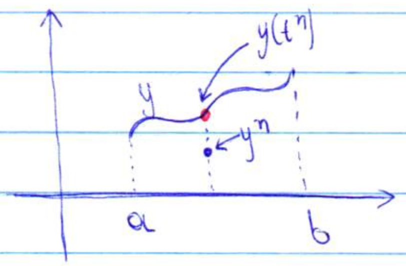
21/11/17

2. Η μέθοδος του Euler

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \ a \le t \le b, \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Υπόθεση → Το ΠΑΤ έχει ακριβώς μια λύση.



Έστω $a = t^0 < t^1 < \dots < t^N = b$ (δείκτης) ενας διαμερισμός του διαστήματος $[a,b]$

Ζητούμενο: Προσεγγίσεις y^i των $y(t^i)$ για $i = 0, \dots, N$.

Κατά κανόνα θα θεωρούμε έναν ομοιόμορφο διαμερισμό. Δηλαδή με $h = \frac{b-a}{N}$, έχουμε $t^n = a + nh$, $n = 0, \dots, N$.

Μέθοδος του Euler:

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + h f(t^n, y^n), \ n = 0, \dots, N-1. \\ y^0 = y_0 \end{cases}$$

(Σε περίπτωση μη ομοιόμορφου διαμερισμού έχουμε:
$$y^{n+1} = y^n + (t^{n+1} - t^n) f(t^n, y^n) \,)$$

- Τρόποι κατασκευής της μεθόδου του Euler

1. Με αριθμητική διαφόριση

Έχουμε
$$y'(t^n) = f(t^n, y(t^n))$$
Προσεγγίζουμε την $y'(t^n)$ με $\dfrac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h}$, $h \to t^{n+1} - t^n$

και έχουμε

$$\frac{y(t^{n+1})-y(t^n)}{h} \approx f(t^n, y(t^n))$$

Αντικαθιστούμε το $\approx$ με $=$ και τα $y(t^i)$ με y^i, για $i=n, n+1$ και παίρνουμε

$$\frac{y^{n+1}-y^n}{h} = f(t^n,y^n)$$

δηλαδή

$$\boxed{y^{n+1}=y^n+h\cdot f(t^n,y^n)}$$

βήμα του διαμερισμού

βήμα της μεθόδου

2 Με αριθμητική ολοκλήρωση

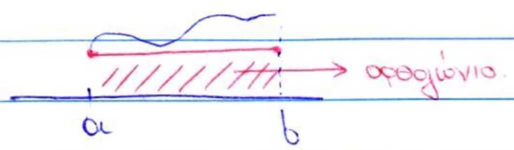
$$y'(t)=f(t,y(t)) \Rightarrow \underbrace{\int_{t^n}^{t^{n+1}} y'(t)\,dt}_{y(t^{n+1})-y(t^n)} = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t,y(t))\,dt$$

$$\Rightarrow y(t^{n+1})-y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t,y(t))\,dt$$

$$\approx h\cdot f(t^n,y(t^n))$$

αριστερός τύπος του ορθογωνίου

$$\int_a^b g(x)\,dx \approx (b-a)\,g(a)$$



Αντικαθιστώντας το $\approx$ με $=$ και τα $y(t^i)$ με y^i παίρνουμε

$$y^{n+1}-y^n = h f(t^n,y^n)$$

3. Με ανάπτυγμα Taylor

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + (t^{n-1} - t^n)y'(t^n) + \frac{(t^{n+1} - t^n)^2}{2} y''(\theta_n) = y(t^n) + hy'(t^n) + \frac{h^2}{2} y''(\theta_n)$$

$$\Rightarrow y(t^{n+1}) \approx y(t^n) + h\, y'(t^n)$$

$$= f(t^n, y(t^n))$$

Αντικαθιστώ το $\approx$ με $=$ και τα $y(t^i)$ με τα y^i ...

23/11/17

Η μέθοδος του Euler

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(a) = y_0 \end{cases}, \quad a \le t \le b$$

<u>Υπόθεση</u>: Το πρόβλημα έχει ακριβώς μια λύση.

Έστω $N \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{N}$ και $t^n = a + nh$, $n = 0, \dots, N$ ο ομοιόμορφος διαμερισμός του $[a,b]$ με βήμα h.

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + h \cdot f(t^n, y^n), \quad n = 0, \dots, N-1 \\ y^0 = y_0 \end{cases}$$

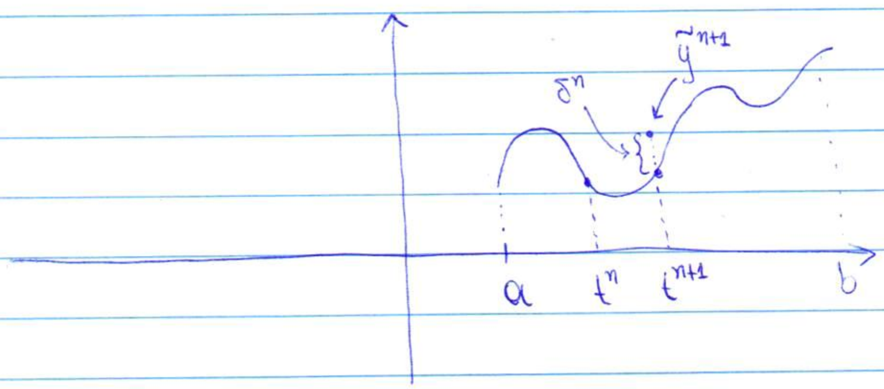
Υπολογιστικό Κόστος: Ενας υπολογισμός της f ανά βήμα.

<u>Συνέπεια</u>: Το μέγεθος δ^n, $\delta^n := y(t^{n+1}) - y(t^n) - h f(t^n, y(t^n))$ λέγεται σφάλμα συνέπειας ή τοπικό σφάλμα της μεθόδου του Euler. Τι είναι το δ^n;

- <u>Τοπικό σφάλμα</u>: Ξεκινάμε από την ακριβή τιμή $y(t^n)$ της λύσης y στο σημείο t^n και κάνουμε <u>ένα βήμα</u> με την μέθοδο του Euler, οπότε παίρνουμε την προσέγγιση:

$$\tilde{y}^{n+1} = y(t^n) + h \cdot f(t^n, y(t^n))$$

Άρα έχουμε $\delta^n = y(t^{n+1}) - \tilde{y}^{n+1}$



• Σφάλμα Συνέπειας: Το μέγεθος της αποτυχίας της ακριβούς λύσης να ικανοποιήσει την αριθμητική μέθοδο.
Αντικαθιστώντας στη μέθοδο τις προσεγγίσεις y^i με $y(t^i)$ δεν έχουμε πλέον ισότητα αλλά προκύπτει ένα σφάλμα, το δ^n.

Το δ^n δεν μπορούμε γενικά να το υπολογίσουμε, αφού εξαρτάται από τιμές της άγνωστης ακριβούς λύσης. Είναι όμως χρήσιμο για τη θεωρία.

Έχουμε:

$$\delta^n = y(t^{n+1}) - y(t^n) - h\cdot y'(t^n) \overset{\text{Taylor ως προς } t^n}{=}$$

$$= y(t^n) + (t^{n+1} - t^n)\, y'(t^n) + \frac{(t^{n+1}-t^n)^2}{2}\, y''(\xi_n) - y(t^n) - h\cdot y'(t^n)$$

$$= \cancel{y(t^n)} + \cancel{h y'(t^n)} + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n) - \cancel{y(t^n)} - \cancel{h y'(t^n)}$$

$$= \frac{h^2}{2} y''(\xi_n).$$

Συμπέρασμα:

$$\max_{0\le n\le N-1} |\delta^n| \le \frac{h^2}{2} \cdot \max_{a\le t\le b} |y''(t)|$$

∄ η παράσταση $y(t^{n+1}) = y(t^n) + h\cdot y'(t^n) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n)$ δεν ισχύει γενικά για διανυσματικές συναρτήσεις.

