε οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες χωρίς περιορισμό στο h.
Η απόδειξη είναι εντελώς αντίστοιχη με την περίπτωση της πεπλεγμένης μεθόδου του Euler.

Συνήθως οι αρχικές προσεγγίσεις $y^1, \ldots, y^{k-1}$ υπολογίζονται με μια μέθοδο RK.

Άλλα παραδείγματα πολυβηματικών μεθόδων

I. Μέθοδοι ανάδρομων διαφορών

Έστω $k \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε το πολυώνυμο $P_{n,k} \in \mathbb{P}_k$ τ.ω.

$$P_{n,k}(t^{n+i}) = y(t^{n+i}), \quad i=0,\ldots,k.$$

Δηλαδή $P_{n,k}$ είναι το (άγνωστο) πολυώνυμο παρεμβολής της y στα σημεία $t^n, \ldots, t^{n+k}$.
Αυτό εκφράζεται συναρτήσει των (αγνώστων) τιμών $y(t^n), \ldots, y(t^{n+k})$.

Στη σχέση

$$y'(t^{n+k}) = f(t^{n+k}, y(t^{n+k}))$$

Προσεγγίζουμε την $y'(t^{n+k})$ με την $P'_{n,k}(t^{n+k})$. Αντικαθιστώντας μετά το $\approx$ με $=$ και τα $y(t^\ell)$ με y^ℓ, $\ell = n, \ldots, n+k$, οδηγούμαστε στην κ-βηματική μέθοδο ανάδρομων διαφορών

Η κ-βηματική μέθοδος ανάδρομων διαφορών είναι:

$$\begin{cases} y^0, \dots, y^{k-1} \text{ δεδομένα} \\ \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \nabla^j y^{n+k} = h f(t^{n+k}, y^{n+k}), \quad n = 0, \dots, N-k \end{cases}$$

με $\nabla^1 y^n = y^n - y^{n-1}$,

$$\nabla^j y^n = \nabla^1 (\nabla^{j-1} y^n) .$$

Η μέθοδος είναι πεπλεγμένη.
Αυτές οι μέθοδοι χρησιμοποιούνται πάρα πολύ στην πράξη για $k = 1, \dots, 6$. (για $k > 6$ είναι σχεδόν άχρηστες).
↳ (όχι ευσταθείς όλο)

Για $k = 1$ η μέθοδος συμπίπτει με την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler.

15/12/17

Πολυβηματικές μέθοδοι

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$N \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{N}$, $t^n = a + nh$, $n = 0, \dots, N$

$$(1) \begin{cases} y^0, y^1, \dots, y^{k-1} \text{ δεδομένα} \\ a_k y^{n+k} + \dots + a_0 y^n = h[\beta_k f(t^{n+k}, y^{n+k}) + \dots + \beta_0 f(t^n, y^n)], \quad n = 0, \dots, N-k \end{cases}$$

Παραδείγματα

- Μέθοδοι ανάδρομων διαφορών
- Μέθοδοι Adams

$$\begin{cases} y^0, \dots, y^{k-1} \text{ δεδομένα} \\ y^{n+k} - y^{n+k-1} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f(t^{n+j}, y^{n+j}), \quad n = 0, \dots, N-k \end{cases}$$

Οι άμεσες εξ αυτών (δηλαδή για $\beta_k = 0$) λέγονται μέθοδοι των Adams-Bashforth, οι πεπλεγμένες λέγονται μέθοδοι των Adams-Moulton.

- Μέθοδοι της μορφής

$$\begin{cases} y^0, \dots, y^{k-1} \text{ δεδομένα} \\ y^{n+k} - y^{n+k-2} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f(t^{n+j}, y^{n+j}), \quad n = 0, \dots, N-k \end{cases}$$

λέγονται μέθοδοι Nyström για $\beta_k = 0$ και μέθοδοι των Milne-Simpson για $\beta_k \neq 0$.

Ευστάθεια

Υπόθεση: $f: [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz ως προς y.

