

## 4. Πολυβηματικές μέθοδοι

### Ασκήσεις

4.1 Προσδιορίστε τα  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ , ώστε η διβηματική μέθοδος

$$\alpha_2 y^{n+2} + \alpha_1 y^{n+1} + \alpha_0 y^n = h f^{n+2}$$

να έχει τάξη ακρίβειας δύο. Είναι η μέθοδος που προκύπτει ευσταθής;

4.2 Αποδείξτε τη σχέση

$$C_j = \frac{1}{j!} (\alpha_1 + 2^j \alpha_2 + \dots + k^j \alpha_k) - \frac{1}{(j-1)!} (\beta_1 + 2^{j-1} \beta_2 + \dots + k^{j-1} \beta_k), \quad j \geq 2,$$

που δίνεται λίγο πριν την (4.49).

4.4 Έστω  $y^0 := 0, y^1 := 1$ , και  $y^{n+2} := y^{n+1} + y^n, n \in \mathbb{N}_0$ . Δώστε σε κλειστή μορφή τον  $n$ -στό όρο της ακολουθίας  $(y^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ . Η ακολουθία αυτή είναι γνωστή ως *ακολουθία του Fibonacci*.

4.6 Αν χρησιμοποιήσουμε ως μέθοδο πρόβλεψης τη μέθοδο του Euler και ως μέθοδο διόρθωσης τη μέθοδο του τραπεζίου, δηλαδή το ζεύγος  $(i)$  της παραγράφου 4.5, και κάνουμε μία μόνο διόρθωση σε κάθε βήμα, οδηγούμαστε στην εξής μέθοδο

$$\begin{cases} y^0 := y_0 \\ y^{n+1} := y^n + \frac{h}{2} [f(t^n, y^n) + f(t^{n+1}, y^n + hf(t^n, y^n))], \quad n \geq 0. \end{cases}$$

Προσδιορίστε την τάξη ακρίβειας αυτής της μεθόδου και αποδείξτε ευστάθεια και σύγκλιση.

4.7 Προσδιορίστε τους συντελεστές  $\alpha_1, \alpha_0, \beta_2, \beta_1, \beta_0$  της γενικής διβηματικής μεθόδου με βήμα

$$y^{n+2} + \alpha_1 y^{n+1} + \alpha_0 y^n = h(\beta_2 f^{n+2} + \beta_1 f^{n+1} + \beta_0 f^n)$$

έτσι ώστε η τάξη ακρίβειάς της  $p$  να είναι τουλάχιστον δύο, τουλάχιστον τρία, και τουλάχιστον τέσσερα, αντίστοιχα. Υπάρχει μέθοδος με  $p = 4$ ; Υπάρχει μέθοδος με  $p = 5$ ; Είναι οι

προκύπτουσες μέθοδοι ευσταθείς;

**4.15** Αποδείξτε ότι οι  $k$ -βηματικές μέθοδοι ανάδρομων διαφορών για  $k = 1, 2, 3, 4$  είναι ευσταθείς. (Είναι γνωστό ότι οι μέθοδοι αυτές είναι ευσταθείς, αν και μόνον αν  $1 \leq k \leq 6$ .) [Υπόδειξη: Έστω  $\rho_k$  το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της  $k$ -βηματικής μεθόδου. Τότε, όπως αναφέραμε στην παράγραφο 4.1,

$$\rho_k(\zeta) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} \zeta^{k-i} (\zeta - 1)^i.$$

Βεβαιωθείτε ότι

$$\rho_3(\zeta) = \frac{1}{6}(\zeta - 1)r_2(\zeta), \quad \rho_4(\zeta) = \frac{1}{12}(\zeta - 1)r_3(\zeta),$$

με  $r_2(\zeta) = 11\zeta^2 - 7\zeta + 2$  και  $r_3(\zeta) = 25\zeta^3 - 23\zeta^2 + 13\zeta - 3$ . Προσδιορίστε τις ρίζες του  $r_2$ . Προφανώς  $r_3(1) \neq 0$ . Χρησιμοποιήστε είτε τη θεωρία του Schur είτε το κριτήριο των Routh–Hurwitz για να διαπιστώσετε ότι το  $r_3$  είναι απλό πολυώνυμο von Neumann.]