Εναλλακτικό ανάπτυγμα Taylor

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + h\cdot y'(t^n) + \int_{t^n}^{t^{n+1}} (t^{n+1} - t)\, y''(t)\, dt$$

Αυτή η μορφή ισχύει και για διανυσματικές συναρτήσεις.

Τότε: $\delta^n = \displaystyle\int_{t^n}^{t^{n+1}} (t^{n+1} - t)\, y''(t)\, dt$

Επομένως:

$$|\delta^n| \le \int_{t^n}^{t^{n+1}} (t^{n+1}-t)\cdot |y''(t)|\, dt$$

$$\le \max_{a\le t\le b} |y''(t)| \int_{t^n}^{t^{n+1}} (t^{n+1}-t)\, dt$$

$$= \max_{a\le t\le b} |y''(t)| \, \frac{h^2}{2}$$

Άρα $\boxed{\max_{0\le n\le N-1} |\delta^n| \le \max_{a\le t\le b} |y''(t)| \, \frac{h^2}{2}}$

Αφού:

$\max_{0\le n\le N-1} |\delta^n| \le C\, h^{p+1}$ με $p>0$, λέμε ότι η μέθοδος είναι συνεπής

Ευστάθεια

Υπόθεση: Η f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz ως προς y.

$\exists L \ge 0$ τ.ω $\forall t\in[a,b]$ $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$:
$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \le L\cdot |y_1-y_2|$

Με $z_0 \ne y_0$ θεωρούμε δυο ακολουθίες:

$$y^{n+1} = y^n + h\cdot f(t^n, y^n) \quad n=0,\dots,N-1$$

$$z^{n+1} = z^n + h\cdot f(t^n, z^n) \quad n=0,\dots,N-1$$

Ερώτημα: Ισχύει $\max_{0\le n\le N-1} |y^n - z^n| \le C\cdot |y^0 - z^0|$ με μια σταθερά c ανεξάρτητη του h;

Αφαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε:

$$y^{n+1} - z^{n+1} = y^n - z^n + h\left[f(t^n, y^n) - f(t^n, z^n)\right]$$

Άρα,

$$|y^{n+1} - z^{n+1}| \leq |y^n - z^n| + h \cdot |f(t^n, y^n) - f(t^n, z^n)| \Rightarrow$$

συνθήκη του Lipschitz

$$\Rightarrow |y^{n+1} - z^{n+1}| \leq (1 + h \cdot L) \cdot |y^n - z^n| \Rightarrow$$

επαγωγικά

$$\Rightarrow |y^n - z^n| \leq (1 + hL)^n \cdot |y^0 - z^0| \quad n = 0, \dots, N-1$$

$$\Rightarrow \max_{0 \leq n \leq N} |y^n - z^n| \leq (1 + Lh)^N |y^0 - z^0|$$

Έχουμε

$$1 + x \leq e^x \quad \forall x \geq 0 \quad \text{οπότε:}$$

$$1 + L \cdot h \leq e^{Lh} \Rightarrow$$

$$(1 + Lh)^N \leq (e^{Lh})^N = e^{LNh} = e^{L(b-a)}$$

Συμπέρασμα

$$\max_{0 \leq n \leq N-1} |y^n - z^n| \leq e^{L(b-a)} |y_0 - z_0|$$

Απόδειξη: $1+x \le e^x \quad \forall x \ge 0$

(1ος τρόπος) • $e^x = 1 + x + \underbrace{\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots}_{\ge 0} \ge 1+x$

(2ος τρόπος) • $\varphi(x) = e^x - (1+x)$

$\varphi(0) = e^0 - 1 = 0$

$\varphi'(x) = e^x - 1 \ge 0 \Rightarrow \varphi$ αύξουσα

Συμπέρασμα

$\varphi(x) \ge \varphi(0) = 0 \quad \forall x \ge 0$

*** Λήμμα ***

(Σημαντικό βοηθητικό αποτέλεσμα για ευστάθεια και εκτίμηση σφάλματος)

Έστω $\delta > 0$ και $k, d_0, d_1, \dots \ge 0$ τ.ω.

(*) $d_{i+1} \le (1+\delta) \cdot d_i + k \;,\; i = 0, 1, \dots$

Τότε ισχύει: (**) $d_n \le d_0 \cdot e^{n \cdot \delta} + k \dfrac{e^{n\delta} - 1}{\delta} \quad n = 0, 1, 2, \dots$

Απόδειξη

$\longrightarrow$ πισω.

Απόδειξη

Για $n=0$ η (**) γράφεται ως
$$d_0 \le d_0 \underset{1}{e^0} + k \underset{0}{\frac{e^0-1}{\delta}}$$

ή $d_0 \le d_0$

Άρα η (**) ισχύει για $n=0$

Έστω $n \ge 1$

Ισχυρισμός:

$$(+) \quad d_n \le (1+\delta)^n d_0 + k[1+(1+\delta)+(1+\delta)^2+\dots+(1+\delta)^{n+1}]$$

Επαγωγή

$n=1$: $d_1 \le (1+\delta)d_0 + k$ (ισχύει σύμφωνα με τον (*))

$n \to n+1$:

$$d_{n+1} \underset{(*)}{\le} (1+\delta)\,d_n + k$$

$$\le (1+\delta)\{(1+\delta)^n d_0 + k[1+(1+\delta)+\dots+(1+\delta)^{n+1}\}+k$$

υπόθεση επαγωγής

$$= (1+\delta)^{n+1} d_0 + k[1+(1+\delta)+(1+\delta)^2+\dots+(1+\delta)^n\}$$

δηλαδή ισχύει η (+) και για $n+1$.

$$\underbrace{1+\omega+\dots+\omega^{n-1}}_{S} = \frac{\omega^n-1}{\omega-1}$$

$S = 1+\omega+\dots+\omega^{n-1}$

$\omega S = \omega+\omega^2+\dots+\omega^n$

Άρα $\omega S - S = \omega^n - 1$.