Ορισμός: (Ευστάθεια)

Μια πολυβηματική μέθοδος λέγεται ευσταθής, αν για ακολουθίες

$$(2)\begin{cases} y^0, \dots, y^{k-1} \text{ δεδομένα} \\ \alpha_k y^{n+k} + \dots + \alpha_0 y^n = h\left[b_k f(t^{n+k}, y^{n+k}) + \dots + b_0 f(t^n, y^n)\right] \end{cases}$$

και

$$(3)\begin{cases} z^0, \dots, z^{k-1} \text{ δεδομένα} \\ \alpha_k z^{n+k} + \dots + \alpha_0 z^n = h\left[b_k f(t^{n+k}, z^{n+k}) + \dots + b_0 f(t^n, z^n)\right], \quad n = 0, \dots, N-k, \end{cases}$$

ισχύει

$$\max_{0 \le n \le N} |y^n - z^n| \le C' \max_{0 \le j \le k-1} |y^j - z^j|$$

με μια σταθερά C' ανεξάρτητη του h και των y^n, z^n (που μπορεί να εξαρτάται από την f)

Ορισμός: (Συνθήκη των ριζών)

Λέμε ότι η πολυβηματική μέθοδος (1) ικανοποιεί τη συνθήκη των ριζών, αν το χαρακτηριστικό της πολυώνυμο ρ,

$$\rho(z) = \alpha_k z^k + \dots + \alpha_0,$$

ικανοποιεί τη συνθήκη των ριζών, δηλαδή

- $\rho(z) = 0 \Rightarrow |z| \le 1$
- $\rho(z) = \rho'(z) = 0 \Rightarrow |z| < 1$

(δηλαδή όλες οι ρίζες του ρ ανήκουν στο μοναδιαίο δίσκο στο μιγαδικό επίπεδο με κέντρο την αρχή των αξόνων και οι πολλαπλές εξ' αυτών βρίσκονται στο εσωτερικό του)

- Είναι εύκολο να δει κανείς χρησιμοποιώντας γνώσεις από τη θεωρία των εξισώσεων διαφορών ότι η συνθήκη των ριζών είναι αναγκαία για την ευστάθεια.

• Θα αποδείξουμε ότι είναι και ικανή.

→ Χρήσιμο <u>βοηθητικό αποτέλεσμα</u> για ευστάθεια και εκτίμηση σφάλματος πολυβηματικών μεθόδων. ←

<u>Πρόταση:</u> Έστω ότι η k-βηματική μέθοδος (1) ικανοποιεί τη συνθήκη των ριζών.

Έστω λ^n, $n=0,\dots,N-k$, δεδομένες σταθερές, και έστω b_i^n, $i=0,\dots,k$, $n=0,\dots,N-k$ δεδομένοι αριθμοί τ.ω. $|b_i^n| \le B < \infty$. Για $h = \frac{b-a}{N}$ θεωρούμε την εξίσωση διαφορών

$$a_k \psi^{n+k} + \dots + a_0 \psi^n = h(b_k^n \psi^{n+k} + \dots + b_0^n \psi^n) + \lambda^n, \quad n=0,\dots,N-k$$

Τότε υπάρχει $h_0 > 0$ τω για $h \le h_0$ να ισχύει

$$\max_{0\le n\le N} |\psi^n| \le C\left[N \max_{0\le n\le N-k} |\lambda^n| + \max_{0\le j\le k-1} |\psi^j|\right],$$

όπου C μια σταθερά ανεξάρτητη των h, λ^n, ψ^n, N και b_i^n (που εξαρτάται από τα $b-a$, h_0 και B).

<u>Πρόταση:</u> Αν μια μέθοδος ικανοποιεί τη συνθήκη των ριζών, τότε είναι ευσταθής.

<u>Απόδειξη</u>

Θέτουμε $\psi^j := y^j - z^j$, $j=0,\dots,N$

και αφαιρούμε την (3) από την (2), οπότε παίρνουμε

$$(4) \quad a_k \psi^{n+k} + \dots + a_0 \psi^n = h\{ b_k [f(t^{n+k}, y^{n+k}) - f(t^{n+k}, z^{n+k})] + \dots + b_0 [f(t^n, y^n) - f(t^n, z^n)]\}$$

Θέτουμε

$$y^m := \begin{cases} \dfrac{f(t^m, y^m) - f(t^m, z^m)}{y^m - z^m}, & \text{για } z^m \ne y^m \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

και γράφουμε την (4) στην μορφή

$$a_k \psi^{n+k} + \dots + a_0 \psi^n = h\left(b_k g^{n+k} \psi^{n+k} + \dots + b_0 g^n \psi^n\right),$$

ή

με $b_i^n = b_i g^{n+i}$, $i=0,\dots,k$, $n=0,\dots,N-k$,

$$a_k \psi^{n+k} + \dots + a_0 \psi^n = h\left(b_k^n \psi^{n+k} + \dots + b_0^n \psi^n\right),\ n=0,\dots,N-k$$