**4.16** Είναι η τριβηματική μέθοδος που περιγράφεται από τις σταθερές

$$\alpha_3 = 1, \alpha_2 = -\frac{11}{6}, \alpha_1 = 1, \alpha_0 = -\frac{1}{6}, \beta_3 = \frac{1}{12}, \beta_2 = \frac{1}{6}, \beta_1 = -\frac{1}{2}, \beta_0 = \frac{7}{12}$$

ευσταθής και γιατί;

**4.17** Είναι η τριβηματική μέθοδος της Άσκησης 4.16 συνεπής και γιατί;

**4.22** Θεωρούμε μια  $k$ -βηματική μέθοδο, που περιγράφεται από τις σταθερές  $\alpha_k, \dots, \alpha_0$  και  $\beta_k, \dots, \beta_0$ . Αν η μέθοδος είναι ευσταθής και συνεπής, αποδείξτε ότι

$$\beta_k + \dots + \beta_0 \neq 0.$$

**4.23** Θεωρούμε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών, για το οποίο υποθέτουμε ότι η  $f$  είναι συνεχής και ικανοποιεί τη συνθήκη (2.49). Αποδείξτε ότι οι προσεγγίσεις με τη διβηματική μέθοδο ανάδρομων διαφορών, για δεδομένα  $y^0$  και  $y^1$ , είναι καλά ορισμένες, για οποιοδήποτε βήμα  $h$ .

**4.24** Προσδιορίστε τις τιμές της παραμέτρου  $\alpha$ , για τις οποίες η τριβηματική μέθοδος

$$y^{n+3} - (\alpha + 1)^2 y^{n+2} + \alpha(\alpha^2 + 2\alpha + 2)y^{n+1} - \alpha^2(\alpha + 1)y^n = hf(t^{n+3}, y^{n+3})$$

είναι ευσταθής.

**4.25** Διακριτοποιούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών (4.15) με μια πολυβηματική μέθοδο τάξης  $p$ . Αν η λύση  $y$  αυτού του προβλήματος είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ  $p$ , αποδείξτε ότι

το σφάλμα συνέπειας  $L_h y$  μηδενίζεται. Ιδιαίτερα, αν οι αρχικές τιμές, που χρησιμοποιούμε στη μέθοδο, είναι ακριβείς, αποδείξτε ότι η μέθοδος ολοκληρώνει το πρόβλημα ακριβώς, δηλαδή δίνει ως προσεγγίσεις στους κόμβους τις ακριβείς τιμές. [Συγκρίνετε με το αντίστοιχο αποτέλεσμα για μεθόδους Runge–Kutta· βλ. την Άσκηση 3.45.]

**4.30** (Συνδυασμός πεπλεγμένης και άμεσης μεθόδου του Euler.) Γράφουμε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών στη μορφή

$$(\star) \quad \begin{cases} y' = f(t, y) + g(t, y), & a \leq t \leq b, \\ y(a) = y_0, \end{cases}$$

θεωρούμε δηλαδή μια διάσπαση του δεξιού μέλους της Δ.Ε. σε δύο μέρη. Με τους συνηθισμένους συμβολισμούς, θεωρούμε την εξής μέθοδο για το πρόβλημα  $(\star)$

$$(\star\star) \quad y^{n+1} = y^n + hf(t^{n+1}, y^{n+1}) + hg(t^n, y^n), \quad n = 0, \dots, N - 1,$$

όπου  $y^0 := y_0$ . Προφανώς, η μέθοδος  $(\star\star)$  προκύπτει με συνδυασμό της πεπλεγμένης και της άμεσης μεθόδου του Euler, και ανάγεται σε αυτές, όταν  $g = 0$  και  $f = 0$ , αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι η τάξη ακρίβειας της νέας μεθόδου είναι ένα, όση και η τάξη των μεθόδων από τις οποίες προκύπτει. Υποθέτουμε τώρα ότι η  $f$  ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz (2.49) και η  $g$  τη συνθήκη του Lipschitz (1.6) με σταθερά  $L$ . Αποδείξτε ευστάθεια, με σταθερά ανεξάρτητη της  $f$ , και σύγκλιση της μεθόδου.

[Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τη Δ.Ε. για να πεισθείτε ότι

$$\begin{aligned} y(t^{n+1}) - y(t^n) - hf(t^{n+1}, y(t^{n+1})) - hg(t^n, y(t^n)) \\ = y(t^{n+1}) - y(t^n) - hy'(t^{n+1}) + h[G(t^{n+1}) - G(t^n)] \end{aligned}$$

με  $G(t) := g(t, y(t))$ .]

[Σχόλιο: Σε ορισμένες περιπτώσεις, που οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  συμπεριφέρονται διαφορετικά, η μέθοδος  $(\star\star)$  μπορεί να παρουσιάζει τα πλεονεκτήματα των μεθόδων από τις οποίες προκύπτει, χωρίς να κληρονομεί τα μειονεκτήματά τους. Φερ' ειπείν, αν χρησιμοποιήσουμε μόνο την άμεση μέθοδο του Euler, η σταθερά στην ευστάθεια (και στην εκτίμηση του σφάλματος) εξαρτάται αναγκαστικά και από την  $f$ . Αν εξ άλλου η  $f$  είναι, παραδείγματος χάριν, γραμμική, ο υπολογισμός της προσέγγισης  $y^{n+1}$  στην  $(\star\star)$  είναι πολύ εύκολος, ενώ αν χρησιμοποιήσουμε μόνο την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler και η  $g$  είναι μη γραμμική, τότε απαιτείται η επίλυση μίας μη γραμμικής εξίσωσης σε κάθε βήμα.]