Έχουμε

$$d_n \le (1+\delta)^n d_0 + k\underbrace{[1+(1+\delta)+\dots+(1+\delta)^{n-1}]}_{\frac{(1+\delta)^n-1}{(1+\delta)-1}}$$

$$\Rightarrow d_n \le (1+\delta)^n d_0 + k\frac{(1+\delta)^n-1}{(1+\delta)-1}$$

$$\underset{1+\delta \le e^\delta}{\le} e^{n\delta} d_0 + k\frac{e^{n\delta}-1}{\delta}$$

Εκτίμηση σφάλματος (σύγκλιση)

Προκύπτει συνδυάζοντας ευστάθεια και συνέπεια

Θεώρημα: Έστω $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση και $y \in C^2[a,b]$ η λύση του ⊛. (Υποθέτουμε ότι η f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz ως προς y.) Αν $y_0, \dots, y^N$ είναι οι προσεγγίσεις που δίνει η μέθοδος του Euler για τον ομοιόμορφο διαμερισμό $t^n = a + nh$, $n = 0, \dots, N$, με βήμα $h = \frac{b-a}{N}$, τότε ισχύει η εκτίμηση σφάλματος

$$\max_{0 \le n \le N} |y(t^n) - y^n| \le \underbrace{\frac{M}{2L}\left[e^{L(b-a)} - 1\right]}_{C \text{ ανεξάρτητη του } h} h$$

με $M = \max_{0 \le t \le b} |y''(t)|$

Απόδειξη

Έχουμε

$$\left.\begin{aligned} y(t^{n+1}) &= y(t^n) + h \cdot f(t^n, y(t^n)) + \delta^n \\ y^{n+1} &= y^n + h \cdot f(t^n, y^n) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

Θέτουμε

$$\varepsilon^i = y(t^i) - y^i, \quad i = 0, \dots, N$$

Ολικό σφάλμα, σφάλμα διακριτοποίησης ή σφάλμα προσέγγισης της μεθόδου.

$$\varepsilon^{n+1} = \varepsilon^n + h\left[f(t^n, y(t^n)) - f(t^n, y^n)\right] + \delta^n$$

$$\Rightarrow |\varepsilon^{n+1}| \le |\varepsilon^n| + h \underbrace{|f(t^n, y(t^n)) - f(t^n, y^n)|}_{\le L|\varepsilon^n|} + |\delta^n|$$

$$\Rightarrow \boxed{|\varepsilon^{n+1}| \le (1 + Lh)|\varepsilon^n| + |\delta^n|}$$

$$\Rightarrow |\varepsilon^{n+1}| \le \underbrace{(1 + Lh)}_{\delta} |\varepsilon^n| + \underbrace{\max_{0 \le i \le N-1} |\delta^i|}_{K}$$

Άρα σύμφωνα με το βοηθητικό λήμμα

$$|\varepsilon^n| \leq |\cancel{\varepsilon^0}|_{0} \, e^{nLh} + \left(\max_{0 \leq i \leq N-1} |\delta^i|\right) \frac{e^{nLh} - 1}{Lh}$$

$$\Rightarrow |\varepsilon^n| \leq \frac{e^{L(t^n - a)} - 1}{Lh} \, \frac{h^2}{2} M$$

$$\Rightarrow |\varepsilon^n| \leq \frac{e^{L(b-a)} - 1}{L\cancel{h}} \, \frac{h^{\cancel{2}}}{2} M$$

$$\Rightarrow |\varepsilon^n| \leq \underbrace{\frac{M}{2L} \left[e^{L(b-a)} - 1 \right]}_{\text{ανεξ. του } n} h$$

$$\Rightarrow \max_{0 \leq n \leq N} |e^n| \leq \frac{M}{2L} \left[e^{L(b-a)} - 1 \right] h^1$$

24/11/17

Η μέθοδος του Euler

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & a \le t \le b, \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$N \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{N}$, $t^n = a + nh$, $n = 0, \dots, N$

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + h f(t^n, y^n), & n = 0, \dots, N-1. \\ y^0 = y_0 \end{cases}$$

__Συνέπεια__: Αν $y \in C^2[a,b]$, τότε με

$$\delta^n = y(t^{n+1}) - y(t^n) - h f(t^n, y(t^n))$$

έχουμε

$$\max_{0 \le n \le N-1} |\delta^n| \le \frac{h^2}{2} \max_{a \le t \le b} |y''(t)|$$

Εκτίμηση σφάλματος

Αν $y \in C^2[a,b]$, τότε

$$\max_{0 \le n \le N} |y(t^n) - y^n| \le \frac{M}{2L} \left[e^{L(b-a)} - 1\right] h$$

με $M = \max_{a \le t \le b} |y''(t)|$

Υπόθεση: Η f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz (ως προς y)

$$(*) \quad \max_{0 \le n \le N} |y(t^n) - y^n| \le C\, h^1$$

__Ερώτημα__: Μπορεί να βελτιωθεί η δύναμη του h στην εκτίμηση σφάλματος (*);

(Αν $M = 0$ ($y \in \mathbb{P}_1$), τότε το σφάλμα είναι μηδέν!)

Απάντηση: Γενικά όχι (δηλαδή $p \le 1$)

__Παράδειγμα__

$$\begin{cases} y'(t) = 2t, & 0 \le t \le 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$\longrightarrow$

ΛΥΣΗ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΟΣ

$y(t) = t^2$

(επιλέχτηκε έτσι ώστε $y''(t) =$ σταθερή)

Έστω $N \in \mathbb{N}$, $h = \frac{1}{N}$, $t^n = nh$, $n = 0, \dots, N$.

Μέθοδος του Euler

$y^0 = 0$

$$y^{n+1} = y^n + h \cdot 2t^n = y^n + h \cdot 2nh$$

$$\Rightarrow \boxed{y^{n+1} = y^n + 2nh^2}$$

Ισχυρισμός: $y^n = y^0 + 2\,[1 + 2 + \dots + (n-1)]\,h^2$, $n = 0, 1, 2, \dots$

$n = 0$: Σωστό

$$n \to n+1 : \quad y^{n+1} = y^n + 2nh^2 \overset{\text{υποθ. επαγ.}}{=} y^0 + 2\,[1 + \dots + (n-1)]\,h^2 + 2nh^2 = y^0 + 2\,[1 + \dots + (n-1) + n]\,h^2$$

Τώρα $y^n = 2\,\underbrace{[1 + \dots + (n-1)]}_{\frac{(n-1)\cdot n}{2}}\,h^2$

$$\Rightarrow y^n = n\,(n-1)\,h^2 \qquad n = 1, \dots, N$$

Ιδιαίτερα

$$y^N = N(N-1)h^2 = (N-1)\cdot h = N\cdot h - h = 1 - h$$

Επομένως:

$$\underbrace{y(t^N)}_{=1} - y^N = y(1) - y^N = 1 - y^N = 1 - (1-h) = h$$

Συμπέρασμα $\to$ $|y(t^N) - y^N| = h$

$$\Rightarrow \boxed{\max_{0 \le n \le N} |y(t^n) - y^n| \geq h}$$

$c = 1$

$$\Rightarrow \boxed{p \le 1}$$

Ισχυρισμος:

Η εκτίμηση $\max_{0\le n\le N} |y(t^n)-y^n| \le \tilde{C} h^{1+\varepsilon}$

με $\varepsilon>0$, οδηγεί σε άτοπο.

Προίμαται:

$$\underset{\uparrow c=1}{c}h \le \tilde{C} h^{1+\varepsilon} \Leftrightarrow c \le \tilde{C} h^{\varepsilon}$$

Για $h\downarrow 0$ παίρνουμε $c\le 0$

Ατοπο! (άρα η τάξη δεν μπορεί να βελτιωθεί άλλο)

→ Η τάξη ακρίβειας της μεθόδου του Euler είναι $p=1$.

→ Η τάξη του τοπικού σφάλματος είναι $q=p+1$.

Ερώτημα: Τι αλλάζει στην περίπτωση συστημάτων ΣΔΕ;

(Η απόλυτη τιμή θα αντικατασταθεί με κάποια νόρμα)

Απάντηση:

Αλλάζει μόνο η παράσταση του σφάλματος συνέπειας.