Τώρα

$|g^m| \le L$, οπότε $|b_i^n| \le L \max_j |b_j| = B$

Επομένως, σύμφωνα με την προηγούμενη Πρόταση (με $\lambda^m = 0$) έχουμε

$$\max_{0\le n\le N} |\psi^n| \le C \max_{0\le j\le k-1} |\psi^j|$$

ή

$$\max_{0\le n\le N} |y^n - z^n| \le C \max_{0\le j\le k-1} |y^j - z^j|$$

• <u>Τάξη ακρίβειας, συνέπεια και σύγκλιση πολυβηματικών μεθόδων</u> •

Το μέγεθος

$$\rho^n = a_k y(t^{n+k}) + \dots + a_0 y(t^n) - h\left[b_k f(t^{n+k}, y(t^{n+k})) + \dots + b_0 f(t^n, y(t^n))\right]$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \left[a_j y(t^{n+j}) - h b_j f(t^{n+j}, y(t^{n+j}))\right]$$

λέγεται <u>τοπικό σφάλμα</u> ή <u>σφάλμα συνέπειας</u> της μεθόδου

Το ρ^n είναι ένα μέγεθος της αποτυχίας της ακριβούς λύσης να ικανοποιήσει την αριθμητική μέθοδο.

Επειδή $f(t^{n+j}, y(t^{n+j})) = y'(t^{n+j})$ το ρ^n γράφεται ως

$$\rho^n = \sum_{j=0}^{k} [a_j y(t^{n+j}) - h b_j y'(t^{n+j})]$$

δηλαδή το ρ^n εκφράζεται συναρτήσει της y μόνο (η f δεν υπεισέρχεται).

<u>Ορισμός</u>: (Τάξη ακρίβειας πολυβηματικής μεθόδου)

Έστω $y: [a,b] \to \mathbb{R}$ μια τυχαία, αρκετά ομαλή συνάρτηση. <u>Τάξη ακρίβειας</u> της μεθόδου (1), λέγεται ο μεγαλύτερος ακέραιος p τω

$$\max_{0 \le n \le N-k} |\rho^n| \le C(y) \cdot h^{p+1},$$

με σταθερά $C(y)$ ανεξάρτητη του h

<u>Ερώτημα</u>: Πως προσδιορίζουμε το p;

↓

Αναπτύσσουμε τις $y(t^{n+j})$ και $y'(t^{n+j})$ κατά Taylor ως προς το σημείο t^n και παίρνουμε

$$\rho^n = C_0 y(t^n) + C_1 h y'(t^n) + C_2 h^2 y''(t^n) + \dots$$

με σταθερές C_i εξαρτώμενες μόνο από τα a_i και b_i

Η τάξη ακρίβειας της μεθόδου είναι ακριβώς p, αν και μόνο αν,

$$C_0 = C_1 = \dots = C_p = 0 \quad \text{και} \quad C_{p+1} \neq 0$$

Οι σταθερές C_i δίνονται από τους τύπους

$$C_0 = a_0 + a_1 + \dots + a_k$$
$$C_1 = a_1 + 2a_2 + \dots + k \cdot a_k - (b_0 + \dots + b_k)$$

και

$$c_j = \frac{1}{j!}\cdot(a_1 + 2^j a_2 + \ldots + k^j a_k) - \frac{1}{(j-1)!}\cdot(b_1 + 2^{j-1} b_2 + \ldots + k^{j-1} b_k),$$

$$j = 2, 3, \ldots$$

Η μέθοδος λέγεται συνεπής, αν (η τάξη ακρίβειας) $p \geq 1$.
Αυτό συμβαίνει, αν και μόνο αν $C_0 = C_1 = 0$,

<u>δηλαδή</u>

$$(*)\begin{cases} a_0 + a_1 + \ldots + a_k = 0 \\ a_1 + 2a_2 + \ldots + k a_k = b_0 + b_1 + \ldots + b_k \end{cases}$$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\rho(z) = a_k z^k + \ldots + a_0 \rightsquigarrow \rho'(z) = k a_k z^{k-1} + \ldots + a_1$$

Εισάγουμε και το σ,

$$\rho'(1) = a_1 + 2a_2 + \ldots + k a_k$$

$$\sigma(z) = b_k z^k + \ldots + b_0$$

<u>Τότε</u>

η (*) γράφεται στη μορφή

$$\boxed{\begin{cases} \rho(1) = 0 \\ \rho'(1) = \sigma(1) \end{cases}}$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι αν μια πολυβηματική μέθοδος <u>συγκλίνει</u>, τότε είναι <u>ευσταθής</u> και <u>συνεπής</u>.

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και το αντίστροφο.