**4.31** (Συνδυασμοί πεπλεγμένων και άμεσων πολυβηματικών μεθόδων.) Θεωρούμε δύο  $k$ -βηματικές μεθόδους, μία πεπλεγμένη και μία άμεση, που περιγράφονται από σταθερές  $\alpha_0, \dots, \alpha_k, \beta_0, \dots, \beta_k$  και  $\alpha_0, \dots, \alpha_k, \gamma_0, \dots, \gamma_{k-1}$ , αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι αυτές οι μέθοδοι έχουν

την ίδια τάξη ακρίβειας  $p$ . Συνδυάζοντας τις δύο μεθόδους διακριτοποιούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών της Άσκησης 4.29 με τη μέθοδο

$$(\star) \quad \sum_{j=0}^k \alpha_j y^{n+j} = h \sum_{j=0}^k \beta_j f(t^{n+j}, y^{n+j}) + h \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j g(t^{n+j}, y^{n+j}),$$

$n = 0, \dots, N - 1$ , με δεδομένες αρχικές προσεγγίσεις  $y^0, \dots, y^{k-1}$ . Αν η πεπλεγμένη μέθοδος έχει καλές ιδιότητες ευστάθειας, μέθοδοι της ανωτέρω μορφής παρουσιάζουν πλεονεκτήματα αντίστοιχα όσων αναφέρθηκαν στην Άσκηση 4.29. Αποδείξτε ότι η τάξη ακρίβειας της μεθόδου  $(\star)$  είναι  $p$ .

[Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τη Δ.Ε. για να βεβαιωθείτε ότι

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^k \alpha_j y(t^{n+j}) - h \sum_{j=0}^k \beta_j f(t^{n+j}, y(t^{n+j})) - h \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j g(t^{n+j}, y(t^{n+j})) \\ &= \sum_{j=0}^k [\alpha_j y(t^{n+j}) - h \beta_j y'(t^{n+j})] + h \left[ \sum_{j=0}^k \beta_j G(t^{n+j}) - \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j G(t^{n+j}) \right], \end{aligned}$$

με  $G(t) := g(t, y(t))$ . Ο πρώτος όρος στο δεξιό μέλος είναι τάξης  $h^{p+1}$ , αφού η τάξη της πεπλεγμένης μεθόδου είναι  $p$ . Για να βεβαιωθείτε ότι και ο δεύτερος όρος είναι της ίδιας τάξης, αναπτύξτε κατά Taylor ως προς το σημείο  $t^n$  και χρησιμοποιήστε τις σχέσεις μεταξύ των συντελεστών  $\beta_j$ ,  $\alpha_j$  και  $\gamma_j$ ,  $\alpha_j$ , που καθορίζουν την τάξη ακρίβειας των αρχικών μεθόδων.]

**4.32** (Συνδυασμοί πεπλεγμένων και άμεσων μεθόδων ανάδρομων διαφορών.) Έστω  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\beta_0 = \dots = \beta_{k-1} = 0$ ,  $\beta_k = 1$ , και  $\alpha_j$ ,  $j = 0, \dots, k$ , οι συντελεστές του  $\zeta^j$  στο πολυώνυμο  $\alpha$ ,

$$\alpha(\zeta) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} \zeta^{k-i} (\zeta - 1)^i.$$

Όπως αναφέραμε ήδη στην παράγραφο 4.1, αυτές οι σταθερές περιγράφουν την  $k$ -βηματική μέθοδο ανάδρομων διαφορών. Θεωρούμε τώρα και το πολυώνυμο  $\gamma$ ,  $\gamma(\zeta) = \zeta^k - (\zeta - 1)^k$ , βαθμού  $k - 1$ , και συμβολίζουμε με  $\gamma_j$ ,  $j = 0, \dots, k - 1$ , τους συντελεστές του  $\zeta^j$  αυτού του πολυωνύμου. Αποδείξτε ότι η τάξη ακρίβειας της άμεσης  $k$ -βηματικής μεθόδου που περιγράφεται από τις σταθερές  $\alpha_0, \dots, \alpha_k$ ,  $\gamma_0, \dots, \gamma_{k-1}$  είναι  $k$ . (Μπορεί να αποδειχθεί ότι για καμμία άλλη επιλογή σταθερών  $\gamma_0, \dots, \gamma_{k-1}$  δεν επιτυγχάνουμε τάξη ακρίβειας μεγαλύτερη ή ίση του  $k$ · βλ. και την Άσκηση 4.27.)