Σφάλμα συνέπειας:

$$\delta^n = y(t^{n+1}) - y(t^n) - h f(t^n, y(t^n))$$
$$= y(t^{n+1}) - y(t^n) - h\, y'(t^n)$$

• Στη βαθμωτή περίπτωση έχουμε:

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) - h y'(t^n) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n)$$

οπότε

$$\boxed{\delta^n = \frac{h^2}{2} y''(\xi_n)}$$

Αυτή η παράσταση δεν ισχύει στη διανυσματική περίπτωση: Αν $y(t)\in\mathbb{R}^m$ τότε έχουμε για $i=1,\dots,m$

$$y_i(t^{n+1}) = y_i(t^n) + h y_i'(t^n) + \frac{h^2}{2} y_i''(\xi_{n_i})$$

οπότε

$$\delta^n = \frac{h^2}{2}\begin{pmatrix} y_1''(\xi_{n,1}) \\ \vdots \\ y_m''(\xi_{n,m}) \end{pmatrix}$$

$x \in \mathbb{R}^m \quad \|x\|_\infty = \max_{1\le i\le m}|x_i|$

Έστω ότι χρησιμοποιούμε τη <u>νόρμα μεγίστου</u> $\|\cdot\|_\infty$

Τότε

$$\|\delta^n\|_\infty \le \frac{h^2}{2}\max_{a\le t\le b}\|y''(t)\|_\infty$$

Για οποιαδήποτε άλλη νόρμα $\|\cdot\|$ στον $\mathbb{R}^m$ έχουμε:

$$\forall x \in \mathbb{R}^m \quad \|x\| \le C\|x\|_\infty$$

Άρα

$$\begin{aligned}\|\delta^n\| &\le C\|\delta^n\|_\infty \\ &\le C\,\frac{h^2}{2}\max_{a\le t\le b}\|y''(t)\|_\infty\end{aligned}$$

<u>Εναλλακτικά:</u> Τύπος του Taylor με υπόλοιπο σε ολοκληρωτική μορφή

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + h y'(t^n) + \int_{t^n}^{t^{n+1}} (t^{n+1}-t)\, y''(t)\, dt$$

Ισχύει και για <u>διανυσματικές</u> συναρτήσεις.

Επομένως

$$\delta^n = \int_{t^n}^{t^{n+1}} (t^{n+1}-t)\, y''(t)\, dt$$

<u>Συμπέρασμα</u>

$\Downarrow$

$$\begin{aligned}\|\delta^n\| &= \Big\| \int_{t^n}^{t^{n+1}} \underbrace{(t^{n+1}-t)}_{\ge 0}\, y''(t)\, dt \Big\| \\ &\le \int_{t^n}^{t^{n+1}} (t^{n+1}-t)\, \|y''(t)\|\, dt \\ &\le \Big(\max_{a\le t\le b}\|y''(t)\|\Big) \underbrace{\int_{t^n}^{t^{n+1}} (t^{n+1}-t)\, dt}_{= \frac{h^2}{2}}\end{aligned}$$

οπότε

$$\|\delta^n\| \leq \frac{h^2}{2} \max_{a\leq t\leq b} \|y''(t)\|$$

Ισχύει για οποιαδήποτε νόρμα (χωρίς κάποια σταθερά ισοδυναμίας)

Περιοχή (απόλυτης) ευστάθειας,
A - ευστάθεια, B - ευστάθεια

Πρόβλημα δοκιμής:

1. $\begin{cases} y' = \lambda \cdot y \ , \ t>0 \\ y(0)=1 \end{cases}$

Η λύση του είναι $y(t) = e^{\lambda t}$

$|y(t)| = e^{(Re\lambda)t}$

Για $Re\lambda \leq 0$, η $|y(t)|$ είναι φθίνουσα.

2. $\begin{cases} y' = f(t,y) \ , \ a\leq t\leq b \\ y(a)=y_0 \end{cases}$

Υπόθεση: Η f ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz

$\forall t\in[a,b] \ \forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^m$

$(f(t,x) - f(t,\tilde{x}), x-\tilde{x}) \leq 0$ (εσωτ. γινομ.)

$\begin{cases} z' = f(t,z) \ , \ a\leq t\leq b \\ z(a)=z_0 \end{cases}$

Τότε η $\|y(t)-z(t)\|$ είναι φθίνουσα

(Εδώ $\|\cdot\|$ είναι η Ευκλείδια νόρμα στον $\mathbb{R}^m$).

Μια μέθοδος που για τον υπολογισμό της προσέγγισης y^{n+1} χρησιμοποιεί μόνο την αμέσως προηγούμενη προσέγγιση y^n (αλλά όχι τις $y^{n-1}, y^{n-2}, \dots$) λέγεται μονοβηματική.

Ορισμός: (B - ευστάθεια)

Μια μονοβηματική μέθοδος λέγεται B - ευσταθής αν όταν εφαρμοστεί στο δεύτερο πρόβλημα δοκιμής δίνει προσεγγίσεις

$y^0, \dots, y^N$ και $z^0, \dots, z^N$ τ.ω
$$\|y^{n+1} - z^{n+1}\| \leq \|y^n - z^n\| \quad , n=0, \dots, N-1,$$
δηλαδή αν η μέθοδος μιμείται την ιδιότητα του συστήματος Δ.Ε.

∄ μέθοδος του Euler δεν είναι B-ευσταθής.

Εξασθενούμε λίγο τη συνθήκη και ασχολούμαστε με τη συμπεριφορά της αριθμητικής μεθόδου για το 1ο πρόβλημα δοκιμής.

Ορισμός: (A-ευστάθεια)
Μια μονοβηματική μέθοδος λέγεται A-ευσταθής, αν εφαρμοστεί στο πρώτο πρόβλημα δοκιμής, με $Re\lambda \leq 0$, και αυθαίρετο βήμα h, δίνει προσεγγίσεις y^n τ.ω.
$$|y^{n+1}| \leq |y^n| \quad , n=0, 1, 2, \dots$$

Όταν $Re\lambda \leq 0$, τότε το 1ο πρόβλημα δοκιμής γράφεται στη μορφή
$$(*) \begin{cases} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ y_1(0) = 1 \quad , y_2(0) = 0 \end{cases}$$
με $\lambda = \overset{\leq 0}{a} + ib$ και $y(t) = y_1(t) + i y_2(t)$, με $a, b, y_1(t), y_2(t) \in \mathbb{R}$.
Αυτό ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz του 2ου προβλήματος δοκιμής.

Οι συνηθισμένες αριθμητικές μέθοδοι δίνουν τις ίδιες προσεγγίσεις είτε εφαρμοστούν στο 1ο πρόβλημα δοκιμής είτε στο (*).
Συμπέρασμα:
B-ευστάθεια ⇒ A-ευστάθεια
Το αντίστροφο δεν ισχύει!
(Θα δούμε αντιπαραδείγματα αργότερα).

Ισχυρισμός: Η μέθοδος του Euler δεν είναι A-ευσταθής (συνεπώς ούτε B-ευσταθείς).

Εφαρμόζουμε τη μέθοδο στο 1º πρόβλημα δοκιμής και παίρνουμε:

$y^0 = 1$

$y^{n+1} = y^n + h \cdot \lambda \cdot y^n$

$= (1+\lambda h) \cdot y^n$

Έχουμε

$$|y^{n+1}| = |(1+\lambda h)| \cdot |y^n|$$

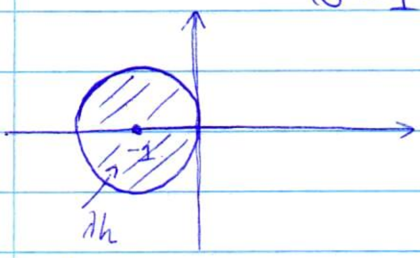
$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$|z_1 - z_2|$ απόσταση μεταξύ τους

$\lambda h \in \mathbb{C}$ με $Re(\lambda h) \leq 0$

$|1+\lambda h| = |\lambda h - (-1)|$

απόσταση του λh από το -1.