19/12/17

Θεώρημα (εκτίμηση σφάλματος πολυβηματικής μεθόδου)

Έστω ότι η k-βηματική μέθοδος είναι ευσταθής και έχει τάξη ακρίβειας $p \geq 1$. Αν $y \in C^{p+1}[a,b]$ η λύση του ΠΑΤ, τότε υπάρχει $h_0 > 0$ τ.ω. για $0 \leq h \leq h_0$ να ισχύει

$$④ \quad \boxed{\max_{0 \leq n \leq N} |y(t^n) - y^n| \leq C\left[\max_{0 \leq j \leq k-1} |y(t^j) - y^j| + h^p \max_{a \leq t \leq b} |y^{(p+1)}(t)|\right]}$$

με σταθερά C ανεξάρτητη των h, N και y.

Απόδειξη

Γράφουμε τη (2) στη μορφή

$$⑤ \quad a_k y(t^{n+k}) + \dots + a_0 y(t^n) = h\left[b_k f(t^{n+k}, y(t^{n+k})) + \dots + b_0 f(t^n, y(t^n))\right] + \rho^n$$

Θέτουμε $e^j := y(t^j) - y^j$, $j = 0, \dots, N$, και αφαιρούμε την ① από την ⑤, οπότε παίρνουμε,

$$a_k \varepsilon^{n+k} + \dots + a_0 \cdot \varepsilon^n = h\Big\{b_k\left[f(t^{n+k}, y(t^{n+k})) - f(t^{n+k}, y^{n+k})\right] + \dots$$
$$+ b_0\left[f(t^n, y(t^n)) - f(t^n, y^n)\right]\Big\} + \rho^n$$

Με
$$g^m := \begin{cases} \dfrac{f(t^m, y(t^m)) - f(t^m, y^m)}{\underbrace{y(t^m) - y^m}_{=\varepsilon^m}}, & \text{για } \varepsilon^m \neq 0 \\ 0, & \text{για } \varepsilon^m = 0 \end{cases}$$

η προηγούμενη σχέση γράφεται ως

$$a_k \varepsilon^{n+k} + \dots + a_0 \varepsilon^n = h\left(b_k g^{n+k} \varepsilon^{n+k} + \dots + b_0 g^n \varepsilon^n\right) + \rho^n, \quad n = 0, \dots, N-k.$$

Προφανώς $|g^m| \leq L$.
Επομένως, με $b_i^n = b_i g^{n+i}$ έχουμε

$$\max_{i,n} |b_i^n| \leq L \max_i |b_i| = B < \infty$$

Με αυτόν τον συμβολισμό έχουμε

$$a_k \varepsilon^{n+k} + \dots + a_0 \varepsilon^n = h\left(b_k^n \varepsilon^{n+k} + \dots + b_0^n \varepsilon^n\right) + \rho^n, \quad n=0,\dots,N$$

Επομένως, σύμφωνα με την Πρόταση Α1, έχουμε

$$\max_{0\le n\le N} |y(t^n) - y^n| \le C\Big[N \underbrace{\max_{0\le n\le N-k} |\rho^n|}_{\le C h^{p+1}} + \max_{0\le j\le k-1} |\varepsilon^j|\Big]$$

$$\le \tilde{C}\Big[h^p + \max_{0\le j\le k-1} |\varepsilon^j|\Big]$$

Που είναι η ζητούμενη εκτίμηση (A).

Ερώτημα: Πως υπολογίζουμε τις αρχικές προσεγγίσεις $y^1, \dots, y^{k-1}$ έτσι ώστε η (A) να δίνει

(6) $$\max_{0\le n\le N} |y(t^n) - y^n| \le \hat{C} h^p ;$$

Απάντηση:

Π.χ. Θέτουμε $y^0 = y_0$, και υπολογίζουμε τα $y^1, \dots, y^{k-1}$ με μια μέθοδο RK με τάξη ακριβείας $p-1$ (αυτό αρκεί γιατί η μέθοδος εφαρμόζεται μόνο $k-1$ φορές)

Τότε έχουμε

$\max_{0\le j\le k-1} |\varepsilon^j| \le C h^p$ και η (A) δίνει την (6).

Μέγιστη τάξη ακριβείας ευσταθούς k-βηματικής μεθόδου:

$$p = \begin{cases} k+1, & \text{για περιττό } k \\ k+2, & \text{για άρτιο } k \end{cases}$$

Όλες αυτές οι μέθοδοι είναι πεπλεγμένες.

Μέγιστη τάξη ακριβείας άμεσης k-βηματικής μεθόδου:

$p = k$.

* Πολυβηματική μέθοδος Α ευσταθής $\Rightarrow$ τάξη ακρίβειας ≤ 2 !