$|\lambda h + 1| \leq 1$

Έστω k ο κύκλος (με το εσωτερικό του) (ή δίσκος) με κέντρο το -1 και ακτίνα 1.

Αν $\lambda h \notin k$, τότε $|1+\lambda h| > 1$,

οπότε για $y^n \neq 0$ έχουμε $|y^{n+1}| > |y^n|$

Συμπέρασμα → Η μέθοδος δεν είναι A-ευσταθής.

Ορισμός: (Περιοχή (απόλυτης) ευστάθειας)

Εφαρμόζουμε μια μονοβηματική μέθοδο στο 1º πρόβλημα δοκιμής (δεν απαιτείται $Re\lambda \leq 0$).

Η περιοχή ευστάθειας S της μεθόδου αποτελείται από όλα τα σημεία $z=\lambda \cdot h$ στο μιγαδικό επίπεδο με την ιδιότητα ότι για λ και h τω $\lambda h = z$ να δίνει προσεγγίσεις y^n, $n=0$, τω η ακολουθία $(|y^n|)_{n\in\mathbb{N}_0}$ να είναι φθίνουσα.

→ Μια μέθοδος είναι A-ευσταθής αν και μόνο αν όλο το αρνητικό μιγαδικό ημιεπίπεδο, $\mathbb{C}^- = \{z\in\mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z \le 0\}$ να περιέχεται στην περιοχή ευσταθειας S της μεθόδου.

→ Περιοχή ευσταθειας ~~του~~ της μεθόδου του Euler:

$$S = \{z\in\mathbb{C} : |1+z|\le 1\}$$

$= K$ ⇝ δίσκος με κέντρο το -1 και ακτίνα 1.

28/11/17

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$N \in \mathbb{N}$, $h = \dfrac{b-a}{N}$, $t^n = a + nh$, $n = 0, \dots, N$

Άμεση μέθοδος του Euler

$$y^{n+1} = y^n + h f(t^n, y^n) \quad n = 0, \dots, N-1$$
$$y^0 = y_0$$

Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα της μεθόδου

ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ: Η μέθοδος είναι άμεση, δηλαδή σε κάθε βήμα για τον υπολογισμό του y^{n+1} δεν χρειάζεται να λύσουμε κάποια εξίσωση, προγραμματίζεται πολύ εύκολα, και απαιτεί ένα μόνο υπολογισμό της f ανά βήμα.

ΜΕΙΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ: Η τάξη ακρίβειας της μεθόδου είναι πολύ χαμηλή, είναι ένα, οπότε για να επιτύχουμε υψηλή ακρίβεια πρέπει να επιλέξουμε πολύ μικρό βήμα h. Αυτό αφ' ενός αυξάνει πολύ το συνολικό κόστος, αφ' ετέρου οι προσεγγίσεις επηρεάζονται πολύ από τα σφάλματα στρογγύλευσης. Επιπλέον η μέθοδος δεν είναι Β-ευσταθής, ούτε και Α-ευσταθής. Μάλιστα έχει πολύ μικρή περιοχή ευστάθειας.

Πεπλεγμένη μέθοδος του Euler

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + h \cdot f(t^{n+1}, y^{n+1}), & n = 0, \dots, N-1, \\ y^0 = y_0 \end{cases}$$

Η μέθοδος είναι πεπλεγμένη αφού για τον προσδιορισμό του y^{n+1} απαιτείται σε κάθε βήμα η επίλυση μιας εξίσωσης.

Τρόποι κατασκευής

- Αριθμητική διαφόριση:

$$\left.\begin{array}{l} y'(t^{n+1}) = f(t^{n+1}, y(t^{n+1})) \\ y'(t^{n+1}) \approx \dfrac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h} \approx f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))$$

Αντικαθιστώντας το $\approx$ με $=$ και τα $y(t^i)$ με y^i, $i=n,n+1$ παίρνουμε:

$$\frac{y^{n+1}-y^n}{h} = f(t^{n+1}, y^{n+1}) \Leftrightarrow \boxed{y^{n+1} = y^n + h\cdot f(t^{n+1}, y^{n+1})}$$

• Αριθμητική ολοκλήρωση:

$$y'(t) = f(t, y(t)) \Rightarrow$$

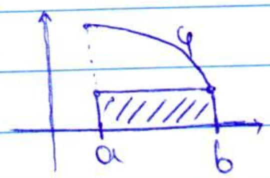
$$\underbrace{\int_{t^n}^{t^{n+1}} y'(t)\,dt}_{= \; y(t^{n+1}) - y(t^n)} = \underbrace{\int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t))\,dt}_{\approx \; h f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))}$$

δεξιός τύπος του ορθογωνίου

$$\Rightarrow y(t^{n+1}) - y(t^n) \approx h\cdot f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))$$

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \approx (b-a)\,\varphi(b)$$

Δεξιός Τύπος ορθογωνίου



(αν το $[a,b]$ είναι μικρό διάστημα τότε η προσέγγιση είναι καλή)

• Ανάπτυγμα Taylor

$$y(t^n) = y(t^{n+1}) + (t^n - t^{n+1})\,y'(t^{n+1}) + \frac{(t^n - t^{n+1})^2}{2}\,y''(\xi_n)$$

$$\Rightarrow y(t^n) \approx y(t^{n+1}) - h\,\underbrace{y'(t^{n+1})}_{= \; f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))}$$

$$\Rightarrow y(t^{n+1}) \approx y(t^n) + h\cdot f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))$$

Αντικαθιστώντας το $\approx$ με $=$ ....

Ύπαρξη και μοναδικότητα των προσεγγίσεων:

• Χωρίς συνθήκες στο h και/ή στην f δεν έχουμε ύπαρξη και μοναδικότητα.

Παράδειγμα: Εφαρμόζω τη μέθοδο στην $y' = \lambda \cdot y$ και παίρνω

$$y^{n+1} = y^n +$$

Άρα

$$(1-\lambda h)\, y^{n+1} = y^n.$$

Για $\lambda > 0$ και $h = \frac{1}{\lambda}$ έχουμε $0 \cdot y^{n+1} = y^n$.

Για $y^n \neq 0$ η εξίσωση δεν έχει λύση. Αντίθετα, για $y^n = 0$ κάθε $y^{n+1} \in \mathbb{C}$ είναι λύση. (άρα πρέπει να ορίσω περιπτώσεις)

1η περίπτωση: Η f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz ως προς y με σταθερά L.

Ισχυρισμός:

Για h αρκετά μικρό ώστε $h < \frac{1}{L}$, οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες.

Με $g(x) := y^n + h f(t^{n+1}, x)$ το βήμα της μεθόδου γράφεται στη μορφή

$$\boxed{y^{n+1} = g(y^{n+1})}$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η g έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο.

Θα αποδείξουμε ότι η g είναι συστολή (δηλαδή ότι ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz με σταθερά γνήσια μικρότερη του 1) στο $\mathbb{R}$. Πράγματι, για $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$g(x_1) - g(x_2) = h\,[f(t^{n+1}, x_1) - f(t^{n+1}, x_2)]$$

$$\Rightarrow |g(x_1) - g(x_2)| = h\,\underbrace{|f(t^{n+1}, x_1) - f(t^{n+1}, x_2)|}_{\leq L|x_1 - x_2|}$$

$\Rightarrow |g(x_1) - g(x_2)| \leq \underbrace{L h}_{<1} |x_1 - x_2|$

Συμπέρασμα: Η g είναι συστολή, οπότε έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο

2η περίπτωση: Η f ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz,
$\forall t \in [a,b]\ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad [f(t,x_1) - f(t,x_2)](x_1 - x_2) \leq 0$

Ισχυρισμός: Οι προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες χωρίς περιορισμό στο h.

Με $g(x) = x - y^n - h f(t^{n+1}, x)$
το βήμα της μεθόδου είναι $g(y^{n+1}) = 0$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η g έχει ακριβώς μια ρίζα.

Μοναδικότητα ρίζας: Η g είναι γνήσια αύξουσα, οπότε έχει το πολύ μια ρίζα.

Ύπαρξη ρίζας: Η g είναι συνεχής (η f υποθέτουμε ότι είναι συνεχής)
Αρκεί να αποδείξουμε ότι η g λαμβάνει τόσο θετικές όσο και αρνητικές τιμές.

Για $x \leq 0$ έχουμε:

$$f(t^{n+1}, x) \geq f(t^{n+1}, 0) \quad \text{(επειδή είναι φθίνουσα)}$$

$$\Rightarrow -h f(t^{n+1}, x) \leq -h f(t^{n+1}, 0)$$

$$\Rightarrow \underbrace{x - y^n - h f(t^{n+1}, x)}_{g(x)} \leq x - y^n - h f(t^{n+1}, 0)$$

$$\Rightarrow g(x) \leq x - y^n - h \cdot f(t^{n+1}, 0) \to -\infty$$
για $x \to -\infty$

$\Rightarrow$ η g παίρνει αρνητικές τιμές.

Αντίστοιχα,

για $x \geq 0$ έχουμε: $f(t^{n+1}, x) \leq f(t^{n+1}, 0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow g(x) \geq x - y^n - h f(t^{n+1}, 0) \to +\infty$$
για $x \to +\infty$

Συμπέρασμα: Η g παίρνει και θετικές τιμές.

Σύμφωνα με το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής η g παίρνει και την τιμή μηδέν, δηλαδή έχει μια ρίζα.

Συνέπεια:

Τοπικό σφάλμα

$$\delta^n := y(t^{n+1}) - y(t^n) - h\cdot \underbrace{f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))}_{= y'(t^{n+1})}$$

$$= y(t^{n+1}) - y(t^n) - h\cdot y'(t^{n+1})$$

$$= \cancel{y(t^{n+1})} - \left[\cancel{y(t^{n+1})} + \cancel{\underbrace{(t^n - t^{n+1})}_{=-h} y'(t^{n+1})} + \frac{(t^n - t^{n+1})^2}{2} y''(\xi_n)\right] - \cancel{h\cdot y'(t^{n+1})}$$

$\xi_n \in (t^n, t^{n+1})$

$$= -\frac{h^2}{2} y''(\xi_n)$$

$$\delta^n = -\frac{h^2}{2} y''(\xi_n)$$

$$\Rightarrow |\delta^n| \leq \frac{h^2}{2} \max_{a\leq t\leq b} |y''(t)| \Rightarrow \max_{0\leq n\leq N-1} |\delta^n| \leq \frac{h^2}{2} \max_{a\leq t\leq b} |y''(t)|$$

~~γιατί~~ θέλω κάτι ανεξ. από το ξ_n γι' αυτό δεν βάζω $t^n \leq t \leq t^{n+1}$

Ευστάθεια:

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + h\cdot f(t^{n+1}, y^{n+1}), & n=0,\dots,N-1 \\ y^0 = y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z^{n+1} = z^n + h\cdot f(t^{n+1}, z^{n+1}), & n=0,\dots,N-1 \\ z^0 = z_0 \end{cases}$$

1η περίπτωση: Η f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz με σταθερά L.

Τότε:

$$y^{n+1} - z^{n+1} = y^n - z^n + h\left[f(t^{n+1}, y^{n+1}) - f(t^{n+1}, z^{n+1})\right]$$

$$\Rightarrow |y^{n+1} - z^{n+1}| \leq |y^n - z^n| + h\cdot \underbrace{|f(t^{n+1}, y^{n+1}) - f(t^{n+1}, z^{n+1})|}_{\leq L|y^{n+1} - z^{n+1}|}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(1-Lh)}_{>0} |y^{n+1} - z^{n+1}| \leq |y^n - z^n|$$

Τώρα για $Lh \leq \frac{1}{2}$ έχουμε

$$\frac{1}{1-Lh} \leq 1+2Lh$$

$$\Big(\Leftrightarrow \cancel{1} \leq \cancel{1} - Lh + 2Lh - 2L^2h^2$$
$$\Leftrightarrow 0 \leq Lh - 2(Lh)^2$$
$$\Leftrightarrow 0 \leq 1 - 2Lh \Leftrightarrow \boxed{Lh \leq \frac{1}{2}} \Big)$$

$$1 - Lh \cdot |y^{n+1} - z^{n+1}| \leq |y^n - z^n|$$
$$\Rightarrow |y^{n+1} - z^{n+1}| \leq \frac{1}{1-Lh} |y^n - z^n|$$
$$\Rightarrow |y^{n+1} - z^{n+1}| \leq (1+2Lh)|y^n - z^n|$$

$$\Rightarrow |y^n - z^n| \leq \underbrace{(1+2Lh)^n}_{\leq (e^{2Lh})^n} |y^0 - z^0|$$

Επαγωγή

$$e^{2L(nh)} \leq e^{2L(b-a)}$$

$$\Rightarrow \max_{0 \leq n \leq N} |y^n - z^n| \leq e^{2L(b-a)} |y^0 - z^0|$$

<u>2η περίπτωση:</u> Η $f: [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz,

$$\forall t \in [a,b] \ \forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^m \ \left(f(t,x) - f(t,\tilde{x}), x - \tilde{x}\right) \leq 0$$

Τότε

$$y^{n+1} - z^{n+1} = y^n - z^n + h\left[f(t^{n+1}, y^{n+1}) - f(t^{n+1}, z^{n+1})\right]$$

$$\Rightarrow (y^{n+1} - z^{n+1}, y^{n+1} - z^{n+1}) = (y^n - z^n, y^{n+1} - z^{n+1}) + h\left(f(t^{n+1}, y^{n+1}) - f(t^{n+1}, z^{n+1}), y^{n+1} - z^{n+1}\right)$$

$$\Rightarrow \|y^{n+1} - z^{n+1}\|^{\cancel{2}} \leq (y^n - z^n, y^{n+1} - z^{n+1})$$
$$\leq \|y^n - z^n\| \cdot \cancel{\|y^{n+1} - z^{n+1}\|} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \|y^{n+1} - z^{n+1}\| \leq \|y^n - z^n\|$$

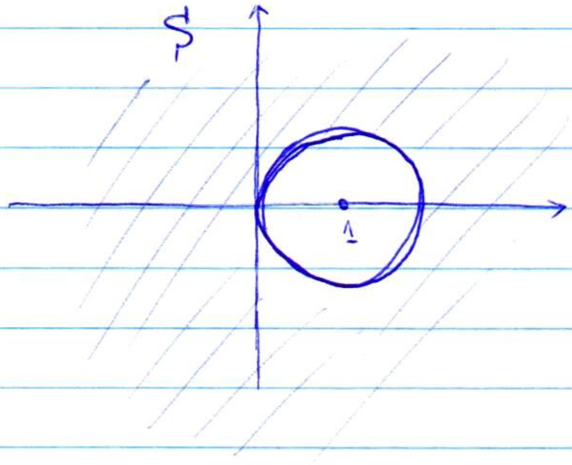
CS

Η μέθοδος είναι B-ευσταθής.

$$\Rightarrow \max_{0\le n\le N} \|y^n - z^n\| \le \overset{C=1}{\|y^0 - z^0\|}$$

<u>Α-ευστάθεια:</u> Αφού η μέθοδος είναι Β-ευσταθής είναι και Α-ευσταθή

<u>Περιοχή Ευστάθειας:</u>



30/11/17

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$N \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{N}$, $t^n = a + nh$, $n = 0, \dots, N$

Πεπλεγμένη μέθοδος του Euler

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + h f(t^{n+1}, y^{n+1}), & n = 0, \dots, N-1, \\ y^0 = y_0 \end{cases}$$

Συνέπεια:

$\delta^n = y(t^{n+1}) - y(t^n) - h f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))$

Τότε

$$\max_{0 \le n \le N-1} |\delta^n| \le \frac{h^2}{2} \max_{a \le t \le b} |y''(t)|$$

- Η μέθοδος είναι Β-ευσταθής.
- Α-ευσταθής

Περιοχή Ευστάθειας

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο στο πρότυπο πρόβλημα δοκιμής

$y' = \lambda y$, $t \ge 0$

$y(0) = 1$

έχουμε

$$y^{n+1} = y^n + h\lambda y^{n+1}$$

Άρα

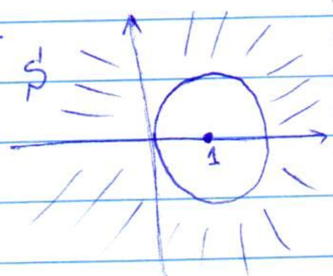
$$y^{n+1} = \frac{1}{1 - \lambda y} y^n$$

$$\Rightarrow |y^{n+1}| = \underbrace{\frac{1}{|1 - \lambda y|}}_{\le 1} |y^n|$$

Περιοχή Ευστάθειας:

$$S = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{1}{|1-z|} \le 1 \right\} = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z-1| \ge 1 \right\} \supset \mathbb{C}^-$$

S



Ιδιαίτερα, η μέθοδος είναι Α-ευσταθής.

Με

$$r(z) = \frac{1}{1-z}$$ τη συνάρτηση ευσταθείας της μεθόδου, έχουμε:

ρητή συνάρτηση

$$S = \{ z \in \mathbb{C} : |r(z)| \leq 1 \}$$

Εκτίμηση Σφάλματος

1η περίπτωση: Η f ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz.

Συνδυάζοντας ευστάθεια και συνέπεια της πεπλεγμένης μεθόδου του Euler, με τρόπο ακριβώς αντίστοιχο εκείνου στην περίπτωση της άμεσης μεθόδου του Euler, παίρνουμε, για $Lh \leq \frac{1}{2}$, την εκτίμηση

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y(t^n) - y^n| \leq \frac{M}{2L} \left[e^{2L(b-a)} - 1 \right] \cdot h$$

με $M = \max_{a \leq t \leq b} |y''(t)|$

2η περίπτωση: Η f ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz,

$\forall t \in [a,b]$ $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

$$[f(t,y_1) - f(t,y_2)](y_1 - y_2) \leq 0.$$

Έχουμε

$$\begin{cases} y(t^{n+1}) = y(t^n) + h \cdot f(t^{n+1}, y(t^{n+1})) + \delta^n \\ y^{n+1} = y^n + h \cdot f(t^{n+1}, y^{n+1}) \end{cases}$$

οπότε με $\varepsilon^i = y(t^i) - y^i$,

$$\varepsilon^{n+1} = \varepsilon^n + h[f(t^{n+1}, y(t^{n+1})) - f(t^{n+1}, y^{n+1})] + \delta^n$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με $\varepsilon^{n+1} = y(t^{n+1}) - y^{n+1}$, παίρνουμε

$$|\varepsilon^{n+1}|^2 = \varepsilon^n \varepsilon^{n+1} + \underbrace{h \cdot [f(t^{n+1}, y(t^{n+1})) - f(t^{n+1}, y^{n+1})] \cdot \varepsilon^{n+1}}_{\leq 0} + \delta^n \cdot \varepsilon^{n+1}$$

οπότε

$$|\varepsilon^{n+1}|^2 \leq \varepsilon^n \cdot \varepsilon^{n+1} + \delta^n \varepsilon^{n+1}$$
$$\leq (|\varepsilon^n| + |\delta^n|) |\varepsilon^{n+1}|$$

$$\Rightarrow \boxed{|\varepsilon^{n+1}| \leq |\varepsilon^n| + |\delta^n|}$$

Επομένως

$$|\varepsilon^{n+1}| \le |\varepsilon^n| + \max_{0\le i\le N-1} |\delta^i|$$

$$\underset{\text{Επαγωγικά}}{\Longrightarrow} \quad |\varepsilon^n| \le \underbrace{\cancel{|\varepsilon^0|}}_{0} + n \max_{0\le i\le N-1} |\delta^i|$$

$$\Longrightarrow \quad |\varepsilon^n| \le n\,\frac{h^2}{2} \max_{a\le t\le b} |y''(t)|$$

$$\le \frac{b-a}{2} \max_{a\le t\le b} |y''(t)|$$

Άρα

$$\max_{0\le n\le N} |\varepsilon^n| \le \frac{b-a}{2}\, h \max_{a\le t\le b} |y''(t)|$$

Σημείωση:

(1) $a_{n+1} \le a_n + k$, $n=0,1,\dots$

Ισχυρισμός: $a_n \le a_0 + nk$

• Επαγωγή: $n=0$: $a_0 \le a_0 + 0\cdot k$ ✓

$n \to n+1$: $a_{n+1} \overset{(1)}{\le} a_n + k \underset{\text{Επαγ. Υποθ.}}{\le} (a_0+nk)+k$

$\Rightarrow \boxed{a_{n+1} \le a_0 + (n+1)k}$

ή

$a_n \le a_{n+1} + k$

$a_{n+1} \le a_{n+2} + k$

$\vdots$

$a_1 \le a_0 + k$

$a_n \le a_0 + nk$

Άλλες χρήσιμες μέθοδοι χαμηλής τάξης

1. Η μέθοδος του τραπεζίου

$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}\left[f(t^n, y^n) + f(t^{n+1}, y^{n+1})\right]$$

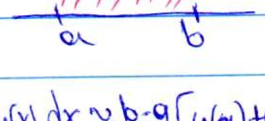
- πεπλεγμένη μέθοδος
- τάξη ακρίβειας: $p=2$
- Τρόπος κατασκευής:

$$y'(t) = f(t, y(t)) \Rightarrow \underbrace{\int_{t^n}^{t^{n+1}} y'(t)\,dt}_{=\, y(t^{n+1}) - y(t^n)} = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t))\,dt$$

Προσεγγίζουμε το ολοκλήρωμα με τη μέθοδο του τραπεζίου και έχουμε

$$y(t^{n+1}) - y(t^n) \approx \frac{h}{2}\left[f(t^n, y(t^n)) + f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))\right]$$

Μεθ. τραπεζίου



$$\int_a^b y(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\left[y(a) + y(b)\right]$$

Ισχυρισμός: Η μέθοδος είναι Α-ευσταθής

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο (του τραπεζίου) στο πρώτο πρόβλημα δοκιμής

$$\begin{cases} y' = \lambda y, & t \geq 0, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Παίρνουμε

$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}\left(\lambda y^n + \lambda y^{n+1}\right)$$

$$\left(1 - \frac{\lambda h}{2}\right) y^{n+1} = \left(1 + \frac{\lambda h}{2}\right) y^n \Rightarrow$$

$$y^{n+1} = \frac{1 + \frac{\lambda h}{2}}{1 - \frac{\lambda h}{2}}\, y^n$$

Με

$$r(z) = \frac{1 + \frac{z}{2}}{1 - \frac{z}{2}}$$

η περιοχή ευστάθειας S της μεθόδου είναι

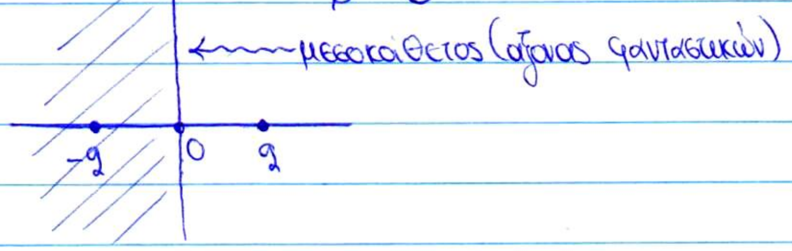
$$S = \{ z \in \mathbb{C} : |r(z)| \leq 1 \}$$

$$= \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{|z+2|}{|z-2|} \leq 1 \right\}$$

$$= \{ z \in \mathbb{C} \quad |z+2| \leq |z-2| \}$$

Γεωμετρικός τρόπος:

$$S = \mathbb{C}^-$$



Αλγεβρικός τρόπος: $z = x + iy$

$$|z+2| \leq |z-2| \Leftrightarrow |(x+2)+iy| \leq |(x-2)+iy| \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2+y^2} \leq \sqrt{(x-2)^2+y^2} \Leftrightarrow$$

$$(x+2)^2 + \cancel{y^2} \leq (x-2)^2 + \cancel{y^2} \Leftrightarrow \cancel{x^2} + 4x + \cancel{4} \leq \cancel{x^2} - 4x + \cancel{4} \Leftrightarrow 8x \leq 0 \Leftrightarrow \boxed{x \leq 0}$$

Ισχυρισμός: Η μέθοδος δεν είναι B-ευσταθής

$$\begin{cases} y'(t) = \underbrace{\lambda(t)\, y(t)}_{f}, & t \geq 0, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$\lambda(t) \leq 0$

Ισχυρισμός: Η f ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz:

$[\lambda(t) \cdot y_1 - \lambda(t) \cdot y_2](y_1 - y_2) =$

$\underbrace{\lambda(t)}_{\leq 0} (y_1 - y_2)^2 \leq 0$ (άρα την ικανοποιεί)

$z^n = 0 \ldots$

$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}\left[\lambda(t^n) y^n + \lambda(t^{n+1}) \cdot y^{n+1}\right]$$

$$\Rightarrow y^{n+1} = \frac{1 + \frac{\lambda(t^n) \cdot h}{2}}{1 - \frac{\lambda(t^{n+1}) h}{2}} \cdot \underbrace{y^n}_{\neq 0}$$

Για αυθαίρετο h επιλέγω τη συνάρτηση λ έτσι ώστε

$\lambda(t^n) \cdot h = -8$ και $\lambda(t^{n+1}) \cdot h = -1$.

Τότε

$$y^{n+1} = \frac{1-4}{\frac{3}{2}} y^n \Rightarrow y^{n+1} = -2 \cdot y^n \Rightarrow |y^{n+1}| > \underbrace{|y^n|}_{\neq 0}$$

2. Η μέθοδος του μέσου

$$y^{n+1} = y^n + h \cdot f\Big(\underbrace{\frac{t^n + t^{n+1}}{2}}_{= t^n + \frac{h}{2}}, \frac{1}{2}(y^n + y^{n+1})\Big)$$

- πεπλεγμένη
- τάξη ακρίβειας: $p = 2$
- Τρόπος κατασκευής:

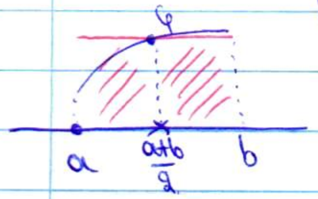
$$y'(t) = f(t, y(t)) \Rightarrow \int_{t^n}^{t^{n+1}} y'(t)\, dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t, y(t))\, dt \Rightarrow$$

$$y(t^{n+1}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t,y(t))\,dt$$

$$\approx h\cdot f\left(\frac{t^n+t^{n+1}}{2}, y\left(\frac{t^n+t^{n+1}}{2}\right)\right)$$

$$y\left(\frac{t^n+t^{n+1}}{2}\right) \approx \frac{y(t^n)+y(t^{n+1})}{2}$$

Τύπος του μέσου



Άρα

$$y(t^{n+1}) - y(t^n) \approx y(t^n) + h f\left(t^n+\frac{h}{2}, \frac{y(t^n)+y(t^{n+1})}{2}\right)$$

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \approx (b-a)\,\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

<u>Ισχυρισμός</u>: Η μέθοδος είναι B-ευσταθής.

2ο πρόβλημα δοκιμής (και εφαρμόζω τη μέθοδο).

$$y^{n+1} = y^n + h\, f\left(t^n+\frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y^n+y^{n+1})\right)$$

$$z^{n+1} = z^n + h\cdot f\left(t^n+\frac{h}{2}, \frac{1}{2}(z^n, z^{n+1})\right)$$

$$\Rightarrow y^{n+1} - z^{n+1} = (y^n - z^n) + h\left[f\left(t^n+\frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y^n+y^{n+1})\right) - f\left(t^n+\frac{h}{2}, \frac{1}{2}(z^n+z^{n+1})\right)\right]$$

Παίρνουμε το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο με

$$\frac{1}{2}(y^n+y^{n+1}) - \frac{1}{2}(z^n+z^{n+1}) = \frac{1}{2}(y^{n+1}-z^{n+1}) + \frac{1}{2}(y^n-z^n)$$

και έχουμε

$$\left((y^{n+1}-z^{n+1})-(y^n-z^n), \frac{1}{2}(y^{n+1}-z^{n+1})+\frac{1}{2}(y^n-z^n)\right) = \underbrace{h\left(f\left(t^n+\frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y^n+y^{n+1})\right) - f\left(t^n+\frac{h}{2}, \frac{1}{2}(z^n+z^{n+1})\right), \frac{1}{2}(y^n+y^{n+1}) - \frac{1}{2}(z^n+z^{n+1})\right)}_{\leq 0}$$

$$\frac{1}{2}\|y^{n+1}-z^{n+1}\|^2 - \frac{1}{2}\|y^n-z^n\|^2 \leq 0 \Rightarrow$$

$$\|y^{n+1}-z^{n+1}\| \leq \|y^n-z^n\|$$

Ιδιαίτερα, η μέθοδος είναι και A-ευσταθής.

Περιοχή Ευστάθειας

$y' = \lambda \cdot y$

$y^{n+1} = y^n + h\lambda \frac{1}{2}(y^n + y^{n+1}) \Leftrightarrow$

$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}\left[\lambda y^n + \lambda y^{n+1}\right]$$

Συμπίπτει με τη μέθοδο του τραπεζίου

Άρα $S = \mathbb{C}^-$

- ΤΕΛΟΣ ΘΕΩΡΙΑΣ 2ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ -