

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟΙ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΓΙΑ ΘΕΜΑΤΑ ΙΣΟΡΡΟΠΙΩΝ NASH ΣΕ ΠΑΙΓΝΙΑ ΔΙΠΙΝΑΚΑ

Η
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΕΞΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ

Υποβάλλεται στην

ορισθείσα από την Γενική Συνέλευση Ειδικής Σύνθεσης
του Τμήματος Πληροφορικής
Εξεταστική Επιτροπή

από τον

Δανιήλ-Δημήτριο Πρόσκο

ως μέρος των Υποχρεώσεων

για τη λήψη

του

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥ ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΣ ΣΤΗΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ
ΜΕ ΕΞΕΙΔΙΚΕΥΣΗ ΣΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Φεβρουάριος 2016

ΑΦΙΕΡΩΣΗ

Στην οικογένειά μου

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Λίγες μέρες πριν το τέλος των μεταπτυχιακών σπουδών μου, νιώθω το χρέος να ευχαριστήσω όλους όσους με βοήθησαν, ο καθένας με τον δικό του τρόπο, στην επιτυχή περάτωσή τους.

Ευχαριστώ τον κύριο Σπύρο Κοντογιάννη, επιβλέποντα καθηγητή μου, για τις συμβουλές του, τον χρόνο που αφιέρωσε στη συνεργασία μας, ανάμεσα στις πολλές υποχρεώσεις του, και, κυρίως, την υπομονή του. Η καθοδήγησή του υπήρξε καθοριστικός παράγοντας για την ολοκλήρωση της μεταπτυχιακής μου εργασίας. Ακόμα περισσότερο, τον ευχαριστώ για την ευκαιρία που μου έδωσε να ασχοληθώ μ' ένα από τα πιο ενδιαφέροντα θέματα της σύγχρονης Θεωρητικής Πληροφορικής, την Αλγοριθμική Θεωρία Παιγνίων. Ακόμη, ευχαριστώ τους κυρίους Σταύρο Νικολόπουλο και Λεωνίδα Παληό, καθηγητές του Τμήματος Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής, για τη συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή εξέτασης της μεταπτυχιακής μου εργασίας.

Ίσως κάποια μέρα, μετά από αρκετά χρόνια, ξεχάσω αρκετές από τις πολύτιμες γνώσεις που απέκτησα κατά τη διάρκεια των σπουδών μου, δεν πρόκειται όμως να ξεχάσω τους ανθρώπους που γνώρισα κατά τη διάρκειά τους και έκαναν όμορφη και δημιουργική - όσο γινόταν - αυτή την περίοδο της ζωής μου. Ξέρετε ποιοι και ποιές είστε και σας ευχαριστώ για τις όμορφες εμπειρίες. Στο μικρό χώρο που έχω διαθέσιμο για την απονομή ευχαριστιών, θα ξεχωρίσω τους φίλους και συναδέλφους Γιούλη, Σήφη και Νάσο, με τους οποίους μοιράστηκα το ίδιο γραφείο (ή, έστω, όροφο) και αρκετά ευχάριστα διαλείμματα από τη δουλειά.

Τέλος, ευχαριστώ τους γονείς μου για την υλική, ψυχολογική και ηθική τους υποστήριξη, χωρίς την οποία θα μου ήταν πολύ δύσκολο να πετύχω την ολοκλήρωση των σπουδών μου, και, ακόμη περισσότερο, για την αγάπη και την υπομονή τους.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

	Σελ
ΑΦΙΕΡΩΣΗ	ii
ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ	iii
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ	v
ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΠΙΝΑΚΩΝ	vii
ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΣΧΗΜΑΤΩΝ	viii
ΠΕΡΙΛΗΨΗ	ix
EXTENDED ABSTRACT IN ENGLISH	xii
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ	1
1.1 Θεωρία Παιγνίων	1
1.2. Προσδιορισμός του Προβλήματος Εύρεσης Ισορροπίας Nash	3
1.3. Πρόοδος της Πορείας Επίλυσης του Προβλήματος Εύρεσης Ισορροπίας Nash	4
1.4. Στόχοι της Διατριβής	9
1.5. Δομή της Διατριβής	11
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑΣ	14
2.1 Στρατηγικά Παίγνια Διπίνακα	14
2.2 Σκεπτικά Λύσης της Θεωρίας Παιγνίων	16
2.2.1 Ισορροπία Nash	17
2.2.2 Προσεγγιστική Ισορροπία Nash	20
2.2.3 Συσχετισμένη Ισορροπία	21
2.2.4 Πολυπλοκότητα του Προβλήματος Εύρεσης Ισορροπιών Nash	22
2.2.5 Πολυπλοκότητα του Προβλήματος Εύρεσης Συσχετισμένων Ισορροπιών	23
2.3 Επισκόπηση Πολυωνυμικά Επιλύσιμων Υποκατηγοριών Παιγνίων Διπίνακα	23
2.3.1 Παίγνια Σταθερής Βαθμίδας	23
2.3.2 Αμοιβαία Κοίλα Παίγνια	24
2.3.3 Παίγνια με Θετικά Ημιορισμένο Άθροισμα Πινάκων Ωφελειών	26
2.4 Μέτρα Πολυπλοκότητας Πίνακα	28
2.4.1 Βαθμίδα και Προσεγγιστική Βαθμίδα Πίνακα	30
2.4.2 Νόρμα γ_2 Πίνακα	31
2.5 Θέματα Θεωρίας Βελτιστοποίησης	33
2.5.1 Τετραγωνικός Προγραμματισμός και ε -nets	34
2.5.2 Θετικά Ημιορισμένος Προγραμματισμός	36
2.5.3 Πολυπλοκότητα χρόνου εύρεσης ολικού ελαχιστοποιητή ενός κυρτού προγράμματος	37
2.6 Θέματα Κυρτής Γεωμετρίας και Δικτυωτών	37

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ NASH ΠΑΙΓΝΙΩΝ ΔΙΠΙΝΑΚΑ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ϵ -NETS	41
3.1 Η Νόρμα γ_2 Πίνακα ως Ημιορισμένο Πρόγραμμα	41
3.2 Προσεγγιστικός Αλγόριθμος Εύρεσης της Προσεγγιστικής Βαθμίδας Πίνακα	42
3.3 Αποτελεσματική Κατασκευή Σχεδόν Βέλτιστων ϵ -nets	44
3.4 Πολυωνυμικού Χρόνου Προσεγγιστικό Σχήμα Εύρεσης Ισορροπιών Nash για Παίγνια Λογαριθμικής Προσεγγιστικής Βαθμίδας	48
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ NASH ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΠΟΙΗΜΕΝΩΝ ΠΑΙΓΝΙΩΝ ΔΙΠΙΝΑΚΑ	51
4.1 Παραμετροποιημένα Παίγνια Διπίνακα	51
4.2 Διεύρυνση της Κλάσης Παιγνίων Διπίνακα με Σταθερή Προσεγγιστική Νόρμα γ_2 του Αθροίσματος των Πινάκων Ωφελειών τους	52
4.3 Πειραματική Διερεύνηση	57
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5. ΕΠΙΛΟΓΟΣ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	64
5.1 Μελλοντικές Επεκτάσεις	65
ΑΝΑΦΟΡΕΣ	67
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	72
ΣΥΝΤΟΜΟ ΒΙΟΓΡΑΦΙΚΟ	75

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΠΙΝΑΚΩΝ

Πίνακας	Σελ
Πίνακας 2.1 Το παίγνιο διπίνακα Matching Pennies	17
Πίνακας 2.2: Το παίγνιο διπίνακα «Bach ή Stravinsky».	18
Πίνακας 2.3: Ο αλγόριθμος των Alon et al για την εύρεση ε-ισορροπιών Nash σε παίγνια που το άθροισμα των πινάκων ωφελειών τους είναι θετικά ημιορισμένος πίνακας.	29
Πίνακας 3.1 Ο τροποποιημένος τυχαιοκρατικός αλγόριθμος των Lee και Shraibman.	45
Πίνακας 3.2 Ο αλγόριθμος των Alon et al για τον υπολογισμό ε-ισορροπιών Nash.	49
Πίνακας Π.1 Ο αλγόριθμος των Dadush και Vempala για τον υπολογισμό ενός M-ελλειψοειδούς.	73
Πίνακας Π.2 Ο αλγόριθμος των Alon et al για τον υπολογισμό της βάσης ενός δικτυωτού του Rogers.	74

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Σχήμα	Σελ
Σχήμα 1.1 Διάγραμμα σχέσεων εγκλεισμού μεταξύ υποκατηγοριών παιγνίων με "εύκολα" στιγμιότυπα και κλάσεων χρονικής πολυπλοκότητας.	9
Σχήμα 4.1: Γραφικές παραστάσεις πειραμάτων πάνω σε παίγνια νίκης-ήττας με παραμέτρους $n=50$ και $k=30$	60

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Δανιήλ-Δημήτριος Πρόσκος του Παντελή και της Ιωάννας. MSc, Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Φεβρουάριος, 2016. Τίτλος Διατριβής: Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι για Θέματα Ισορροπιών Nash σε Παίγνια Διπίνακα Επιβλέπων: Σπύρος Κοντογιάννης.

Κατά τη μελέτη ενός συστήματος εγωιστικών οντοτήτων που αλληλεπιδρούν για τη λήψη μιας απόφασης υπό το πρίσμα της θεωρίας παιγνίων, μας ενδιαφέρει να προσδιορίσουμε ένα σημείο ισορροπίας του, το οποίο ορίζουμε μέσω ενός σκεπτικού λύσης. Το δημοφιλέστερο σκεπτικό λύσης στη θεωρία παιγνίων είναι η *ισορροπία Nash*, η οποία εκφράζει μια σταθερή κατάσταση του συστήματος όπου καμία οντότητα δεν μπορεί να επωφεληθεί από την επιλογή ενός διαφορετικού πλάνου ενεργειών, δεδομένου ότι οι υπόλοιπες οντότητες δεν αποκλίνουν από τις δικές τους επιλογές ενεργειών. Η ανάγκη της προσομοίωσης συστημάτων εγωιστικών οντοτήτων οδήγησε στη μελέτη της υπολογιστικής πολυπλοκότητας του προβλήματος υπολογισμού ισορροπιών Nash σε πεπερασμένα στρατηγικά παίγνια. Μια σειρά αποτελεσμάτων *PPAD-πληρότητας* του προβλήματος εύρεσης μιας ισορροπίας Nash κατέδειξε τη δυσκολία αυτού του προβλήματος, *ακόμη και στην απλή περίπτωση των παιγνίων διπίνακα*. Για τον λόγο αυτόν, η έρευνα στράφηκε τα τελευταία χρόνια προς την κατεύθυνση της ανάπτυξης αλγορίθμων για τον υπολογισμό προσεγγιστικών ισορροπιών Nash, αλλά και στον εντοπισμό υποκλάσεων παιγνίων για τα οποία υπάρχουν πολυωνυμικού χρόνου επακριβείς αλγόριθμοι, ή τουλάχιστον σχήματα προσέγγισης, για τον υπολογισμό ισορροπιών Nash.

Στην παρούσα εργασία μελετάται το πρόβλημα διεύρυνσης της υποκλάσης των παιγνίων διπίνακα που επιδέχονται ένα πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικό σχήμα

για τον υπολογισμό μιας ισορροπίας Nash. Η πρότασή μας για την επέκταση της κλάσης παιγνίων διπίνακα που επιδέχονται ένα τυχαιοκρατικό πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικό σχήμα για τον υπολογισμό μιας ε -ισορροπίας Nash βασίζεται στη θεώρηση ενός κυρτού συνδυασμού των μεταμελειών των δύο παικτών ως αντικειμενική συνάρτηση ενός προγράμματος βελτιστοποίησης, για κάποια παράμετρο $\lambda \in (0,1)$. Αρχικά παρουσιάζουμε ένα τυχαιοκρατικό πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικό σχήμα για τον υπολογισμό ε -ισορροπιών Nash παιγνίων διπίνακα των οποίων το άθροισμα των πινάκων ωφελειών έχει σταθερή τιμή στη $\gamma_2^{\varepsilon/4}$ -νόρμα. Στη συνέχεια, αποδεικνύουμε ότι αν για ένα παίγνιο διπίνακα (R, C) υπάρχει μια τιμή $\lambda^* \in (0,1)$ μακριά από τα άκρα του διαστήματος για την οποία ο πίνακας $Z(\lambda^*) := \lambda^*R + (1 - \lambda^*)C$ έχει σταθερή νόρμα $\gamma_2^{\varepsilon/4}$, είναι εφικτός ο υπολογισμός σε πολυωνυμικό χρόνο μιας ε -ισορροπίας Nash χρησιμοποιώντας ένα $\frac{\varepsilon \min\{\lambda^*, 1-\lambda^*\}}{2}$ -net, το οποίο κατασκευάζουμε με χρήση του αλγορίθμου των Alon et al (2013), με μεγάλη πιθανότητα. Επίσης, αποδεικνύουμε ότι είναι εφικτή η εξέταση σε πολυωνυμικό χρόνο αν υπάρχει ένα $\lambda^* \in (0,1)$ για το οποίο ισχύει ότι $\gamma_2^{\varepsilon/4}(Z(\lambda^*)) = O(1)$, μέσω της επίλυσης ενός θετικά ημιορισμένου προγράμματος.

Τέλος, διεξάγουμε εκτενή πειραματική αξιολόγηση με στόχο τον προσδιορισμό της γενικότητας και της σημαντικότητας της υποκλάσης παιγνίων διπίνακα που προτείνουμε, εστιάζοντας κυρίως σε παίγνια διπίνακα νίκης-ήττας.

EXTENDED ABSTRACT IN ENGLISH

Daniel Demetrios Proskos. MSc, Department of Computer Science and Engineering, University of Ioannina, Greece. February, 2016. Title of Dissertation: Approximation Algorithms for Nash Equilibria in Bimatrix Games, Thesis Supervisor: Spyros Kontogiannis.

When we study a system of selfish agents that interact during a decision making process under the lens of game theory, our main issue is to identify an equilibrium point of this system. We define such a point by a solution concept. The most popular game-theoretic solution concept is the Nash Equilibrium. A Nash Equilibrium reflects a steady state of the system, in which no single entity can benefit from a unilateral change of its plan of actions. The demand of simulating systems of interacting selfish agents led to the study of the computational complexity of computing a Nash Equilibrium of a finite game (as Nash, in 1951, proved that each finite game has at least one Nash Equilibrium). Unfortunately, a series of PPAD-Hardness results for this problem demonstrated the hardness of computing a Nash Equilibrium even for the simple case of bimatrix games (i.e., strategic games of two players). Thus, the current research on Nash Equilibria computation has inevitably turned to the directions of designing constant approximation algorithms (or even a polynomial time approximation scheme) for computing approximate Nash Equilibria of general bimatrix games, as well as identifying subclasses of bimatrix games that admit a polynomial time algorithm, or at least a (fully) polynomial time approximation scheme for this problem.

In this thesis, we study the problem of expanding the subclass of bimatrix games that admit a polynomial time approximation scheme for the problem of computing a Nash Equilibrium. To this direction, we propose a way of identifying bimatrix games that

admit a randomized polynomial time approximation scheme in polynomial time, based on a definition of a convex combination of players' regrets as the objective function of an optimization problem, for a parameter $\lambda \in (0,1)$. At first, we present a randomized polynomial time approximation scheme for ε -Nash Equilibrium computation of a bimatrix game, the sum of payoff matrices of which has constant value in its $\gamma_2^{\varepsilon/4}$ norm. Its building blocks are a modification of the approximation algorithm for the problem of computing the approximate rank of a matrix, designed by Lee and Shraibman (2008), along with the near-optimal ε -net construction algorithm of Alon et al (2013). Since the computation of the $\gamma_2^{\varepsilon/4}$ norm of a matrix can be done by solving a semidefinite program, we are able to identify if a given bimatrix game admits this randomized polynomial time approximation scheme in polynomial time. Next, we prove that if, for a given bimatrix game (R, C) , there is a value $\lambda^* \in (0,1)$, bounded away from the boundaries of this interval, for which the matrix $Z(\lambda^*) := \lambda^*R + (1 - \lambda^*)C$ has constant $\gamma_2^{\varepsilon/4}$ norm, then we can compute a ε -Nash Equilibrium for this bimatrix game using a $\frac{\varepsilon \min\{\lambda^*, 1-\lambda^*\}}{2}$ -net that we obtain by the algorithm of near-optimal ε -net construction of Alon et al (2013), with high probability. Furthermore, we prove that it is feasible to identify in polynomial time if there is a value $\lambda^* \in (0,1)$ for which it holds that $\gamma_2^{\varepsilon/4}(Z(\lambda^*)) = O(1)$, by solving a semidefinite program, thus proving the feasibility of polynomial-time identification of the bimatrix games that belong to the proposed subclass. An additional important contribution that we made is our proofs that the constant-sum bimatrix games and the fixed-rank bimatrix games are contained to the subclass of games that their sum of payoff matrices has constant value in its $\gamma_2^{\varepsilon/4}$ norm.

Finally, in order to determine the generality and importance of the subclass of bimatrix games that we propose, we conducted an extensive experimental evaluation as a first step to this direction. We conducted our experiments on win-lose games.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Θεωρία Παιγνίων

1.2 Προσδιορισμός του Προβλήματος Εύρεσης Ισορροπίας Nash

1.3 Πρόοδος της Πορείας Επίλυσης του Προβλήματος Εύρεσης Ισορροπίας Nash

1.4 Στόχοι της Διατριβής

1.5 Δομή της Διατριβής

1.1 Θεωρία Παιγνίων

Ο επιστημονικός κλάδος της *θεωρίας παιγνίων*, ο οποίος θεμελιώθηκε από τους John Von Neumann και Oscar Morgenstern με τη δημοσίευση του συγγράμματός τους «Theory of Games and Economic Behavior» το 1947 [57], έχει σαν αντικείμενο τη μαθηματική μοντελοποίηση και ανάλυση των διεργασιών διαδραστικής λήψης αποφάσεων. Στις διεργασίες αυτές, κάθε μια από τις συμμετέχουσες οντότητες έχει κάποιους προσωπικούς στόχους και καλείται να εκτελέσει κάποια ενέργεια ή σειρά ενεργειών για την επίτευξη αυτών των στόχων. Ωστόσο, η πραγμάτωση των στόχων του κάθε παίκτη δεν εξαρτάται μόνο από την δική του ενέργεια, αλλά και από τις ενέργειες των υπόλοιπων παικτών. Η εγγύτητα ενός παίκτη προς την επίτευξη των στόχων του μπορεί να προσδιοριστεί ποσοτικά με ένα μέτρο ωφέλειας του παίκτη ως προς την ενέργεια που επέλεξε να εκτελέσει.

Ονομάζουμε τις παραπάνω διεργασίες *παίγνια*. Ένα παίγνιο ορίζεται από

- το σύνολο των συμμετεχουσών οντοτήτων, δηλαδή των *παικτών*,
- το σύνολο των *ενεργειών* του κάθε παίκτη, και
- τις *τιμές ωφέλειας* που έχει ο παίκτης για κάθε συνδυασμό ενεργειών που μπορεί να γίνει από όλους τους παίκτες.

Γενικά, ο κάθε παίκτης δεν επιλέγει μια μόνο ενέργεια από το σύνολο ενεργειών του, αλλά μπορεί να εκφράσει την προτίμηση του σε κάθε διαθέσιμη ενέργεια του με το να αναθέσει μια κατανομή πιθανότητας στο σύνολο ενεργειών του. Ονομάζουμε μια τέτοια κατανομή πιθανότητας στρατηγική. Η διατεταγμένη πλειάδα των στρατηγικών που επέλεξαν όλοι οι παίκτες ενός παιγνίου σε μια δεδομένη στιγμή ονομάζεται περίγραμμα στρατηγικών. Συνήθως, δεν ενδιαφερόμαστε για το σύνολο όλων των δυνατών περιγραμμάτων στρατηγικών, παρά μόνο γι' αυτά που ικανοποιούν ένα σκεπτικό λύσης που έχει επιλεγεί για τη μελέτη του παιγνίου. Ως σκεπτικό λύσης ορίζουμε ένα σύνολο κανόνων που καθορίζουν αν ένα περίγραμμα στρατηγικών αποτελεί σημείο ισορροπίας ενός παιγνίου, στο οποίο η μονομερής αλλαγή στρατηγικής δεν αποφέρει κέρδος στον παίκτη που την πράττει. Η γνώση των περιγραμμάτων στρατηγικών, για ένα δεδομένο παίγνιο, που ικανοποιούν ένα επιλεγμένο σκεπτικό λύσης, μας επιτρέπει να κάνουμε μια πρόβλεψη του πώς οι παίκτες θα παίξουν στο παίγνιο.

Μπορούμε εύκολα να παραλληλίσουμε την παραπάνω γενική περιγραφή ενός παιγνίου με πολλά πρακτικά προβλήματα των οικονομικών, πολιτικών, βιολογικών, θετικών και τεχνολογικών επιστημών. Συνεπώς, η θεωρία παιγνίων μας παρέχει τα απαραίτητα εργαλεία για τη μαθηματική μοντελοποίηση και μελέτη κάθε είδους προβλήματος ανταγωνισμού ή συνεργασίας μεταξύ οντοτήτων για την επίτευξη των στόχων τους.

Σε πολλές πρακτικές καταστάσεις, η μοντελοποίηση μιας κατάστασης ανταγωνισμού ή συνεργασίας μεταξύ οντοτήτων δεν αρκεί. Ζητάμε μια καλώς ορισμένη ακολουθία πεπερασμένων βημάτων, δηλαδή έναν αλγόριθμο, ο οποίος, με είσοδο τα δεδομένα που ορίζουν ένα παίγνιο, επιστρέφει ένα σημείο ισορροπίας του. Ο σχεδιασμός και η ανάλυση αλγορίθμων υπολογισμού σημείων ισορροπίας παιγνίων είναι ένα απ' τα βασικότερα αντικείμενα που ορίζουν ένα ερευνητικό πεδίο στην τομή του σχεδιασμού και ανάλυσης αλγορίθμων, της υπολογιστικής πολυπλοκότητας και της θεωρίας παιγνίων, την *αλγοριθμική θεωρία παιγνίων*. Η αλγοριθμική θεωρία παιγνίων ορίστηκε σχετικά πρόσφατα, το 1999, με την εξέχουσα σημασίας εργασία των Nisan και Ronen [45] πάνω στο πρόβλημα του αλγοριθμικού σχεδιασμού μηχανισμών.

1.2. Προσδιορισμός του Προβλήματος Εύρεσης Ισορροπίας Nash

Όπως αναφέραμε στην προηγούμενη ενότητα, σε ένα παίγνιο ζητείται ένα σημείο ισορροπίας σαν λύση. Το σημαντικότερο τέτοιο σκεπτικό λύσης είναι αυτή της ισορροπίας Nash. Μια *ισορροπία Nash* ενός παιγνίου εκφράζει μια σταθερή κατάσταση του, στην οποία ο κάθε παίκτης που έχει επιλέξει την στρατηγική του δεν μπορεί να αυξήσει περισσότερο την ωφέλειά του αλλάζοντας στρατηγική, δεδομένου του ότι οι υπόλοιποι παίκτες κρατούν σταθερές τις στρατηγικές τους. Με άλλα λόγια, μια ισορροπία Nash είναι ένα περίγραμμα στρατηγικών που ικανοποιεί αυτή την συνθήκη. Ο Nash, ο οποίος πρότεινε αυτό το σκεπτικό λύσης, απέδειξε ότι υπάρχει μια τέτοια ισορροπία για κάθε παίγνιο με πεπερασμένο πλήθος παικτών και πεπερασμένο πλήθος ενεργειών ανά παίκτη, δίνοντας όμως μια μη-κατασκευαστική απόδειξη [43]. Το αποτέλεσμα αυτό οδήγησε τους ερευνητές στην ανάπτυξη αλγορίθμων εύρεσης αυτής της ισορροπίας σαν λύση ενός δεδομένου παιγνίου. Το 1928, ο Von Neumann απέδειξε ότι η λύση (σαν σημείο ισορροπίας) ενός παιγνίου δύο παικτών μηδενικού αθροίσματος μπορεί να βρεθεί λύνοντας ένα ισοδύναμο γραμμικό πρόγραμμα, όμως τότε το γεγονός ότι ένα γραμμικό πρόγραμμα μπορεί να λυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο ήταν ακόμη άγνωστο. Το 1964, οι Lemke και Howson δημοσίευσαν έναν δημοφιλή αλγόριθμο εύρεσης ισορροπίας Nash για παίγνια δύο παικτών μη-μηδενικού αθροίσματος [36]. Το 1968, οι Mangasarian και Stone απέδειξαν την ισοδυναμία του προβλήματος εύρεσης ισορροπίας Nash σ' ένα παίγνιο διπίνακα μη-μηδενικού αθροίσματος με το πρόβλημα εύρεσης ολικού ελαχίστου ενός τετραγωνικού προγράμματος [40]. Τότε, δεν είχαν δημοσιευτεί αποτελέσματα υπολογιστικής πολυπλοκότητας για τις παραπάνω μεθόδους – όπως και για άλλες μεθόδους που προτάθηκαν για την εύρεση ισορροπιών Nash σε παίγνια δύο παικτών, ενώ τα αποτελέσματα υπολογιστικής πολυπλοκότητας για τον γραμμικό και τον τετραγωνικό προγραμματισμό ήταν ακόμη άγνωστα.

Μετά από 5 δεκαετίες που ακολούθησαν τη δημοσίευση του αλγορίθμου των Lemke και Howson, το πρόβλημα της εύρεσης μιας ισορροπίας Nash ενός παιγνίου αποδείχτηκε πως είναι ένα υπολογιστικά δύσκολο πρόβλημα (βλ. ενότητα 1.3), ακόμη και στην περίπτωση που στο παίγνιο συμμετέχουν μόνο δύο παίκτες, εκτός από λίγες υποκατηγορίες του, όπως αυτή των παιγνίων δύο παικτών μηδενικού αθροίσματος. Ωστόσο, μπορούμε να υπολογίσουμε ένα περίγραμμα στρατηγικών που είναι προσεγγιστική ισορροπία Nash του παιγνίου, «χαλαρώνοντας» την συνθήκη βάσει

της οποίας ένα περίγραμμα στρατηγικών είναι ισορροπία Nash. Με άλλα λόγια, καταφεύγουμε στην αναζήτηση *προσεγγιστικών λύσεων* του προβλήματος της εύρεσης ισορροπίας Nash ενός παιγνίου. Επίσης, η μεταγενέστερη του αποτελέσματος του Von Neumann δημοσίευση του πρώτου πολυωνυμικού χρόνου αλγορίθμου για την επίλυση γραμμικών προγραμμάτων από τον Khachiyan [28], η οποία συνεπάγεται τη δυνατότητα εύρεσης ισορροπιών Nash για τα παίγνια διπίνακα μηδενικού αθροίσματος σε πολυωνυμικό χρόνο, ώθησε τους ερευνητές στην προσπάθεια ανακάλυψης περισσότερων «εύκολων» στιγμιότυπων του προβλήματος. Για τους παραπάνω λόγους οι δύο ακόλουθες ερευνητικές κατευθύνσεις βρίσκονται στο επίκεντρο της τρέχουσας έρευνας στην αλγοριθμική θεωρία παιγνίων:

- Ανάπτυξη αλγορίθμων πολυωνυμικού χρόνου για την *προσέγγιση μιας ισορροπίας Nash* ενός δεδομένου παιγνίου.
- Αναζήτηση *υποκλάσεων* του γενικού προβλήματος εύρεσης ισορροπίας Nash, για τις οποίες ο υπολογισμός *επακριβών* ή *προσεγγιστικών ισορροπιών Nash* γίνεται σε πολυωνυμικό χρόνο.

1.3. Πρόοδος της Πορείας Επίλυσης του Προβλήματος Εύρεσης Ισορροπίας Nash

Τα πρώτα αποτελέσματα υπολογιστικής πολυπλοκότητας για το πρόβλημα εύρεσης ισορροπίας Nash ενός παιγνίου δημοσιεύτηκαν μόλις πριν από δύο δεκαετίες. Το 2004, οι Savani και Von Stengel απέδειξαν πως ο αλγόριθμος των Lemke και Howson έχει εκθετικής τάξης χρονική πολυπλοκότητα στη χειρίστη περίπτωση ως προς το πλήθος ενεργειών των δύο παικτών [50]. Νωρίτερα, το 1989, οι Gilboa και Zemel απέδειξαν ότι η εκδοχή του προβλήματος εύρεσης ισορροπίας Nash παιγνίου διπίνακα σαν πρόβλημα απόφασης είναι NP-δύσκολο πρόβλημα, κάνοντας αναγωγή στο γνωστό NP-πλήρες πρόβλημα της κλίκας γραφήματος [24]. Το 2006 οι Chen και Deng απέδειξαν ότι το πρόβλημα υπολογισμού ισορροπίας Nash για παίγνια δύο παικτών ανήκει στην κλάση πολυπλοκότητας PPAD [13], μια κλάση χρονικής πολυπλοκότητας που περιλαμβάνει τα προβλήματα υπολογισμού συνάρτησης με αντίστοιχα προβλήματα απόφασης στην κλάση NP, τα οποία χαρακτηρίζονται απ' το ότι κάθε στιγμιότυπό τους έχει μια τουλάχιστον λύση (σε αντίθεση με πολλά προβλήματα της κλάσης NP) και απ' το ότι ο χώρος λύσεων τους μπορεί να οριστεί ως το σύνολο των κόμβων με βαθμό εισόδου ίσο με μηδέν ή με βαθμό εισόδου ίσο με

μηδέν σ' ένα κατευθυνόμενο γράφημα με εκθετικό πλήθος κόμβων που μοντελοποιεί το χώρο καταστάσεων του προβλήματος [49]. Δεν είναι γνωστός κανένας αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου για την επίλυση οποιουδήποτε προβλήματος της κλάσης PPAD, οπότε η ένταξη ενός προβλήματος σε αυτή την κλάση χρονικής πολυπλοκότητας δίνει ένα πειστήριο της δυσκολίας επίλυσής του. Λόγω ενός αποτελέσματος ισοδυναμίας των παιγνίων νίκης-ήττας με τα γενικά παίγνια διπίνακα που είχε δημοσιευτεί το 2005 από τους Abbott et al [1], προέκυψε πως το ίδιο πρόβλημα είναι PPAD-πλήρες ακόμη και σ' αυτή την κλάση απλούστατων δομικά παιγνίων. Από την άλλη, οι Barany et al [9] δημοσίευσαν έναν τυχαιοκρατικό Las Vegas αλγόριθμο για τυχαία παίγνια διπίνακα των οποίων οι τιμές ωφέλειας των παικτών είναι ανεξάρτητες και πανομοιότυπα κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την τυπική κανονική κατανομή, ο οποίος επιστρέφει πάντα μια ισορροπία Nash και τερματίζει σε πολυωνυμικό χρόνο με μεγάλη πιθανότητα. Έκτοτε, η έρευνα επικεντρώθηκε στην αποτελεσματική εύρεση προσεγγιστικών ισορροπιών Nash για γενικά παίγνια διπίνακα, τις οποίες στο εξής θα καλούμε ϵ -ισορροπίες Nash. Το πρώτο σχετικό αποτέλεσμα δημοσιεύτηκε το 2003 από τους Lipton, Μαρκάκη και Mehta, οι οποίοι απέδειξαν ότι για $\epsilon > 0$ μπορούμε να υπολογίσουμε ϵ -ισορροπία Nash σε σχεδόν-πολυωνυμικό χρόνο $n^{O(\log n/\epsilon^2)}$, όπου n το πλήθος ενεργειών του κάθε παίκτη [39]. Ο αλγόριθμός τους εφαρμόζει εξαντλητική αναζήτηση σε περιγράμματα στρατηγικών μεγέθους το πολύ $O(\log n/\epsilon^2)$.

Σε μεταγενέστερη έρευνά τους οι Chen, Deng και Teng απέδειξαν ότι το πρόβλημα του υπολογισμού μιας προσεγγιστικής ισορροπίας Nash με $\epsilon = O(1/n^c)$, όπου n το πλήθος ενεργειών των παικτών και c μια σταθερά μεγαλύτερη του 1 ανήκει επίσης στην κλάση PPAD [14], καθιστώντας έτσι την ύπαρξη ενός πλήρως πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικού σχήματος για τον υπολογισμό ισορροπιών Nash παιγνίων διπίνακα ανέφικτη, εκτός αν αποδειχθεί ότι $P=PPAD$. Επισήμαναν, όμως, ότι το πρόβλημα του υπολογισμού ϵ -ισορροπίας Nash για οποιοδήποτε σταθερό ϵ δεν είναι πιθανό να είναι PPAD-πλήρες, καθώς κάτι τέτοιο θα σήμαινε πως όλα τα προβλήματα της κλάσης PPAD θα λύνονταν σε χρόνο $n^{O(\log n/\epsilon^2)}$ χρησιμοποιώντας

το αποτέλεσμα των Lipton, Μαρκάκη και Mehta κάτι που φαίνεται μάλλον απίθανο. Με κίνητρο αυτή την παρατήρηση, αναπτύχθηκαν και δημοσιεύτηκαν αλγόριθμοι υπολογισμού ϵ -ισορροπιών Nash σε πολυωνυμικό χρόνο για παίγνια δύο παικτών με σταθερό σφάλμα προσέγγισης ϵ . *Ο στόχος είναι η κατασκευή πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικών αλγορίθμων που επιστρέφουν ϵ -ισορροπίες Nash ενός δεδομένου παιγνίου για σταθερό ϵ , όσο το δυνατόν πιο κοντά στο μηδέν.*

Οι Κοντογιάννης, Παναγοπούλου και Σπυράκης το 2006 δημοσίευσαν έναν αλγόριθμο που επιστρέφει μια ϵ -ισορροπία Nash με $\epsilon = 0.75$ [29]. Ταυτόχρονα και ανεξάρτητα, οι Δασκαλάκης, Mehta και Παπαδημητρίου δημοσίευσαν έναν αλγόριθμο που επιστρέφει μια ϵ -ισορροπία Nash με $\epsilon = 0.5$ [19]. Αυτοί οι δύο αλγόριθμοι επιστρέφουν κάποιο περίγραμμα στρατηγικών με στήριγμα μεγέθους 2. Το 2007, οι Feder et al δημοσίευσαν ένα αποτέλεσμα που αποκλείει το ενδεχόμενο ύπαρξης ενός αλγορίθμου που να επιστρέφει ένα περίγραμμα στρατηγικών που να είναι ϵ -ισορροπία Nash με $\epsilon < 0.5$ και να έχει στήριγμα μεγέθους το πολύ $O(\log n / \epsilon^2)$ [23], υποδεικνύοντας έτσι την αδυναμία των αλγορίθμων που σχεδιάζονται με βάση την αναζήτηση της ισορροπίας Nash σε περιγράμματα στρατηγικών με στήριγματα μικρού μεγέθους. Το ίδιο έτος οι Δασκαλάκης et al δημοσίευσαν έναν αλγόριθμο που επιστρέφει μια ϵ -ισορροπία Nash με $\epsilon = 0.38$ [20], με το αντίστοιχο περίγραμμα στρατηγικών να έχει στήριγμα μεγέθους που μπορεί να υπερβαίνει το $O(\log n / \epsilon^2)$ [23]. Το 2008, οι Bosse et al δημοσίευσαν έναν αλγόριθμο που επιστρέφει μια ϵ -ισορροπία Nash με $\epsilon = 0.36392$, ο οποίος χρησιμοποιεί σαν εναρκτήριο βήμα την εύρεση μιας ισορροπίας Nash για ένα βοηθητικό παίγνιο διπίνακα μηδενικού αθροίσματος που διαμορφώνεται από τα δεδομένα του παιγνίου εισόδου [10]. Μέχρι τη στιγμή της συγγραφής της παρούσας εργασίας, το καλύτερο αποτέλεσμα εύρεσης ϵ -ισορροπίας Nash με σταθερή εγγύηση προσέγγισης επετεύχθη από τους Τσακνάκη και Σπυράκη, οι οποίοι το 2007 δημοσίευσαν έναν αλγόριθμο που επιστρέφει μια ϵ -ισορροπία Nash με $\epsilon = 0.3393$ [54]. Σε αντίθεση με τις τεχνικές απαρίθμησης στήριγμάτων, ο αλγόριθμος των Τσακνάκη και Σπυράκη βασίζεται σε

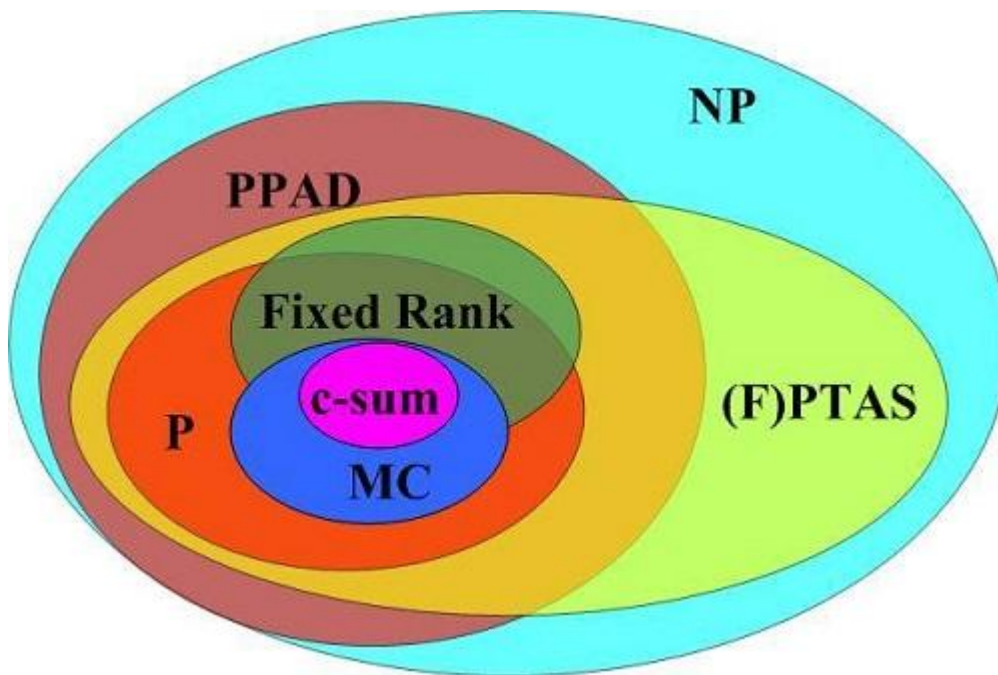
τεχνικές συνεχούς βελτιστοποίησης και, συγκεκριμένα, σε επαναληπτικό υπολογισμό της πιο απότομης κλίσης μέχρι την επίτευξη σύγκλισης.

Για την αυστηρότερη έννοια της *καλά στηριγμένης ϵ -ισορροπίας Nash*, έχει δημοσιευτεί ένας σημαντικός αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου από τους Κοντογιάννη και Σπυράκη [31], ο οποίος επιστρέφει μια καλά στηριγμένη ϵ -ισορροπία Nash με $\epsilon \approx 0,667$ για δεδομένο παίγνιο διπίνακα. Ο πιο πρόσφατος αλγόριθμος γι' αυτό το πρόβλημα δημοσιεύτηκε το 2012 από τους Fearnley et al [22] και επιστρέφει ένα ελάχιστα καλύτερο αποτέλεσμα, κάνοντας το $\epsilon \approx 0.6619$. Στην παρούσα εργασία, το πρόβλημα εύρεσης καλά στηριγμένων ισορροπιών Nash δεν θα μας απασχολήσει.

Εξίσου σημαντικές πρόοδοι σημειώθηκαν και στην αναζήτηση *υποκλάσεων του γενικού προβλήματος εύρεσης ισορροπίας Nash*, για τις οποίες η εύρεση ή, έστω, η προσέγγιση ισορροπιών του Nash είναι εφικτή σε (πλήρως) πολυωνυμικό χρόνο. Μέσω της δουλειάς του Von Neumann και της δημοσίευσης του αλγορίθμου του ελλειψοειδούς για τον γραμμικό προγραμματισμό από τον Khachiyan, γνωρίζουμε πώς μπορούμε να υπολογίσουμε μια ισορροπία Nash ενός παιγνίου διπίνακα μηδενικού αθροίσματος σε πολυωνυμικό χρόνο. Το αποτέλεσμα αυτό επεκτείνεται σε όλα τα παίγνια σταθερού αθροίσματος. Το 2003, οι Lipton et al [39] δημοσίευσαν έναν πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμο για τα παίγνια διπίνακα, των οποίων οι πίνακες ωφέλειας έχουν ίση και σταθερή βαθμίδα. Το 2006, οι Codenotti et al [15] δημοσίευσαν έναν αλγόριθμο πολυωνυμικού χρόνου για την εύρεση ισορροπιών Nash πολύ αραιών παιγνίων διπίνακα νίκης-ήττας που χρησιμοποιεί την αναπαράστασή τους ως κατευθυνόμενο γράφημα. Το ίδιο έτος, οι Kannan και Theobald [27] διεύρυναν αρκετά την κλάση παιγνίων διπίνακα τα οποία επιδέχονται ένα πλήρως πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικό σχήμα για το πρόβλημα εύρεσης ισορροπίας Nash, παρουσιάζοντας μια ιεραρχία παιγνίων διπίνακα βασισμένη στη βαθμίδα του πίνακα-αθροίσματος των πινάκων ωφέλειάς τους, έστω k , δεδομένου ότι αυτή είναι ένας σταθερός, μη-αρνητικός ακέραιος. Οι τιμές του k , $k = 0, 1, \dots$ ορίζουν τα αντίστοιχα επίπεδα της ιεραρχίας. Προφανώς, το επίπεδο $k = 0$ αντιστοιχεί στα παίγνια μηδενικού αθροίσματος. Για το αμέσως επόμενο επίπεδο, το οποίο αντιστοιχεί στα επονομαζόμενα παίγνια βαθμίδας 1, οι Adsul et al [3]

δημοσίευσαν το 2010 έναν αλγόριθμο πολυωνυμικού χρόνου για τον υπολογισμό ισορροπιών Nash. Από την άλλη, μόλις το 2014, η Mehta [41] απέδειξε ότι το πρόβλημα υπολογισμού ισορροπιών Nash σε παίγνια διπίνακα βαθμίδας k , για $k > 2$, είναι PPAD-πλήρες πρόβλημα. Συνεπώς, οι δυνατότητες ενδεχόμενης επέκτασης της κλάσης παιγνίων διπίνακα για τα οποία μπορούμε να υπολογίσουμε μια ισορροπία Nash σε πολυωνυμικό χρόνο μέσω εκμετάλλευσης αυτής της ιεραρχίας περιορίζονται στα παίγνια βαθμίδας 2, για τα οποία η δυσκολία του προβλήματος είναι ακόμα άγνωστη. Μια ακόμη προσθήκη έγινε το 2007 από τους Addario-Berry et al [2], οι οποίοι δημοσίευσαν έναν αλγόριθμο πολυωνυμικού χρόνου για τον υπολογισμό ισορροπιών Nash σε παίγνια νίκης-ήττας, των οποίων η αναπαράστασή τους ως κατευθυνόμενο γράφημα αποδίδει επίπεδο γράφημα. Το 2010, οι Κοντογιάννης και Σπυράκης [30], παρουσίασαν μια ακόμα κλάση παιγνίων διπίνακα, τα επονομαζόμενα αμοιβαία κοίλα παίγνια, για τα οποία ο υπολογισμός ισορροπίας Nash είναι εφικτός σε πολυωνυμικό χρόνο. Η προσέγγιση των Κοντογιάννη και Σπυράκη βασίστηκε στην παραμετροποίηση του πίνακα-αθροίσματος των πινάκων ωφέλειας ενός παιγνίου με μια παράμετρο $\lambda \in (0,1)$, η οποία χρησιμοποιείται για την στάθμιση των ωφελειών των δύο παικτών, και την πολυωνυμικού χρόνου επαλήθευση του αν, για δεδομένο παίγνιο διπίνακα, υπάρχει μια τιμή λ^* που κάνει το τετραγωνικό πρόγραμμα των Mangasarian και Stone [40] κυρτό για την παραμετροποιημένη με λ εκδοχή του παιγνίου. Η σημασία αυτής της κλάσης φάνηκε σε επόμενη δημοσίευσή τους, το 2011 [33], στην οποία αποδεικνύουν την ισοδυναμία της κλάσης των αμοιβαία κοίλων παιγνίων με την κλάση των στρατηγικά-μηδενικού-αθροίσματος παιγνίων διπίνακα των Moulin και Vial. Σε μια διαφορετική εργασία τους μέσα στο 2011, οι Κοντογιάννης και Σπυράκης σχεδίασαν αλγόριθμο υπολογισμού μιας ε -ισορροπίας Nash με $\varepsilon < \frac{1}{3} + \delta$, όπου δ θετική σταθερά, σε χρόνο πολυωνυμικό ως προς το πλήθος ενεργειών των παικτών και σχεδόν-γραμμικό ως προς το δ , για συμμετρικά παίγνια διπίνακα, η οποία βασίζεται στον υπολογισμό ενός δ -KKT σημείου της εκδοχής του τετραγωνικού προγράμματος των Mangasarian και Stone για συμμετρικά παίγνια διπίνακα σε πολυωνυμικό χρόνο [32]. Η πιο πρόσφατη προσθήκη, τουλάχιστον μέχρι την ημερομηνία συγγραφής της παρούσας εργασίας, έγινε το 2013

από τους Alon et al, οι οποίοι δημοσίευσαν πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικά σχήματα για παίγνια διπίνακα των οποίων ο πίνακας-άθροισμα των πινάκων ωφέλειας είναι θετικά ημιορισμένος ή έχει λογαριθμική (ως προς τις διαστάσεις του) βαθμίδα ή $\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ -βαθμίδα, για $\varepsilon > 0$ [5]. Προφανώς, η τελευταία κλάση διευρύνει το αποτέλεσμα των Kannan και Theobald, όμως, λόγω της άγνοιας πάνω στην ύπαρξη κάποιου αλγορίθμου πολυωνυμικού χρόνου για τον ακριβή υπολογισμό της $\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ -βαθμίδας (ή του χαρακτηρισμού της ως NP-δύσκολο πρόβλημα), οι συγγραφείς δεν παρέθεσαν κάποιον αλγόριθμο πολυωνυμικού χρόνου για την επαλήθευση του αν ένα παίγνιο διπίνακα ανήκει στην κλάση παιγνίων διπίνακα με λογαριθμική $\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ -βαθμίδα.



Σχήμα 1.1: Διάγραμμα σχέσεων εγκλεισμού μεταξύ υποκατηγοριών παιγνίων με "εύκολα" στιγμιότυπα και κλάσεων χρονικής πολυπλοκότητας.

1.4. Στόχοι της Διατριβής

Στην παρούσα εργασία ασχολούμαστε με την επέκταση της κλάσης των παιγνίων διπίνακα για τα οποία μπορούμε να προσεγγίσουμε μια ισορροπία Nash σε πολυωνυμικό χρόνο, σχεδιάζοντας ένα πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικό σχήμα. Για τον σκοπό αυτό, βασιζόμαστε σε τεχνικές που έχουν χρησιμοποιηθεί στο [34] και στο [5]. Παρακάμπτουμε το πρόβλημα της έλλειψης ενός αλγορίθμου πολυωνυμικού

χρόνου για τον υπολογισμό της $\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ -βαθμίδας πίνακα χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο των Lee και Shraibman, έναν τυχαιοκρατικό προσεγγιστικό αλγόριθμο που επιστρέφει μια λογαριθμική προσέγγισή της, μέσω του υπολογισμού της νόρμας $\gamma_2^{\varepsilon/4}$ του πίνακα. Στα [37], [6] αποδεικνύεται ότι το πρόβλημα υπολογισμού της νόρμας γ_2^ε ενός πίνακα μπορεί να διατυπωθεί σαν θετικά ημιορισμένο πρόγραμμα, συνεπώς είναι επιλύσιμο σε πολυωνυμικό χρόνο. Εφόσον η $\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ -βαθμίδα του πίνακα-αθροίσματος των πινάκων ωφελειών ενός δεδομένου παιγνίου διπίνακα είναι λογαριθμική (ή, αλλιώς, η νόρμα $\gamma_2^{\varepsilon/4}$ του ίδιου πίνακα είναι σταθερή) ως προς τις διαστάσεις του, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο των Alon et al, ο οποίος δημιουργεί ένα $\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ -net γι' αυτόν τον πίνακα και υπολογίζει μια ε -ισορροπία Nash του παιγνίου διπίνακα μέσω απαρίθμησης των σημείων του $\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ -net.

Για την επέκταση της κλάσης των παιγνίων για τα οποία αυτός ο αλγόριθμος επιστρέφει λογαριθμική προσέγγιση της $\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ -βαθμίδας, μελετάμε την παραμετροποίηση του πίνακα-αθροίσματος των πινάκων ωφελειών με μια παράμετρο $\lambda \in (0,1)$, ακριβώς όπως στο [33]. Για μια τέτοια παραμετροποίηση, δείχνουμε ότι για κάθε παίγνιο διπίνακα υπάρχει μια κατάλληλη τιμή λ^* για την οποία σημειώνεται μια μεγάλη πτώση της νόρμας $\gamma_2^{\varepsilon/4}$ και αποδεικνύουμε ότι αν υπάρχει μια τιμή λ^* για την οποία η νόρμα $\gamma_2^{\varepsilon/4}$ του μη-παραμετροποιημένου αθροίσματος των πινάκων ωφελειών έχει κάτω φράγμα $\Omega(\log(mn))$, όπου m και n οι διαστάσεις του, ενώ η νόρμα $\gamma_2^{\varepsilon/4}$ του παραμετροποιημένου αθροίσματος των πινάκων ωφελειών είναι σταθερή, μπορούμε να βρούμε σε πολυωνυμικό χρόνο μια ε -ισορροπία Nash, με μεγάλη πιθανότητα, μέσω απαρίθμησης των στοιχείων ενός $\frac{\varepsilon \min\{\lambda^*, 1-\lambda^*\}}{2}$ -net κατάλληλου μεγέθους. Συνοδεύουμε τα θεωρητικά συμπεράσματα με πειραματικά

αποτελέσματα, με κίνητρο να προσδιορίσουμε τη γενικότητα και τη σημασία αυτής της υποκλάσης παιγνίων διπίνακα.

1.5. Δομή της Διατριβής

Στο κεφάλαιο 2 κάνουμε μια εκτενή επισκόπηση του αναγκαίου μαθηματικού υποβάθρου για τη μελέτη της παρούσας εργασίας. Παρουσιάζουμε έννοιες και ορισμούς από τη θεωρία παιγνίων, εστιάζοντας στην παρουσίαση των σημαντικών εννοιών λύσης και των αποτελεσμάτων πολυπλοκότητας γι' αυτές, όπως και στην περιγραφή σημαντικών υποκλάσεων παιγνίων διπίνακα οι οποίες επιδέχονται αλγορίθμους πολυωνυμικού χρόνου για την εύρεση ισορροπιών Nash ή πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικά σχήματα για το ίδιο πρόβλημα. Συνεχίζουμε με την παρουσίαση εννοιών, κατασκευών και αποτελεσμάτων από τα επιστημονικά πεδία της μη-γραμμικής βελτιστοποίησης – συγκεκριμένα του τετραγωνικού και του θετικά ημιορισμένου προγραμματισμού, της κυρτής γεωμετρίας και των δικτυωτών.

Στο κεφάλαιο 3 παρουσιάζουμε ένα τυχαιοκρατικό πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικό σχήμα για την εύρεση ισορροπιών Nash σε παίγνια διπίνακα, των οποίων το άθροισμα των πινάκων ωφελειών έχει λογαριθμική βαθμίδα ως προς τις διαστάσεις του πίνακα. Αυτός ο αλγόριθμος βασίζεται στο συνδυασμό και την τροποποίηση δύο ήδη γνωστών αλγορίθμων, του τυχαιοκρατικού αλγορίθμου εύρεσης μιας λογαριθμικής προσέγγισης της προσεγγιστικής βαθμίδας ενός πίνακα προσήμων των Lee και Shraibman [34] και του αλγορίθμου κατασκευής σχεδόν-βέλτιστων ε -nets με μέγεθος εξαρτώμενο από την προσεγγιστική βαθμίδα ενός πίνακα των Alon et al [5]. Παρατηρούμε ότι το να έχει το άθροισμα των πινάκων ωφελειών σταθερή νόρμα $\gamma_2^{\varepsilon/4}$ είναι ικανή συνθήκη για να έχει λογαριθμική προσεγγιστική βαθμίδα και γι' αυτό αξιοποιούμε το θετικά ημιορισμένο πρόγραμμα επίλυσης της νόρμας γ_2^{ε} ως αλγόριθμο πολυωνυμικού χρόνου για την επαλήθευση του αν μπορούμε να υπολογίσουμε μια ε -ισορροπία Nash για ένα δεδομένο παίγνιο διπίνακα με αυτό τον αλγόριθμο.

Στο κεφάλαιο 4 παρουσιάζουμε μια πρόταση για την επέκταση της κλάσης παιγνίων διπίνακα που επιδέχονται ένα τυχαιοκρατικό πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικό σχήμα – συγκεκριμένα, αυτού που παρουσιάσαμε στο κεφάλαιο 3 – για το πρόβλημα

εύρεσης ισορροπιών Nash. Παραμετροποιούμε το άθροισμα των πινάκων ωφελειών ενός παιγνίου διπίνακα με μια παράμετρο $\lambda \in (0,1)$ και παρουσιάζουμε την ανάλογη παραμετροποιημένη εκδοχή του ημιορισμένου προγράμματος υπολογισμού της νόρμας γ_2^ε πίνακα. Προτείνουμε τη χρήση αυτού του ημιορισμένου προγράμματος ως αλγόριθμο πολυωνυμικού χρόνου για την επαλήθευση του αν μπορούμε να υπολογίσουμε μια ε -ισορροπία Nash για ένα δεδομένο παίγνιο διπίνακα με τον αλγόριθμο που παρουσιάσαμε στο κεφάλαιο 3. Συγκεκριμένα, για ένα δεδομένο παίγνιο διπίνακα, εξετάζουμε αν υπάρχει ένα $\lambda \in (0,1)$ μακριά από τις τιμές 0 και 1, για το οποίο το παραμετροποιημένο άθροισμα των πινάκων ωφελειών έχει σταθερή νόρμα $\gamma_2^{\varepsilon/4}$ και, αν αυτό ισχύει, κατασκευάζουμε ένα σχεδόν-βέλτιστο $\frac{\varepsilon \min\{\lambda^*, 1-\lambda^*\}}{2}$ -

net με τον αλγόριθμο των Alon et al [5] και παίρνουμε μια ε -ισορροπία Nash μέσω απαρίθμησης των στοιχείων του, διαφορετικά ενημερώνουμε για αποτυχία. Ακόμη, αποδεικνύουμε ότι τα παίγνια διπίνακα σταθερού αθροίσματος και τα παίγνια διπίνακα σταθερής βαθμίδας έχουν σταθερή νόρμα $\gamma_2^{\varepsilon/4}$, οπότε ανήκουν στην προτεινόμενη από εμάς υποκλάση παιγνίων διπίνακα. Στη συνέχεια, διερευνούμε πειραματικά αν για μια συγκεκριμένη κλάση παιγνίων διπίνακα, τα παίγνια νίκης-ήττας, η παραμετροποίηση του αθροίσματος πινάκων ωφελειών οδηγεί σε μεγάλη μείωση της νόρμας $\gamma_2^{\varepsilon/4}$ του και αν, σε περίπτωση που η νόρμα $\gamma_2^{\varepsilon/4}$ αυτού του πίνακα αυξάνεται λογαριθμικά ως προς το πλήθος ενεργειών των παικτών, η παραμετροποίηση του με λ κάνει αυτή τη νόρμα σταθερή ως προς τις ενέργειες των παικτών.

Τέλος, στο κεφάλαιο 5 δίνουμε μια σύνοψη των αποτελεσμάτων της παρούσας εργασίας, ως επίλογο, και παρουσιάζουμε μερικές προτάσεις για τη μελλοντική επέκτασή της.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑΣ

-
- 2.1 Στρατηγικά Παίγνια Διπίνακα
 - 2.2 Σκεπτικά Λύσης της Θεωρίας Παιγνίων
 - 2.3 Επισκόπηση Πολυωνυμικά Επιλύσιμων Υποκατηγοριών Παιγνίων Διπίνακα
 - 2.4 Μέτρα Πολυπλοκότητας Πίνακα
 - 2.5 Θέματα Θεωρίας Βελτιστοποίησης
 - 2.6 Θέματα Κυρτής Γεωμετρίας και Δικτυωτών
-

2.1 Στρατηγικά Παίγνια Διπίνακα

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, η θεωρία παιγνίων ορίστηκε ως η μελέτη μαθηματικών μοντέλων σύγκρουσης και συνεργασίας μεταξύ ευφύων και λογικών οντοτήτων με ικανότητα λήψης αποφάσεων. Οι οντότητες αυτές ονομάζονται *παίκτες* και οι παραπάνω καταστάσεις ονομάζονται *παίγνια*. Η επίτευξη των στόχων του κάθε παίκτη δεν εξαρτάται μόνο από τις δικές του αποφάσεις, αλλά και από τις αποφάσεις των υπόλοιπων παικτών. Χαρακτηρίζουμε έναν παίκτη ως λογικό όταν λαμβάνει αποφάσεις με γνώμονα τον αντικειμενικό του στόχο, που είναι η *μεγιστοποίηση του προσωπικού του οφέλους*. Ακόμη, χαρακτηρίζουμε έναν παίκτη ως ευφυή όταν έχει *πλήρη γνώση του παιγνίου*, δηλαδή γνωρίζει τους κανόνες του και είναι πλήρως ενήμερος τόσο για τις διαθέσιμες στρατηγικές του και τις δικές του τιμές ωφέλειας, όσο και για τις διαθέσιμες στρατηγικές και τις τιμές ωφέλειας των άλλων παικτών. Για μια πληρέστερη εισαγωγή στη θεωρία παιγνίων, παραπέμπουμε στο σύγγραμμα των Osborne και Rubinstein [48].

Ένα *στρατηγικό παίγνιο* είναι ένα μοντέλο αλληλεπιδραστικής λήψης αποφάσεων, στο οποίο ο κάθε παίκτης επιλέγει το *πλάνο ενεργειών του μόνο μια φορά*, με όλους τους

παίχτες να κάνουν την επιλογή τους *ταυτόχρονα*. Μπορούμε να ορίσουμε φαρμαλιστικά ένα στρατηγικό παίγνιο όπως παρακάτω (π.χ. κεφάλαιο 2 του [48]):

Ορισμός 1. Ένα στρατηγικό παίγνιο είναι μια διατεταγμένη τριάδα $\langle N, A_i, u_i \rangle, i \in N$,

όπου:

- N : ένα μη-κενό και πεπερασμένο σύνολο παικτών,
- A_i : το μη-κενό σύνολο ενεργειών του παίκτη $i, i \in N$
- u_i : η συνάρτηση ωφέλειας του παίκτη i , με $u_i: \prod_{j \in N} A_j \rightarrow \mathbb{R}$.

Αν τα σύνολα ενεργειών A_i για κάθε παίκτη είναι πεπερασμένα, τότε το στρατηγικό παίγνιο $\langle N, A_i, u_i \rangle$ είναι πεπερασμένο.

Ένα παίγνιο διπίνακα, το οποίο συμβολίζουμε σαν $\langle R, C \rangle$, είναι ένα στρατηγικό παίγνιο δύο παικτών, στο οποίο οι συναρτήσεις ωφέλειας των παικτών μπορούν να περιγραφούν από δύο πίνακες $R, C \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Ο R είναι ο πίνακας ωφέλειας του παίκτη γραμμής και ο C είναι ο πίνακας ωφέλειας του παίκτη στήλης. Ο παίκτης γραμμής έχει m διαθέσιμες ενέργειες και ο παίκτης στήλης n διαθέσιμες ενέργειες.

Αν ο παίκτης γραμμής επιλέξει την ενέργεια $i \in [m]$ και ο παίκτης στήλης την ενέργεια $j \in [n]$, τότε η απολαβή του πρώτου θα είναι ίση με $R_{i,j}$ και του δεύτερου ίση με $C_{i,j}$. Δηλαδή, το (i,j) -οστό στοιχείο του διπίνακα είναι το διατεταγμένο ζεύγος $(R_{i,j}, C_{i,j})$. Αν $R, C \in (\mathbb{Q} \cap [0,1])^{m \times n} \subset \mathbb{R}^{m \times n}$, τότε το παίγνιο διπίνακα $\langle R, C \rangle$

λέγεται θετικά κανονικοποιημένο. Οι έννοιες και ορισμοί της θεωρίας παιγνίων που ακολουθούν θα διατυπώνονται μόνο για την περίπτωση των παιγνίων διπίνακα.

Σε ένα παίγνιο διπίνακα $\langle R, C \rangle$ εκφράζουμε μια μικτή στρατηγική του παίκτη γραμμής σαν ένα διάνυσμα τιμών πιθανότητας $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$, οι οποίες κατανομούνται στις ενέργειες $1, \dots, m$ του παίκτη γραμμής. Ορίζουμε το σύνολο Δ_m των μικτών στρατηγικών του παίκτη γραμμής ως ακολούθως:

$$\Delta_m := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid \sum_{i=1}^m x_i = 1, x_i \geq 0, \forall i \in [m]\}.$$

Αντίστοιχα, εκφράζουμε μια *μικτή στρατηγική του παίκτη στήλης* σαν ένα διάνυσμα τιμών πιθανότητας $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$, οι οποίες κατανομούνται στις ενέργειες $1, \dots, n$ του παίκτη στήλης. Ορίζουμε το σύνολο Δ_n των μικτών στρατηγικών του παίκτη στήλης ως ακολούθως:

$$\Delta_n := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n y_i = 1, y_i \geq 0, \forall i \in [n]\}.$$

Από τους ορισμούς τους, τα σύνολα Δ_m, Δ_n είναι πολύτοπα, δηλαδή κλειστά και φραγμένα πολύεδρα.

Μια μικτή στρατηγική που δίνει πιθανότητα ίση με 1 σε μια μόνο ενέργεια ενός παίκτη και 0 σε όλες τις υπόλοιπες ενέργειες, λέγεται *αμιγής στρατηγική*.

Για το περιγράμμα στρατηγικών (\mathbf{x}, \mathbf{y}) , η αναμενόμενη ωφέλεια του παίκτη γραμμής ισούται με $\mathbf{x}^T R \mathbf{y}$ ενώ η αναμενόμενη ωφέλεια του παίκτη στήλης ισούται με $\mathbf{x}^T C \mathbf{y}$.

Και οι δύο παίκτες έχουν σαν αντικειμενικό τους στόχο να μεγιστοποιήσουν την αναμενόμενη τους ωφέλεια.

Τέλος, δεδομένου ενός περιγράμματος στρατηγικών (\mathbf{x}, \mathbf{y}) , ορίζουμε το *στήριγμα* του παίκτη γραμμής/στήλης ως το σύνολο ενεργειών του στις οποίες τίθεται μη-μηδενική πιθανότητα. Φορμαλιστικά, για $\mathbf{x} \in \Delta_m$ (αντίστοιχα για $\mathbf{y} \in \Delta_n$):

$$\text{supp}(\mathbf{x}) := \{i \mid x_i > 0, \mathbf{x} \in \Delta_m\}$$

Το *στήριγμα ενός περιγράμματος στρατηγικών* ορίζεται ως το καρτεσιανό γινόμενο των στηριγμάτων των παικτών γραμμής και στήλης.

2.2 Σκεπτικά Λύσης της Θεωρίας Παιγνίων

Έχοντας το απαραίτητο υπόβαθρο των παιγνίων διπίνακα, προχωράμε στην παρουσίαση των δύο σημαντικότερων, από την σκοπιά της αλγοριθμικής θεωρίας παιγνίων, σκεπτικών λύσης γι' αυτά: της ισορροπίας Nash και της συσχετισμένης ισορροπίας.

2.2.1 Ισορροπία Nash

Η ισορροπία Nash [43] είναι το συχνότερα χρησιμοποιούμενο σκεπτικό λύσης στη θεωρία παιγνίων, ιδιαίτερα στα στρατηγικά παίγνια. Εκφράζει μια σταθερή κατάσταση του παιγνίου, στην οποία ο κάθε παίκτης έχει επιλέξει μια στρατηγική και δε μπορεί να αυξήσει την αναμενόμενη ωφέλειά του αν την αλλάξει, εφόσον οι υπόλοιποι παίκτες δεν αλλάξουν τις στρατηγικές τους.

Ορισμός 2. Για ένα παίγνιο διπίνακα $\langle R, C \rangle$, $R, C \in \mathbb{R}^{m \times n}$, μια ισορροπία Nash είναι

ένα περίγραμμα στρατηγικών $(x^*, y^*) \in \Delta_m \times \Delta_n$ για το οποίο

- Για κάθε ενέργεια $i \in [n]$ του παίκτη γραμμής ισχύει ότι $e_i^T R y^* \leq x^{*T} R y^*$.
- Για κάθε ενέργεια $j \in [m]$ του παίκτη στήλης ισχύει ότι $x^* C e_j^T \leq x^{*T} C y^*$.

Είναι αποδεδειγμένο [43] το ότι κάθε πεπερασμένο στρατηγικό παίγνιο έχει τουλάχιστον μια ισορροπία Nash στις μικτές στρατηγικές. Αντίθετα, δεν έχουν όλα τα παίγνια διπίνακα ισορροπίες Nash στις αμιγείς στρατηγικές, όπως, για παράδειγμα, το “Matching Pennies”. Ονομάζουμε $NE(R, C)$ το σύνολο ισορροπιών Nash του $\langle R, C \rangle$.

Πίνακας 2.1: Το παίγνιο διπίνακα Matching Pennies

	Heads	Tails
Heads	1,-1	-1,1
Tails	-1,1	1,-1

Σαν ένα παράδειγμα εύρεσης ισορροπίας Nash σε παίγνιο διπίνακα, δίνουμε το παίγνιο «Bach ή Stravinsky» (κεφ. 2 του [48]). Δύο άτομα θέλουν να πάνε μαζί σε ένα μουσικό κονσέρτο. Το πρώτο άτομο προτιμά ένα κονσέρτο όπου θα παιχτούν συνθέσεις του Bach και το δεύτερο ένα κονσέρτο όπου θα παιχτούν συνθέσεις του Stravinsky. Συνεπώς, οι επιθυμίες των δύο ατόμων-παικτών έρχονται σε σύγκρουση. Το παίγνιο μπορεί να παρασταθεί ως ακολούθως:

Πίνακας 2.2: Το παίγνιο διπίνακα «Bach ή Stravinsky».

	Bach	Stravinsky
Bach	2,1	0,0
Stravinsky	0,0	1,2

Το παίγνιο αυτό έχει δύο ισορροπίες Nash με αμιγείς στρατηγικές: $((1\ 0)^T, (1\ 0)^T)$ και $((0\ 1)^T, (0\ 1)^T)$. Επίσης, έχει μια ισορροπία Nash με μικτές στρατηγικές: $((\frac{2}{3}\ \frac{1}{3})^T, (\frac{1}{3}\ \frac{2}{3})^T)$.

Ονομάζουμε *μεταμέλεια* ενός παίκτη την *απόκλιση της αναμενόμενης από την βέλτιστη ωφέλειά του*, που προκύπτει από την στρατηγική που έπαιξε ενάντια στην στρατηγική του αντιπάλου. Δεδομένου ενός παιγνίου διπίνακα $\langle R, C \rangle$, ορίζουμε τυπικά τη μεταμέλεια του παίκτη γραμμής για το περίγραμμα στρατηγικών $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Delta_m \times \Delta_n$ ως $R_r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \max(R\mathbf{y}) - \mathbf{x}^T R\mathbf{y}$. Αντίστοιχα, η μεταμέλεια του παίκτη στήλης είναι $R_c(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \max(C^T \mathbf{x}) - \mathbf{x}^T C\mathbf{y}$. Προφανώς, οι μεταμέλειες των 2 παικτών είναι μηδενικές για προφίλ στρατηγικών που αποτελεί ισορροπία Nash, δίνοντας έτσι ένα στοιχειώδες κριτήριο επαλήθευσης του αν ένα περίγραμμα στρατηγικών είναι ισορροπία Nash ενός παιγνίου διπίνακα. Παρατηρούμε ότι ένα περίγραμμα στρατηγικών $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \in \Delta_m \times \Delta_n$ που είναι ισορροπία Nash του $\langle R, C \rangle$ πρέπει να μηδενίζει το άθροισμα των συναρτήσεων μεταμελειών των δύο παικτών και αντίστροφα, κάθε ζεύγος διανυσμάτων $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \in \Delta_m \times \Delta_n$ που μηδενίζει το άθροισμα των συναρτήσεων μεταμελειών των δύο παικτών είναι ισορροπία Nash του $\langle R, C \rangle$.

Θεώρημα 1. Έστω το παίγνιο διπίνακα $\langle R, C \rangle$, $R, C \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Ένα περίγραμμα στρατηγικών που είναι ισορροπία Nash αυτού του παιγνίου διπίνακα, πρέπει να είναι λύση του ακόλουθου τετραγωνικού προγράμματος [36]:

$$\begin{aligned} \text{(NEQP):} \quad & \min \max_{i \in [n]} R_{i*} \mathbf{y} + \max_{j \in [m]} C_{*j}^T \mathbf{x} - \mathbf{x}^T (R + C) \mathbf{y} \\ & \text{subject to } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Delta_m \times \Delta_n \end{aligned}$$

Αντίστοιχα, κάθε ζεύγος διανυσμάτων $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \in \Delta_m \times \Delta_n$ που είναι λύση του παραπάνω τετραγωνικού προγράμματος, είναι ισορροπία Nash του παιγνίου διπίνακα $\langle R, C \rangle$.

Η απόδειξη είναι προφανής. Θα μπορούσαμε, λοιπόν, να υπολογίσουμε μια λύση του (NEQP) για να βρούμε μια ισορροπία Nash ενός δεδομένου παιγνίου διπίνακα (π.χ. με κάποιον από τους αλγορίθμους του κεφ. 16 του [46]). Όμως, με αυτό τον τρόπο μπορούμε να βρούμε μια ισορροπία Nash του παιγνίου σε πολυωνυμικό χρόνο μόνο όταν το αντίστοιχο (NEQP) προκύπτει κυρτό (βλ. παράγραφο 2.5.1).

Ένα ισοδύναμο κριτήριο του αν ένα περίγραμμα στρατηγικών είναι ισορροπία Nash ενός παιγνίου διπίνακα είναι η συνθήκη βέλτιστης απόκρισης (κεφ. 3 του [40]). Έστω $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Delta_m \times \Delta_n$ ένα περίγραμμα στρατηγικών των παικτών του $\langle R, C \rangle$.

Καλούμε την \mathbf{x} ως βέλτιστη απόκριση στην \mathbf{y} αν και μόνο αν για κάθε $i \in [m]$: $x_i > 0 \Rightarrow (R\mathbf{y})_i = \max\{(C\mathbf{y})_k \mid k \in [m]\}$. Αν οι δύο στρατηγικές του περιγράμματος (\mathbf{x}, \mathbf{y}) είναι αμοιβαία βέλτιστες αποκρίσεις, τότε αυτό είναι ισορροπία Nash του $\langle R, C \rangle$. Η συνθήκη βέλτιστης απόκρισης χρησιμοποιείται από τον αλγόριθμο «απαρίθμησης στηριγμάτων» (κεφ. 3 του [40]), ο οποίος, για κάθε δυνατό μέγεθος στηρίγματος, εξετάζει ποια περιγράμματα στρατηγικών (\mathbf{x}, \mathbf{y}) αποτελούν αμοιβαίες βέλτιστες αποκρίσεις, λύνοντας ένα σύστημα γραμμικών ανισοτήτων. Ακόμη κι αν περιορίσουμε αυτό τον αλγόριθμο στο να επιστρέφει την πρώτη ισορροπία Nash που θα βρει, ο χρόνος εκτέλεσης του στη χειρίστη περίπτωση είναι εκθετικός ως προς το πλήθος ενεργειών των παικτών.

Οι ισορροπίες Nash ενός παιγνίου διπίνακα είναι αναλλοίωτες στην θετική κλιμάκωση και την μεταφορά [25]. Δηλαδή, το παίγνιο διπίνακα $\langle R, C \rangle$ έχει τις ίδιες ισορροπίες Nash με το $\langle d_1 R, d_2 C \rangle$, όπου d_1 και d_2 θετικές πραγματικές σταθερές, και το $\langle D_1 + R, D_2 + C \rangle$, όπου $D_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ πίνακας τέτοιος ώστε για κάθε $j \in [m]$, $D_{1_{i,j}} = D_{1_j}$ για κάθε $i \in [n]$ και $D_2 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ πίνακας τέτοιος ώστε για κάθε $i \in [n]$, $D_{2_{i,j}} = D_{2_j}$ για κάθε $j \in [m]$.

2.2.2 Προσεγγιστική Ισορροπία Nash

Για τους σκοπούς της παρούσας εργασίας, χρησιμοποιούμε τον αθροιστικό ορισμό της προσεγγιστικής ισορροπίας Nash. Ορίζουμε την *προσεγγιστική ισορροπία Nash* (ε -ισορροπία Nash) ενός παιγνίου διπίνακα ως ακολούθως.

Ορισμός 3. Για ένα παίγνιο διπίνακα $\langle R, C \rangle$, μια ε -ισορροπία Nash είναι ένα περίγραμμα στρατηγικών $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \in \Delta_m \times \Delta_n$ για το οποίο:

- Για κάθε αμιγή στρατηγική $i \in [n]$ του παίκτη γραμμής ισχύει ότι:

$$\mathbf{e}_i^T R \mathbf{y}^* \leq \mathbf{x}^{*T} R \mathbf{y}^* + \varepsilon .$$
- Για κάθε αμιγή στρατηγική $j \in [m]$ του παίκτη στήλης ισχύει ότι:

$$\mathbf{x}^{*T} C \mathbf{e}_j^T \leq \mathbf{x}^{*T} C \mathbf{y}^* + \varepsilon .$$

Δηλαδή, μια ε -ισορροπία Nash είναι ένα ζεύγος στρατηγικών τέτοιο ώστε κανένας παίκτης να μην μπορεί να αυξήσει την αναμενόμενη ωφέλειά του περισσότερο από ε αν αλλάξει τη στρατηγική του, εφόσον οι υπόλοιποι παίκτες δεν αποκλίνουν από τις δικές τους στρατηγικές. Ονομάζουμε $NE_\varepsilon(R, C)$ το σύνολο ε -ισορροπιών Nash του $\langle R, C \rangle$.

Μια ε -ισορροπία Nash του $\langle R, C \rangle$ καθιστά την τιμή του (NEQP) μικρότερη ή ίση του ε . Οι συνθήκες βέλτιστης απόκρισης προσαρμόζονται αναλόγως.

Οι ε -ισορροπίες Nash ενός παίγνιου διπίνακα είναι αναλλοίωτες στην μεταφορά [29]. Δηλαδή, το παίγνιο διπίνακα $\langle R, C \rangle$ έχει τις ίδιες ε -ισορροπίες Nash με το $\langle D_1 + R, D_2 + C \rangle$, όπου $D_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ πίνακας τέτοιος ώστε για κάθε $j \in [m]$, $D_{1,i,j} = D_{1,j}$ για κάθε $i \in [n]$ και $D_2 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ πίνακας τέτοιος ώστε για κάθε $i \in [n]$, $D_{2,i,j} = D_{2,j}$ για κάθε $j \in [m]$. Αντίθετα, μια ε -ισορροπία Nash του $\langle R, C \rangle$ είναι μια $d\varepsilon$ -ισορροπία Nash του παίγνιου διπίνακα $\langle d_1 R, d_2 C \rangle$ για τις θετικές πραγματικές σταθερές d_1 και d_2 και $d = \max\{d_1, d_2\}$ [29].

2.2.3 Συσχετισμένη Ισορροπία

Η *συσχετισμένη ισορροπία* εισήχθη σαν σκεπτικό λύσης στρατηγικών παιγνίων από τον Aumann το 1974 [8]. Σε αντίθεση με την ισορροπία Nash, οι παίκτες δεν ορίζουν μόνοι τους τις στρατηγικές τους, αλλά δέχονται προτάσεις για το πώς να παίξουν από μια εξωτερική «συσκευή συσχέτισης». Για να είναι η πρόταση της συσκευής μια συσχετισμένη ισορροπία, θα πρέπει να μη δίνει κίνητρο σε κανέναν παίκτη να αποκλίνει από αυτή.

Μια συσχετισμένη στρατηγική του $\langle R, C \rangle$ είναι μια από κοινού κατανομή πιθανότητας $W \in \Delta_m \times \Delta_n$ πάνω σ' ολόκληρο το σύνολο ενεργειών και των δύο παικτών.

Ορισμός 4. Για ένα παίγνιο διπίνακα $\langle R, C \rangle$, μια συσχετισμένη στρατηγική του, $W \in \Delta_{mn}$, είναι μια συσχετισμένη ισορροπία του αν ικανοποιεί το ακόλουθο σύστημα γραμμικών ανισοτήτων:

$$\forall i, k \in [m], \quad \sum_{j \in [n]} (R_{ij} - R_{kj}) W_{ij} \geq 0$$

$$\forall i, k \in [m], \quad \sum_{j \in [n]} (C_{ij} - C_{kj}) W_{ij} \geq 0$$

$$\sum_{i \in [m]} \sum_{j \in [n]} W_{ij} = 1$$

$$\forall (i, j) \in [m] \times [n], W_{ij} \geq 0$$

Από αυτό τον ορισμό, παρατηρούμε ότι οι συσχετισμένες ισορροπίες ενός παιγνίου διπίνακα βρίσκονται στο πολύεδρο που ορίζεται από το παραπάνω σύστημα γραμμικών ανισοτήτων. Ονομάζουμε $CE(R, C)$ το σύνολο συσχετισμένων ισορροπιών του $\langle R, C \rangle$. Είναι εύκολο να δείξουμε ότι $(x^*, y^*) \in NE(R, C) \Rightarrow W^* \in CE(R, C)$, όπου $W^* = x^* y^{*T}$. Ένα ενδιαφέρον αποτέλεσμα που αποδείχτηκε από τους Nau et al [44] είναι ότι οι ισορροπίες Nash ενός παιγνίου διπίνακα βρίσκονται στο περιθώριο του πολυέδρου των συσχετισμένων ισορροπιών του ίδιου παιγνίου.

2.2.4 Πολυπλοκότητα του Προβλήματος Εύρεσης Ισορροπιών Nash

Στη γενική του περίπτωση, το πρόβλημα εύρεσης ισορροπιών Nash ενός παιγνίου ανήκει στην κλάση PPAD (για τον ορισμό αυτής της κλάσης πολυπλοκότητας παραπέμπουμε στο [49], ενώ μια εξαιρετική, απλουστευμένη περιγραφή της δίνεται στο [58]). Οι Δασκαλάκης, Goldberg και Παπαδημητρίου απέδειξαν σχετικά πρόσφατα (2005) ότι η εύρεση ισορροπιών Nash σε παίγνια 4 ή περισσότερων παικτών είναι PPAD-πλήρες πρόβλημα [17]. Την ίδια χρονιά, οι Δασκαλάκης και Παπαδημητρίου απέδειξαν πως η εύρεση ισορροπιών Nash σε παίγνια 3 παικτών είναι επίσης PPAD-πλήρες πρόβλημα [18], κάτι που αποδείχτηκε ταυτόχρονα και ανεξάρτητα και από τους Chen και Deng [12]. Ένα χρόνο αργότερα (2006), οι Chen και Deng απέδειξαν πως και το πρόβλημα εύρεσης ισορροπιών Nash σε παίγνια 2 παικτών είναι PPAD-πλήρες [13]. Τέλος, οι Chen et al [14] απέδειξαν ότι ακόμη και η εύρεση μιας ϵ -ισορροπίας Nash για $\epsilon = \theta(n^{-c})$, όπου c θετική σταθερά, είναι PPAD-πλήρες πρόβλημα, αποκλείοντας έτσι την ύπαρξη ενός πλήρως πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικού σχήματος για το πρόβλημα, εκτός κι αν αποδειχτεί ότι $P=PPAD$. Δεν έχει αποκλειστεί, όμως, η ύπαρξη ενός πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικού σχήματος γι' αυτό το πρόβλημα (ωστόσο, έχει αποκλειστεί η ύπαρξη ενός πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικού σχήματος για τον πολλαπλασιαστικό ορισμό της προσεγγιστικής ισορροπίας Nash αν δεν ισχύει ότι $P=PPAD$ από τον Δασκαλάκη [21]).

2.2.5 Πολυπλοκότητα του Προβλήματος Εύρεσης Συσχετισμένων Ισορροπιών

Όπως είδαμε στον ορισμό 4, ο υπολογισμός μιας συσχετισμένης ισορροπίας ενός παιγνίου διπίνακα ανάγεται στην επίλυση ενός συστήματος γραμμικών ανισοτήτων. Αυτό το πρόβλημα μπορεί να αναδιατυπωθεί εύκολα σαν γραμμικό πρόγραμμα, οπότε και να επιλυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο με τον αλγόριθμο του ελλειψοειδούς για τον γραμμικό προγραμματισμό [28]. Συνεπώς, το πρόβλημα εύρεσης μιας συσχετισμένης ισορροπίας ενός παιγνίου διπίνακα είναι επιλύσιμο σε πολυωνυμικό χρόνο.

2.3 Επισκόπηση Πολυωνυμικά Επιλύσιμων Υποκατηγοριών Παιγνίων Διπίνακα

Παρά την PPAD-πληρότητα του γενικού προβλήματος εύρεσης ισορροπιών Nash ή ε -ισορροπιών Nash παιγνίων διπίνακα, διάφοροι ερευνητές ανακάλυψαν υποκλάσεις παιγνίων διπίνακα με πολυωνυμικού χρόνου επιλύσιμα στιγμιότυπα γι' αυτά τα προβλήματα. Έχουμε κάνει μια χρονολογική επισκόπηση αυτών των υποκλάσεων στην ενότητα 1.3. Σ' αυτή την ενότητα, θα περιγράψουμε λεπτομερέστερα τρεις σημαντικές τέτοιες υποκλάσεις παιγνίων διπίνακα, οι οποίες έχουν συνάφεια με την υποκλάση εύκολων στιγμιότυπων που παρουσιάζουμε στα επόμενα κεφάλαια της παρούσας εργασίας. Κάποιες μαθηματικές έννοιες και ορισμοί που χρησιμοποιούνται στις ακόλουθες παραγράφους, αναπτύσσονται στις ενότητες 2.5 και 2.6.

2.3.1 Παίγνια Σταθερής Βαθμίδας

Θεωρούμε το παίγνιο διπίνακα $\langle R, C \rangle$ με $R, C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ και τον πίνακα $Z := R + C$. Αν $\text{rank}(Z) = k$, με k σταθερό (δηλαδή, ανεξάρτητο απ' τις διαστάσεις του Z ή κάποια άλλη ποσότητα) μη-αρνητικό ακέραιο, τότε λέμε ότι το $\langle R, C \rangle$ είναι παίγνιο τάξης k .

Μέσω αυτού του ορισμού, οι Kannan και Theobald όρισαν μια ιεραρχία παιγνίων με βάση τη βαθμίδα του αθροίσματος των πινάκων ωφελειών τους [27]. Στη βάση της ιεραρχίας ($k = 0$) βρίσκονται τα παίγνια μηδενικού αθροίσματος. Θυμίζουμε ότι για $k = 1$, υπολογίζουμε μια ισορροπία Nash σε πολυωνυμικό χρόνο μέσω του αλγορίθμου των Adsul et al [3].

Οι Kannan και Theobald απέδειξαν ότι για όλα τα παίγνια σταθερής βαθμίδας, ο υπολογισμός μιας ε -ισορροπίας Nash για $\varepsilon > 0$ γίνεται σε πολυωνυμικό χρόνο μέσω της προσέγγισης του ολικού ελαχιστοποιητή ενός τετραγωνικού προγράμματος [27]. Συγκεκριμένα, αποδεικνύουν ότι μια λύση $(\mathbf{s}^*, \mathbf{z}^*)$ του τετραγωνικού προγράμματος

$$\min \mathbf{z}^T Q \mathbf{z} \quad \text{subject to } \forall i \in [m], j \in [n]: S_{ij}^T \mathbf{z} \leq s, \mathbf{z} \in \Delta_m \times \Delta_n$$

όπου

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(R + C) \\ \frac{1}{2}(R + C)^T & 0 \end{pmatrix}, S_{ij} = (R_{i*} | C_{*j}^T)$$

(δηλαδή, ο S είναι ένας πίνακας που η κάθε γραμμή του προκύπτει από μια συνένωση της i -οστής γραμμής του R και της j -οστής στήλης του C , για κάθε i και j) ισοδυναμεί με ένα περίγραμμα στρατηγικών $\mathbf{z}^* = (\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \in \Delta_m \times \Delta_n$ που είναι ισορροπία Nash του $\langle R, C \rangle$ και αντιστρόφως. Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Βαβάση [56], ο οποίος λειτουργεί σαν πλήρως πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικό σχήμα αν ο Q έχει σταθερή βαθμίδα, βρίσκουμε έναν προσεγγιστικό ελαχιστοποιητή του παραπάνω τετραγωνικού προγράμματος, ο οποίος υποδεικνύει μια ε -ισορροπία Nash του $\langle R, C \rangle$. Οπότε, αν το $\langle R, C \rangle$ είναι παίγνιο σταθερής βαθμίδας (κάτι που μπορεί να αναγνωριστεί σε πολυωνυμικό χρόνο), αποτελεί ένα εύκολο στιγμιότυπο του προβλήματος εύρεσης ε -ισορροπιών Nash παιγνίων διπίνακα. Προφανώς, η χρονική πολυπλοκότητα του υπολογισμού μιας ε -ισορροπίας Nash εξαρτάται απ' το πόσο μεγάλη είναι η βαθμίδα του παιγνίου, οπότε τα παίγνια με χαμηλή σταθερή βαθμίδα θεωρούνται τα πλέον εύκολα στιγμιότυπα του προβλήματος.

2.3.2 Αμοιβαία Κοίλα Παίγνια

Οι Κοντογιάννης και Σπυράκης [33] παραθέτουν ένα τετραγωνικό πρόγραμμα, ισοδύναμο με το πρόβλημα εύρεσης ισορροπίας Nash ενός δεδομένου παιγνίου διπίνακα $\langle R, C \rangle$ με $R, C \in \mathbb{R}^{m \times n}$, του οποίου η αντικειμενική συνάρτηση ορίζεται στο

πολύεδρο των συσχετισμένων ισορροπιών του παιγνίου. Το πρόγραμμα αυτό ορίζεται ως (KSQP):

$$\min \lambda g_R(W) + (1 - \lambda) g_C(W), \text{ subject to } W \in CE(R, C)$$

όπου:

$$g_R(W) = \sum_{i \in [m]} \sum_{j \in [n]} W_{i,j} R_{i,j} - \mathbf{x}(W)^T R \mathbf{y}(W), \forall i \in [m]$$

$$g_C(W) = \sum_{i \in [m]} \sum_{j \in [n]} W_{i,j} C_{i,j} - \mathbf{x}(W)^T C \mathbf{y}(W), \forall j \in [n]$$

Ένας ολικός ελαχιστοποιητής του (KSQP), $W^* \in CE(R, C)$, μηδενίζει τόσο το $g_R(W)$, όσο και το $g_C(W)$, οι οποίες εκφράζουν το κέρδος του παίκτη αν αποκλίσει απ' την συσχετισμένη στρατηγική W και ακολουθήσει την περιθωρία της στρατηγική. Για τον παίκτη γραμμής, η περιθωρία στρατηγική είναι η $\mathbf{x}(W) = (\sum_{i \in [n]} W_{i,i})_{i \in [m]}$ και για τον παίκτη στήλης είναι η $\mathbf{y}(W) = (\sum_{k \in [m]} W_{k,j})_{j \in [n]}$.

Έστω τώρα μια βαθμωτή παράμετρος $\lambda \in (0,1)$ για την οποία ορίζουμε τον πίνακα $Z(\lambda) = \lambda R + (1 - \lambda)C$, και η διγραμμική μορφή $H_\lambda(x, y) = x^T Z(\lambda) y$. Οι Κοντογιάννης και Σπυράκης ορίζουν ένα παίγνιο διπίνακα $\langle R, C \rangle$ ως *αμοιβαία κοίλο* αν και μόνο αν υπάρχει ένα τουλάχιστον $\lambda \in (0,1)$ για το οποίο η $H_\lambda(x, y)$ είναι κοίλη συνάρτηση του $(x, y) \in \Delta_m \times \Delta_n$ [33]. Θεωρώντας, τώρα, την εναλλακτική διατύπωση της αντικειμενικής συνάρτησης του (2.1) ως $G_\lambda(W) = Z(\lambda) * W - H_\lambda(x(W), y(W))$, αντιλαμβανόμαστε ότι ένα αμοιβαία κοίλο παίγνιο αντιστοιχεί σε ένα κυρτό τετραγωνικό πρόγραμμα που προκύπτει από το (KSQP) μέσω μιας απλής μετατροπής. Το γεγονός ότι μπορούμε να βρούμε έναν ολικό ελαχιστοποιητή ενός κυρτού τετραγωνικού προγράμματος σε πολυωνυμικό χρόνο, συνεπάγεται τη δυνατότητα εύρεσης μιας ισορροπίας Nash ενός αμοιβαία κοίλου παιγνίου $\langle R, C \rangle$, $R, C \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ σε πολυωνυμικό χρόνο.

Μπορούμε να αναγνωρίσουμε αν ένα παίγνιο διπίνακα είναι αμοιβαία κοίλο σε πολυωνυμικό χρόνο, με την επίλυση ενός απλού γραμμικού συστήματος. Το $\langle R, C \rangle$

είναι αμοιβαία κοίλο αν και μόνο αν υπάρχει μια λύση $(\lambda^*, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ για το γραμμικό σύστημα [33]:

$$\lambda R + (1 - \lambda)C = [\mathbf{a} \quad \cdots \quad \mathbf{a}] + \begin{bmatrix} \mathbf{b}^T \\ \vdots \\ \mathbf{b}^T \end{bmatrix}$$

Επιπρόσθετα, αυτό σημαίνει ότι ο πίνακας $Z(\lambda^*)$ που διαμορφώνεται από τα δεδομένα ενός αμοιβαία κοίλου παιγνίου, έχει βαθμίδα το πολύ ίση με 2 [26].

2.3.3 Παίγνια με Θετικά Ημιορισμένο Άθροισμα Πινάκων Ωφελειών

Οι Alon et al [5] παραθέτουν ένα πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικό σχήμα για παίγνια των οποίων το άθροισμα των πινάκων είναι θετικά ημιορισμένος πίνακας. Ένας συμμετρικός πίνακας $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι θετικά ημιορισμένος αν ισχύει ότι $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}: \mathbf{x}^T Z \mathbf{x} \geq 0$ [50]. Μια ιδιότητα αυτών των πινάκων είναι ότι όλες οι ιδιοτιμές τους είναι μη αρνητικές. Χρησιμοποιούμε αυτή την ιδιότητα για να επαληθεύσουμε σε πολυωνυμικό χρόνο αν ένας πίνακας είναι θετικά ημιορισμένος, εξετάζοντας το πρόσημο της μικρότερου μεγέθους ιδιοτιμής του. Ο αλγόριθμός τους βασίζεται στην κατασκευή ενός ε -net με μικρό μέγεθος για την προσέγγιση της διγραμμικής μορφής του (NEQP) (ενότητα 2.2.1).

Θεωρούμε ένα παίγνιο διπίνακα (R, C) με $R, C \in [-1, 1]^{n \times n}$, για το οποίο ο πίνακας $Z := R + C$ είναι θετικά ημιορισμένος, οπότε υπάρχει μια παραγοντοποίηση του ως $Z = BB^T$, με $B \in \mathbb{R}^{n \times k}$. Θεωρούμε ένα στοιχείο του κυρτού περιβλήματος του χώρου στηλών του B , $\mathbf{y} \in \text{conv}(B)$. Αυτός ο χώρος έχει διάσταση k . Υποθέτουμε – χωρίς βλάβη της γενικότητας – ότι οι συνιστώσες του \mathbf{y} έχουν διαφορετικά μεγέθη.

Με βάση αυτή την υπόθεση θεωρούμε τα σύνολα $b_i := \left\{ i \mid \frac{1}{2^j} \leq |y_i| \leq \frac{1}{2^{j-1}} \right\}$,

$i \in [m - 1]$ και $b_m := \left\{ i \mid |y_i| \leq \frac{1}{2^{m-1}} \right\}$, όπου $m := \lceil \log(\sqrt{k}) \rceil$, τα οποία έχουν τους

πληθικούς αριθμούς $N_{b_j} = \left| \left\{ i \mid \frac{1}{2^j} \leq |y_i| \leq \frac{1}{2^{j-1}} \right\} \right|$, $i \in [m - 1]$ και

$N_{b_m} = \left\{ i \mid |y_i| \leq \frac{1}{2^{m-1}} \right\}$. Ορίζουμε το διάνυσμα $\mathbf{p} := (N_{b_1}, \dots, N_{b_m})$ ως το περίγραμμα του διανύσματος \mathbf{y} . Τώρα, για μια κατάλληλα επιλεγμένη παράμετρο d θεωρούμε ότι τα σύνολα $b_i, i \in [m]$ περιέχουν όλα τα διακριτά πολλαπλάσια του ε/\sqrt{d} που βρίσκονται στα όρια που τα ορίζουν. Αυτό σημαίνει ότι, δεδομένου ενός $\mathbf{y} \in \text{conv}(\mathbf{B})$, υπάρχει ένα περίγραμμα \mathbf{p} το οποίο αντιστοιχεί σε ένα διάνυσμα $\bar{\mathbf{y}}$ που όλες οι συνιστώσες του είναι διακριτά πολλαπλάσια του ε/\sqrt{d} , τέτοιο ώστε να ισχύει $\|\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}\|_\infty \leq \varepsilon/\sqrt{d}$, κάτι που συνεπάγεται ότι $\|\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}\|_2 \leq \varepsilon$.

Αποδεικνύεται [5], ότι το πλήθος όλων των δυνατών περιγραμμάτων είναι $2^{O(d)}$, ενώ το ίδιο ισχύει και για το πλήθος των δυνατών αναθέσεων διακριτών πολλαπλασίων του ε/\sqrt{d} στα σύνολα $b_i, i \in [m]$, που δημιουργούν ένα περίγραμμα, ανεξάρτητα του πίνακα \mathbf{B} . Άρα, αρκεί να δημιουργήσουμε όλα τα δυνατά περιγράμματα και για το καθένα απ' αυτά να δημιουργήσουμε όλα τα δυνατά πολλαπλάσια του ε/\sqrt{d} , ούτως ώστε να δημιουργήσουμε όλα τα διανύσματα με συνιστώσες που είναι διακριτά πολλαπλάσια του ε/\sqrt{d} , $\bar{\mathbf{y}}$, και να ορίσουμε το σύνολο τους, \mathcal{S} , με $|\mathcal{S}| = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^d 2^{O(d)} = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{O(d)}$ που είναι το ζητούμενο ε -net για τον \mathbf{Z} .

Επανερχόμαστε στο παίγνιο διπίνακα $\langle \mathbf{R}, \mathbf{C} \rangle$ που θεωρήσαμε προηγουμένως. Παραγοντοποιούμε τον πίνακα \mathbf{Z} ως $\mathbf{B}\mathbf{B}^T$, ορίζουμε $d := 9 \log n / \left[\left(\frac{\varepsilon}{6}\right)^2 - \left(\frac{\varepsilon}{6}\right)^3 \right]$ και δημιουργούμε έναν τυχαίο πίνακα $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n \times d}$ που τα στοιχεία του είναι ανεξάρτητες και ομοιόμορφα κατανομημένες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την $N(0, 1/k)$. Έτσι, ορίζουμε τον πίνακα $\mathbf{V} := \mathbf{B}\mathbf{R}$. Με τον αλγόριθμο κατασκευής ε -net για θετικά ημισορισμένους πίνακες, κατασκευάζουμε ένα $\left(\frac{\varepsilon}{6\sqrt{d}}\right)$ -net, \mathcal{S} , για τον \mathbf{V} , το οποίο προσεγγίζει τα στοιχεία του $\text{conv}(\mathbf{V})$ ως προς την l_∞ -νόρμα. Λόγω της επιλογής του d , ξέρουμε ότι το \mathcal{S} θα έχει το μικρό μέγεθος που θέλουμε. Έχοντάς το, βρίσκουμε

μια ε -ισορροπία Nash του (R, C) , επιλύοντας το ακόλουθο κυρτό πρόγραμμα, $\forall \tilde{\mathbf{y}} \in S$, και επιστρέφοντας τα ζεύγη (\mathbf{x}, \mathbf{y}) που κάνουν την αντικειμενική συνάρτηση το πολύ $\varepsilon/2$.

$$\begin{aligned} (\text{PSDNE}(\tilde{\mathbf{y}})): \quad & \min \max_i R_{i\cdot} \mathbf{y} + \max_j C_{\cdot j}^T \mathbf{x} - \mathbf{x}^T V \tilde{\mathbf{y}} \\ & \text{subject to } (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Delta_m \times \Delta_n, \|V\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{y}}\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{6\sqrt{d}} \end{aligned}$$

Η παραγοντοποίηση $R + C = BB^T$ μπορεί να γίνει σε πολυωνυμικό χρόνο (αν ο πίνακας $R + C$ είναι θετικά ορισμένος αρκεί να υπολογίσουμε την τετραγωνική ρίζα του, αλλιώς μπορούμε να υπολογίσουμε την αποσύνθεση SVD του, $R + C = U\Sigma V^T$ και να ορίσουμε $B = U\Sigma^{1/2}$). Εφόσον για κάθε στοιχείο του S επιλύουμε το κυρτό πρόγραμμα (PSDNE), για το οποίο απαιτείται χρόνος $O(m^3 + n^3 + m^2n^2)$ (ενότητα 2.5.3), και το S έχει $\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{O(d)}$ στοιχεία, ο χρόνος εκτέλεσης χειρότερης περίπτωσης του αλγορίθμου NE_FOR_PSD_GAMES είναι $\left[\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{O(d)} O(m^3 + n^3 + m^2n^2)\right]$.

2.4 Μέτρα Πολυπλοκότητας Πίνακα

Κατά τα φαινόμενα, ο λόγος για τον οποίο οι υποκατηγορίες παιγνίων διπίνακα που παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη ενότητα έχουν εύκολα στιγμιότυπα για το πρόβλημα εύρεσης ισορροπιών Nash, είναι ότι μια συνάρτηση του αθροίσματος των πινάκων ωφέλειάς τους δίνει έναν «απλό» πίνακα ως προς κάποιο μέτρο πολυπλοκότητας. Στην περίπτωση της βαθμίδας πίνακα ως μέτρου της πολυπλοκότητάς του, θεωρούμε πως ένας πίνακας είναι «απλός» όταν έχει βαθμίδα πολύ μικρότερη απ' τη μικρότερη των διαστάσεών του και «πολύπλοκός» όταν η βαθμίδα του προσεγγίζει αυτή τη διάσταση του. Οι πρώτες συστηματικές έρευνες των μέτρων πολυπλοκότητας πινάκων έγιναν στις εργασίες [52] και [37],

Πίνακας 2.3: Ο αλγόριθμος των Alon et al [5] για την εύρεση ε -ισορροπιών Nash σε παίγνια που το άθροισμα των πινάκων ωφελειών τους είναι θετικά ημιορισμένος πίνακας.

NE_FOR_PSD_GAMES(R, C, ε)	
Είσοδος: παίγνιο διπίνακα $\langle R, C \rangle$ με $R, C \in [-1,1]^{n \times n}$, $\varepsilon > 0$	
Προϋπόθεση: ο $R + C$ είναι θετικά ημιορισμένος πίνακας	
1.	$d := 9 \log n / \left[\left(\frac{\varepsilon}{6} \right)^2 - \left(\frac{\varepsilon}{6} \right)^3 \right]$
2.	$R = \text{RANDN}(n, d, 0, 1/k)$ $\forall i, j: R_{ij} \sim N(0, 1/k)$
3.	$R + C = BB^T, V := BR$
4.	Δημιούργησε ένα $\left(\frac{\varepsilon}{6\sqrt{d}} \right)$ -net, S , για τον V
5.	Για κάθε $\tilde{\mathbf{y}} \in S$, λύσε το (PSDNE($\tilde{\mathbf{y}}$))
a.	$NE_\varepsilon(R, C) =$ $\{(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \mid \max_i R_{i*} \mathbf{y} + \min \max_j C_{*j}^T \mathbf{x} - \mathbf{x}^T V \tilde{\mathbf{y}} \leq \varepsilon/2\}$
6.	Επίστρεψε το $NE_\varepsilon(R, C)$
Εξοδος: Σύνολο ε -ισορροπιών Nash του $\langle R, C \rangle$, $NE_\varepsilon(R, C)$	

όπου εξετάστηκε κυρίως η πολυπλοκότητα των πινάκων προσήμων ως προς τέσσερα μέτρα πολυπλοκότητας: τη βαθμίδα πίνακα, τη διαστατική πολυπλοκότητα πίνακα, τη νόρμα γ_2 πίνακα και την πολυπλοκότητα περιθωρίου πίνακα. Στις δύο επόμενες παραγράφους, θα παρουσιάσουμε τα δύο μέτρα πολυπλοκότητας πινάκων που θα χρησιμοποιήσουμε για το δικό μας αποτέλεσμα διεύρυνσης της υποκλάσης παιγνίων διπίνακα με εύκολα στιγμιότυπα για το πρόβλημα υπολογισμού μιας ε -ισορροπίας Nash, την προσεγγιστική βαθμίδα πίνακα και τη νόρμα γ_2 πίνακα. Προϋποθέτουμε μια στοιχειώδη εξοικείωση του αναγνώστη με βασικές έννοιες της γραμμικής άλγεβρας.

2.4.1 Βαθμίδα και Προσεγγιστική Βαθμίδα Πίνακα

Η βαθμίδα ενός πραγματικού πίνακα είναι μια από τις θεμελιώδεις έννοιες της γραμμικής άλγεβρας. Συνήθως, ορίζουμε ως βαθμίδα πίνακα τον αριθμό των γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του ή, ισοδύναμα, τη διάσταση του χώρου στηλών του [53]. Ένας περισσότερο ενδιαφέρων ορισμός της βαθμίδας πίνακα για τη σχεδίαση αλγορίθμων, προκύπτει από την ανάλυση ιδιάζουσων τιμών ενός πίνακα. Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ και έστω η αποσύνθεση ιδιάζουσων τιμών του, $A = U\Sigma V^T$, όπου $U \in \mathbb{R}^{m \times k}$ ο πίνακας των αριστερών ιδιάζοντων διανυσμάτων u_i , $\Sigma \in \mathbb{R}^{k \times k}$ ο διαγώνιος πίνακας ιδιάζουσών τιμών, σ_i , και $V \in \mathbb{R}^{n \times k}$ ο πίνακας των δεξιών ιδιάζοντων διανυσμάτων, v_i , $i \in [k]$ [53]. Αυτή η αποσύνθεση μας δίνει τη βαθμίδα του A ως τον αριθμό των μη-μηδενικών ιδιάζουσων τιμών του, k . Θεωρούμε – χωρίς βλάβη της γενικότητας – ότι οι ιδιάζουσες τιμές είναι διατεταγμένες σε φθίνουσα σειρά. Μπορούμε λοιπόν να γράφουμε τον A ως άθροισμα k πινάκων βαθμίδας ίσης με 1 με τον ακόλουθο τρόπο:

$$A = u_1 \sigma_1 v_1^T + \dots + u_k \sigma_k v_k^T \quad (2.2)$$

Έχοντας το άθροισμα (2.2), μπορούμε να προσεγγίσουμε τον A με έναν απλούστερο, δηλαδή χαμηλότερης βαθμίδας $l < k$, πίνακα $\bar{A} = \sum_{i=1}^l u_i \sigma_i v_i^T$, αποκόπτοντας τους τελευταίους $k - l$ όρους του (2.2). Αυτή η μέθοδος ονομάζεται προσέγγιση χαμηλής βαθμίδας (ενότητα 2.5.5 του [25], [60]). Το σφάλμα προσέγγισης που δίνει η μέθοδος αποτιμάται είτε στην l_2 -νόρμα πινάκων και είναι σ_{k+1} [25], ή στη νόρμα Frobenius

πινάκων και είναι $\sqrt{\sum_{i=l+1}^k \sigma_i^2}$ [60]. Μπορούμε λοιπόν να χρησιμοποιήσουμε την

παραπάνω προσέγγιση σε προβλήματα των οποίων η υπολογιστική πολυπλοκότητα εξαρτάται από την βαθμίδα του πίνακα αναπαράστασης των δεδομένων για να αντικαταστήσουμε αυτόν τον πίνακα με έναν προσεγγιστικό του πίνακα χαμηλής βαθμίδας, τον οποίο υπολογίζουμε σε πολυωνυμικό χρόνο μέσω της ανάλυσης ιδιάζουσων τιμών του αρχικού πίνακα ([25], ενότητα 5.4.5), και να πάρουμε μια προσεγγιστική λύση του στιγμιότυπου.

Σε κάποια προβλήματα, χρειαζόμαστε μια ισχυρότερη μέθοδο προσέγγισης χαμηλής βαθμίδας, στην οποία το σφάλμα προσέγγισης πρέπει να εκφράζεται ως συνάρτηση του μεγέθους των στοιχείων. Σε αυτή τη μέθοδο, αντί της νόρμας Frobenius χρησιμοποιούμε την p -νόρμα με $p = \infty$, η οποία, για έναν πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, ορίζεται ως $\|A\|_\infty = \max_{i,j} \{A_{ij}\}$. Το πρόβλημα προσέγγισης χαμηλής βαθμίδας στην p -νόρμα με $p = \infty$ λέγεται πρόβλημα υπολογισμού της προσεγγιστικής βαθμίδας πίνακα (ε -βαθμίδας πίνακα) [5]

Ορισμός 5. Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ και $\varepsilon > 0$. Η ε -βαθμίδα του A ορίζεται ως

$$\text{rank}_\varepsilon(A) := \min_{B \in \mathbb{R}^{m \times n}} \{\text{rank}(B) \mid \|A - B\|_\infty \leq \varepsilon\}$$

Μια αντικειμενική δυσκολία του υπολογισμού της ε -βαθμίδας πίνακα είναι ότι δεν ξέρουμε ούτε κάποιον πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμο για το πρόβλημα, ούτε αν το πρόβλημα είναι NP-δύσκολο. Το 2008, οι Lee και Shraibman δημοσίευσαν έναν πολυωνυμικού χρόνου τυχαιοκρατικό αλγόριθμο του τύπου Monte-Carlo για τον υπολογισμό μιας λογαριθμικής (ως προς τις διαστάσεις του πίνακα) προσέγγισης της ε -βαθμίδας ενός πίνακα προσήμων [34]. Ο αλγόριθμός τους τροποποιείται πολύ εύκολα για να υπολογίζει λογαριθμικές προσεγγίσεις της ε -βαθμίδας πραγματικών πινάκων [6]. Θα αναπτύξουμε αυτό τον αλγόριθμο λεπτομερώς στην ενότητα 3.2.

2.4.2 Νόρμα γ_2 Πίνακα

Η νόρμα γ_2 ενός πίνακα εισήχθη σαν μέτρο της πολυπλοκότητάς πινάκων από τους Linial et al [37] και αποτιμά την πολυπλοκότητα ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ με κριτήριο τη μέγιστες l_2 -νόρμες μεταξύ των γραμμών των πινάκων μιας παραγοντοποίησης του, UV^T , οι πίνακες της οποίας έχουν αριθμό στηλών $\text{rank}(A)$ (όσο μικρότερη, τόσο πιο απλός θεωρείται ο πίνακας). Ανάμεσα στις πολλές εφαρμογές που έχει βρει η νόρμα γ_2 στη θεωρητική πληροφορική, βρίσκεται η εφαρμογή της στη

μεγιστοποίηση περιθωρίου ταξινομητών [52] και στην εύρεση ορίων για την κβαντική επικοινωνιακή πολυπλοκότητα [38]. Η δημοτικότητα αυτού του μέτρου πολυπλοκότητας πίνακα οφείλεται και στη δυνατότητα διατύπωσής του ως θετικά ημιορισμένου προγράμματος, καθιστώντας τον υπολογισμό του εφικτό σε πολυωνυμικό χρόνο ([6], [37]). Από τους πολλούς διαφορετικούς ορισμούς της νόρμας γ_2 , ο πιο χρήσιμος για υπολογιστικούς σκοπούς είναι ο ορισμός της σαν νόρμα παραγοντοποίησης.

Ορισμός 6. Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Η νόρμα γ_2 του A ορίζεται ως:

$$\gamma_2(A) := \min_{U,V} \{(\|U\|_{2 \rightarrow \infty}^2 \|V\|_{2 \rightarrow \infty}^2) \mid A = UV^T\}$$

όπου $\|A\|_{2 \rightarrow \infty}$ η νόρμα τελεστή που ισούται με τη μέγιστη l_2 -νόρμα μεταξύ των γραμμών του X .

Ορισμός 7. Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ και $\varepsilon \geq 0$. Η νόρμα γ_2^ε του A ορίζεται ως:

$$\gamma_2^\varepsilon(A) := \min_{Y: \|A-Y\|_\infty \leq \varepsilon} \gamma_2(Y).$$

Για τους πίνακες προσήμων, προτιμάται η πολλαπλασιαστική προσέγγιση της νόρμας γ_2 : για πίνακα $A \in \{-1, +1\}^{m \times n}$ και $a \geq 1$: $\gamma_2^a(A) := \min_{Y: \mathbf{1}_{m \times n} \leq A \circ Y \leq a \mathbf{1}_{m \times n}} \gamma_2(Y)$.

Αυτός ο ορισμός επιβάλλει ότι $A_{i,j} Y_{i,j} \geq 1$.

Οι νόρμες γ_2 και γ_2^ε ενός πίνακα μας ενδιαφέρουν και για τον λόγο ότι δίνουν ισχυρά φράγματα της βαθμίδας και της προσεγγιστικής του βαθμίδας, αντίστοιχα. Συγκεκριμένα, για έναν πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις [6]:

$$\text{rank}(A) \geq \left(\frac{\gamma_2(A)}{\|A\|_\infty} \right)^2$$

$$\text{rank}_\varepsilon(A) \geq \left(\frac{\gamma_2^\varepsilon(A)}{\|A\|_\infty + \varepsilon} \right)^2$$

$$\text{rank}_{\delta+\varepsilon}(A) \leq 8 \ln(4mn) \frac{\gamma_2^\varepsilon(A)}{\delta^2}, \delta \geq 0$$

Δεν υπάρχει κάποιο γνωστό φράγμα της βαθμίδας ενός πίνακα από τη νόρμα γ_2^a για γενικούς πίνακες. Για τους πίνακες προσήμων ισχύει ότι $\gamma_2^a(A) \leq \gamma_2(A) \leq \sqrt{\text{rank}(A)}$, $a \geq 1$, όπου γ_2^a ο πολλαπλασιαστικός ορισμός της νόρμας γ_2 πίνακα [38]. Τέλος, δε γίνεται η νόρμα γ_2 ενός πίνακα να δώσει άνω όριο για τη βαθμίδα του. Σαν αντιπαράδειγμα δίνουμε τον ταυτοτικό πίνακα διάστασης $n \times n$, για τον οποίο ισχύει $\gamma_2(I_n) = 1$ και $\text{rank}(I_n) = n$.

2.5 Θέματα Θεωρίας Βελτιστοποίησης

Το επιστημονικό πεδίο της *βελτιστοποίησης* έχει σαν αντικείμενο τη μελέτη των προβλημάτων στα οποία καλούμαστε να βρούμε μια *βέλτιστη λύση*, δηλαδή μια λύση που να ελαχιστοποιεί ή να μεγιστοποιεί κατά περίπτωση μια συνάρτηση και να υπόκειται –ή να μην υπόκειται - σε κάποιους περιορισμούς, ανάλογα με την φύση του προβλήματος.

Η γενική μορφή ενός προβλήματος βελτιστοποίησης, σαν πρόβλημα ελαχιστοποίησης, μπορεί να οριστεί ως ακολούθως (MP):

$$\min f(\mathbf{x}) \text{ subject to } c_i(\mathbf{x}) = 0, i \in E, c_j(\mathbf{x}) \geq 0, j \in I$$

όπου η συνάρτηση f καλείται αντικειμενική συνάρτηση, το διάνυσμα $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ διάνυσμα μεταβλητών απόφασης ή παραμέτρων, οι συναρτήσεις $c_i(\cdot)$ με $i \in E$ ισοτικοί περιορισμοί και οι συναρτήσεις $c_j(\cdot)$ με $j \in I$ ανισοτικοί περιορισμοί. Με E και I ονομάζουμε τα σύνολα δεικτών για τους ισοτικούς και τους ανισοτικούς περιορισμούς αντίστοιχα. Οι περιορισμοί, όταν υπάρχουν, ορίζουν το σύνολο εφικτών σημείων του προβλήματος που είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της αντικειμενικής συνάρτησης. Μπορούμε να αναδιατυπώσουμε το παραπάνω πρόβλημα σαν πρόβλημα μεγιστοποίησης πολλαπλασιάζοντας την αντικειμενική συνάρτηση με -1 . Ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης λέγεται αλλιώς μαθηματικό πρόγραμμα. Στην περίπτωση που η f , οι $c_i(\cdot)$, $i \in E$ και οι $c_j(\cdot)$, $j \in I$ είναι γραμμικές συναρτήσεις, το πρόβλημα βελτιστοποίησης λέγεται γραμμικό πρόγραμμα. Διαφορετικά, λέγεται μη-γραμμικό πρόγραμμα. Ολικοί ελαχιστοποιητές ενός

προβλήματος ελαχιστοποίησης είναι τα σημεία για τα οποία η αντικειμενική συνάρτηση παίρνει την ελάχιστη τιμή της, στο σύνολο που ορίζουν οι περιορισμοί. Τοπικοί ελαχιστοποιητές ενός προβλήματος ελαχιστοποίησης είναι εκείνα τα σημεία που η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης ελαχιστοποιείται στη γειτονιά του τοπικού ελαχιστοποιητή (ανοικτή σφαίρα ακτίνας $r > 0$ με κέντρο το σημείο που είναι τοπικός ελαχιστοποιητής). Συνήθως, σαν λύση ενός προβλήματος ελαχιστοποίησης ζητάμε έναν ολικό ελαχιστοποιητή του, τον οποίο υπολογίζουμε με μια καθορισμένη ακρίβεια μέσω κάποιου αριθμητικού αλγορίθμου. Για μια εκτενή μελέτη του θέματος, παραπέμπουμε τον αναγνώστη σε εξειδικευμένα συγγράμματα, όπως αυτό των Nocedal και Wright [47].

Στις δύο επόμενες παραγράφους, θα κάνουμε μια συνοπτική επισκόπηση δύο περιοχών της μη-γραμμικής βελτιστοποίησης, έννοιες, τεχνικές και αποτελέσματα των οποίων χρησιμοποιούμε στην παρούσα εργασία: τον τετραγωνικό και τον θετικά ημιορισμένο προγραμματισμό. Ακόμη, θα παρουσιάσουμε μια μέθοδο προσέγγισης της βέλτιστης τιμής ενός τετραγωνικού προγράμματος, αυτή της κατασκευής ε -net για τον πίνακα του τετραγωνικού του όρου, την οποία χρησιμοποιούμε στους αλγορίθμους του κεφαλαίου 3.

2.5.1 Τετραγωνικός Προγραμματισμός και ε -nets

Ο τετραγωνικός προγραμματισμός καλύπτει την υποκατηγορία των προβλημάτων μη γραμμικού προγραμματισμού στα οποία η αντικειμενική συνάρτηση είναι τετραγωνική και οι περιορισμοί είναι γραμμικές συναρτήσεις. Η γενική μορφή ενός τετραγωνικού προγράμματος είναι

$$(QP) \quad \min q(\mathbf{x}) := \frac{1}{2} \mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{c}^T \mathbf{x} \text{ subject to } \mathbf{x} \in F_p := \{\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} \subset \mathbb{R}^n$$

με δεδομένα $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, όπου $Q = Q^T$.

Ένα μαθηματικό πρόγραμμα με γραμμικούς περιορισμούς, του οποίου η αντικειμενική συνάρτηση περιέχει μόνο γραμμικούς και διγραμμικούς όρους (δηλαδή, όρους της μορφής $\mathbf{x}^T Q \mathbf{y}$, για $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$) μετασχηματίζεται εύκολα στο (QP). Για να έχει το (QP) λύση, δηλαδή ολικό ελαχιστοποιητή, αρκεί το σύνολο

εφικτών σημείων του, F_p , του να είναι πολύτοπο. Η ανάπτυξη πολλών αποτελεσμάτων της παρούσας εργασίας στηρίζεται στην έννοια του ε -ελαχιστοποιητή ενός τετραγωνικού προγράμματος. Ένα σημείο $\mathbf{x}^\varepsilon \in F_p$ είναι ε -ελαχιστοποιητής του (QP) αν $|q(\mathbf{x}^*) - q(\mathbf{x}^\varepsilon)| \leq \varepsilon$, όπου \mathbf{x}^* ένας ολικός ελαχιστοποιητής του προγράμματος. Για μια λεπτομερή επισκόπηση του τετραγωνικού προγραμματισμού, παραπέμπουμε στο κεφ. 16 του [47].

Στην περίπτωση όπου ένα τετραγωνικό πρόγραμμα είναι κυρτό, υπάρχουν αλγόριθμοι που το λύνουν σε πολυωνυμικής τάξης χρόνο (π.χ. ο αλγόριθμος εσωτερικών σημείων των Ye και Tse [59]). Στην γενική του περίπτωση, έχει αποδειχθεί ότι ο τετραγωνικός προγραμματισμός ανήκει στην κλάση των NP -πλήρων προβλημάτων ([42], [55]). Η εξέταση του αν ένα τετραγωνικό πρόγραμμα είναι κυρτό ή μη-κυρτό γίνεται μέσω μελέτης του αν ο πίνακας του, Q , είναι θετικά ημιορισμένος, αρνητικά ημιορισμένος ή αόριστος, κάτι που διαπιστώνεται σε πολυωνυμικό χρόνο μέσω του ελέγχου του πρόσημου της μικρότερης ιδιοτιμής του πίνακα [60]. Στην περίπτωση που ο πίνακας Q ενός τετραγωνικού προγράμματος είναι αόριστος αλλά έχει σταθερή βαθμίδα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον προσεγγιστικό αλγόριθμο του Βαβάση [56] για να υπολογίσουμε μια προσεγγιστική λύση αυτού του τετραγωνικού προγράμματος.

Ας θεωρήσουμε τώρα μια απλούστευση του (QP) , όπου η αντικειμενική συνάρτηση γίνεται $\mathbf{x}^T Q \mathbf{y}$. Μπορούμε να υπολογίσουμε έναν 2ε -ελαχιστοποιητή αυτού του τετραγωνικού προγράμματος κατασκευάζοντας ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων S με την ιδιότητα $\forall \mathbf{x} \in \text{conv}(A), \exists \bar{\mathbf{x}} \in S: \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|_\infty \leq \varepsilon$, όπου $\text{conv}(A)$ το κυρτό περίβλημα του χώρου στηλών του A . Το σύνολο S λέγεται ε -net για τον A και το μέγεθός του συμβολίζεται με $N_\varepsilon(A)$ και καλείται αριθμός κάλυψης του πίνακα A . Αφού το ε -net S είναι μια προσέγγιση του χώρου στηλών του A , ο οποίος έχει διάσταση $d = \text{rank}(A)$, έχουμε ένα στοιχειώδες άνω φράγμα του $N_\varepsilon(A)$ που είναι $(1/\varepsilon)^{O(d)}$. Αποκτάμε εύκολα αυτό το φράγμα κατασκευάζοντας το απλούστερο

δυνατό ε -net για τον A με τη δημιουργία ενός πλέγματος υπερκύβων πλευράς μήκους ε που καλύπτει το κυρτό περίβλημα του χώρου στηλών του, διάστασης d .

Πόσο μικρός μπορεί να γίνει ο αριθμός $N_\varepsilon(A)$; Στο [6] δίνονται ισχυρότερα άνω φράγματα του $N_\varepsilon(A)$, τα οποία βασίζονται στη νόρμα γ_2 και στην ε -βαθμίδα του A . Η κατασκευή ενός μικρού ε -net για τον A με χρήση της ε -βαθμίδας του θα παρουσιαστεί στην ενότητα 3.3.

2.5.2 Θετικά Ημιορισμένος Προγραμματισμός

Ο θετικά ημιορισμένος προγραμματισμός καλύπτει την υποκατηγορία προγραμμάτων μη-γραμμικού προγραμματισμού, στην οποία η αντικειμενική συνάρτηση είναι γραμμική και βελτιστοποιείται πάνω στην τομή του κώνου των συμμετρικών και θετικά ημιορισμένων πινάκων κι ενός επιπέδου (αυτός ο τύπος εφικτής περιοχής καλείται φασματόεδρο). Η γενική μορφή ενός ημιορισμένου προγράμματος είναι

$$\min_{X \in \mathcal{S}^n} \text{tr}(CX) \text{ subject to } \text{tr}(A_k X) \leq b_k, k \in [l], X \succeq 0$$

για δεδομένα $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b_k \in \mathbb{R}$, $k \in [l]$, ενώ $\mathcal{S}^n := \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid X = X^T\}$. Ο περιορισμός $X \succeq 0$ σημαίνει πως θέλουμε η λύση, X^* ,

να είναι θετικά ημιορισμένος πίνακας. Για μια επισκόπηση του θετικά ημιορισμένου προγραμματισμού και κάποιων σημαντικών εφαρμογών του, παραπέμπουμε στο αναγνωρισμένο από τους ειδικούς του πεδίου σύγγραμμα των Boyd και Vanderbherge [11].

Όλα τα θετικά ημιορισμένα προγράμματα είναι κυρτά και μια λύση τους, δηλαδή ένας ολικός ελαχιστοποιητής τους, μπορεί να υπολογιστεί σε πολυωνυμικό χρόνο χρησιμοποιώντας κάποιον αλγόριθμο εσωτερικών σημείων για τον ημιορισμένο προγραμματισμό, όπως αυτοί των Alizadeh et al [4].

2.5.3 Πολυπλοκότητα χρόνου εύρεσης ολικού ελαχιστοποιητή ενός κυρτού προγράμματος

Η πλειοψηφία των μαθηματικών προγραμμάτων που είναι επιλύσιμα σε πολυωνυμικό χρόνο είναι κυρτά προγράμματα. Για να είναι ένα μαθηματικό πρόγραμμα κυρτό, θα πρέπει η αντικειμενική του συνάρτηση να είναι κυρτή συνάρτηση και το σύνολο εφικτών σημείων του κυρτό σύνολο [11]. Θυμίζουμε ότι μια συνάρτηση $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι κυρτή όταν

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in [0,1]: f(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda)f(\mathbf{y}),$$

και ότι ένα σύνολο $S \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι κυρτό όταν

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in S, \forall \lambda \in [0,1]: \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y} \in S.$$

Θεωρώντας ένα κυρτό πρόγραμμα της γενικής μορφής (MP), το οποίο έχει n μεταβλητές απόφασης και $m = |I|$ περιορισμούς που είναι όλοι ανισοτικοί, η πολυπλοκότητα χρόνου εύρεσης ενός ολικού ελαχιστοποιητή του στη χειρίστη περίπτωση είναι χονδρικά $\max\{n^3, n^2m, F\}$, όπου F είναι η πολυπλοκότητα χρόνου χειρίστης περίπτωσης για την αποτίμηση κάποιας συνάρτησης περιορισμού, της πρώτης παραγώγου της και της δεύτερης παραγώγου της ([11], ενότητα 1.3.1). Στην πράξη, λόγω του ότι ένας ολικός ελαχιστοποιητής μπορεί να έχει μεγάλο πλήθος δεκαδικών ψηφίων στις συνιστώσες του και γι' αυτό ενδιαφερόμαστε για μια προσεγγιστική λύση, η πολυπλοκότητα χρόνου εξαρτάται και από μια παράμετρο προσέγγισης της λύσης, που καθορίζει το πλήθος δεκαδικών ψηφίων της που θα επιστραφούν.

2.6 Θέματα Κυρτής Γεωμετρίας και Δικτυωτών

Κλείνουμε το παρόν κεφάλαιο, παρουσιάζοντας κάποιες σημαντικές έννοιες από τα πεδία της κυρτής γεωμετρίας και των δικτυωτών, πάνω στις οποίες βασίζουμε την παρουσίαση ενός βελτιωμένου αλγορίθμου κατασκευής ε -nets που θα παρουσιάσουμε στο επόμενο κεφάλαιο. Προϋποθέτουμε μια στοιχειώδη εξοικείωση του αναγνώστη με έννοιες μαθηματικής και συναρτησιακής ανάλυσης.

Ορίζουμε ένα σύνολο $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ως ένα κυρτό σώμα αν το K είναι κυρτό και συμπαγές σύνολο διάστασης n . Για δύο σύνολα $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, ορίζουμε το άθροισμα Minkowski τους ως $A + B := \{\mathbf{x} + \mathbf{y} \mid \mathbf{x} \in A, \mathbf{y} \in B\}$. Για ένα κυρτό σώμα K , ορίζουμε το συναρτησιακό Minkowski του ως $\|\mathbf{x}\|_K := \inf\{r \geq 0 \mid \mathbf{x} \in rK\}$. Ένα κυρτό σώμα χαρακτηρίζεται από τον όγκο του, $vol(K)$.

Ένα ελλειψοειδές $E \subset \mathbb{R}^n$ είναι ένα κυρτό σώμα και ορίζεται από ένα διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ και έναν θετικά ημιορισμένο πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ως $E(A, \boldsymbol{\alpha}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid (\mathbf{x} - \boldsymbol{\alpha})^T A (\mathbf{x} - \boldsymbol{\alpha}) \leq 1\}$. Αν $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, τότε $E(A, \mathbf{0}) = E(A)$. Ο όγκος ενός ελλειψοειδούς E ορίζεται ως $vol(E(A, \boldsymbol{\alpha})) = vol(E(A)) := vol(B) \sqrt{\det(A^{-1})}$, όπου $B := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\|_2 \leq 1\}$.

Συνεχίζουμε, ορίζοντας έναν σημαντικό τύπο ελλειψοειδούς, το M -ελλειψοειδές ([5], [16]). Για τον ορισμό του, χρησιμοποιούμε τον ελάχιστο αριθμό κάλυψης, $N(A, B)$, ενός κυρτού σώματος A από αντίγραφα (ή μετατοπίσεις) ενός άλλου κυρτού σώματος B .

Ορισμός 8. Έστω ένα κυρτό σώμα $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Ένα ελλειψοειδές E είναι ένα M -ελλειψοειδές για το K αν ισχύει ότι $N(E, K)N(K, E) \leq 2^{O(n)}$.

Ο Milman, ο οποίος όρισε τα M -ελλειψοειδή, απέδειξε ότι υπάρχει ένα M -ελλειψοειδές για κάθε κυρτό σώμα (παραπέμπουμε στο [16] και στις εκεί αναφορές). Ο υπολογισμός ενός M -ελλειψοειδούς μπορεί να γίνει σε χρόνο $2^{O(n)}$ με τον αλγόριθμο των Dadush et al [16].

Προχωράμε στην παρουσίαση εννοιών από τα δικτυωτά. Ένα δικτυωτό $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^n$ ορίζεται από μια βάση $B = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k)$, αποτελούμενη από $k \leq n$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα. Η ορίζουσα ενός δικτυωτού \mathcal{L} ορίζεται ως $\det(\mathcal{L}) := \sqrt{\det(B^T B)}$. Ένα δικτυωτό \mathcal{L} χαρακτηρίζεται, ως προς ένα κυρτό σώμα K , από τα ακόλουθα μεγέθη:

- Ελαχίστη απόσταση του \mathcal{L} από το K : $\lambda_1(K, \mathcal{L}) := \min_{y \in \mathcal{L} \setminus \{0\}} \|y\|_K$
- Ακτίνα κάλυψης του K από το \mathcal{L} : $\mu(K, \mathcal{L}) = \inf\{s \geq 0 \mid \mathcal{L} + sK = \mathbb{R}^n\}$

Ένας σημαντικός για τις εφαρμογές μας τύπος δικτυωτού είναι το δικτυωτό του Rogers [5]. Για ένα δικτυωτό του Rogers, \mathcal{L} , ως προς ένα κυρτό σώμα K , ισχύει ότι $\mathcal{L} + K = \mathbb{R}^n$.

Ορισμός 9. Για ένα συμμετρικό ως προς το κέντρο του κυρτό σώμα $K \subseteq \mathbb{R}^n$, υπάρχει ένα δικτυωτό διάστασης n , $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^n$, τέτοιο ώστε: $\lambda_1(K, \mathcal{L}) \geq 2/3$ και $\mu(K, \mathcal{L}) \leq 1$. Ένα δικτυωτό που πληροί αυτές τις ιδιότητες, λέγεται δικτυωτό του Rogers.

Ο υπολογισμός της βάσης ενός δικτυωτού που πληροί τις συνθήκες για να χαρακτηριστεί δικτυωτό του Rogers, μπορεί να γίνει σε χρόνο $2^{O(n)}$ με χρήση του αλγορίθμου που προτείνουν οι Alon et al στο [5].

Παραπέμπουμε στο παράρτημα της παρούσας εργασίας για την παρουσίαση αλγορίθμων κατασκευής M-ελλειψοειδών και δικτυωτών του Rogers.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ NASH ΠΑΙΓΝΙΩΝ ΔΙΠΙΝΑΚΑ ΜΕ ΧΡΗΣΗ Ε-NETS

-
- 3.1 Η Νόρμα γ_2 Πίνακα ως Ημιορισμένο Πρόγραμμα
 - 3.2 Προσεγγιστικός Αλγόριθμος Εύρεσης της Προσεγγιστικής Βαθμίδας Πίνακα
 - 3.3 Αποτελεσματική Κατασκευή Σχεδόν Βέλτιστων ε -nets
 - 3.4 Πολυωνυμικού Χρόνου Προσεγγιστικό Σχήμα Εύρεσης Ισορροπιών Nash για Παίγνια Λογαριθμικής Προσεγγιστικής Βαθμίδας
-

3.1 Η Νόρμα γ_2 Πίνακα ως Ημιορισμένο Πρόγραμμα

Ο ορισμός της νόρμας γ_2 (ορισμός 6) μπορεί να αναδιατυπωθεί ως το ακόλουθο ημιορισμένο πρόγραμμα [35]: για έναν πίνακα $Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$,

$$\gamma_2(Z) := \min t \text{ subject to } \begin{bmatrix} W_1 & Z \\ Z^T & W_2 \end{bmatrix} \succcurlyeq 0, \text{diag}(W_1) \leq t, \text{diag}(W_2) \leq t \quad (3.1)$$

Παρομοίως, ο ορισμός της νόρμας γ_2^ε (ορισμός 7) μπορεί να αναδιατυπωθεί ως ημιορισμένο πρόγραμμα: για $\varepsilon \geq 0$ ψάχνουμε έναν ε -ελαχιστοποιητή του (3.1).

Εισάγουμε, λοιπόν, ένα επιπλέον σύστημα γραμμικών περιορισμών στο (3.1):

$$\begin{aligned}
 (\gamma_2\text{SDP}): \quad & \gamma_2^\varepsilon(Z) := \min t \\
 \text{subject to} \quad & \begin{bmatrix} W_1 & B \\ B^T & W_2 \end{bmatrix} \succcurlyeq 0, \\
 & \text{diag}(W_1) \leq t, \\
 & \text{diag}(W_2) \leq t, \\
 & \forall i \in [m], j \in [n]: -\varepsilon \leq Z_{ij} - B_{ij} \leq \varepsilon
 \end{aligned}$$

Θεωρούμε ότι έχουμε μια ρουτίνα $APPROX_GAMMA2(Z, \varepsilon)$ που επιστρέφει μια λύση του παραπάνω ημιορισμένου προγράμματος, για την ευκολότερη παρουσίαση αλγορίθμων στη συνέχεια του κεφαλαίου. Αφού λύσουμε το (γ_2 SDP) για έναν πίνακα Z , μπορούμε να βρούμε την αντίστοιχη παραγοντοποίηση του ως $Z = UV^T$ εφαρμόζοντας παραγοντοποίηση ιδιοτιμών στον ελαχιστοποιητή που μας επιστράφηκε.

3.2 Προσεγγιστικός Αλγόριθμος Εύρεσης της Προσεγγιστικής Βαθμίδας Πίνακα

Μέχρι την στιγμή της συγγραφής της παρούσας εργασίας, δεν είχε δημοσιευτεί κάποιος πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμος υπολογισμού της προσεγγιστικής βαθμίδας πίνακα. Γι' αυτό, χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο τον Lee και Shraibman [34], ο οποίος μας επιστρέφει μια λογαριθμική προσέγγισή της μέσω του υπολογισμού της νόρμας γ_2^ε του πίνακα κι ενός βήματος τυχαίας προβολής.

Τροποποιούμε ελαφρώς αυτό τον αλγόριθμο για να λειτουργεί με είσοδο έναν πίνακα που τα στοιχεία του ορίζονται σ' ένα συνεχές διάστημα. Ο αλγόριθμος των Lee και Shraibman λειτουργεί με είσοδο έναν πίνακα προσήμων $Z \in \{-1,1\}^{m \times n}$, ενώ ο δικός μας με έναν γενικότερο πίνακα $Z \in [-1,1]^{m \times n}$ (μπορεί να δουλέψει και με είσοδο έναν πίνακα $Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$, εφαρμόζοντας κλιμάκωση στα στοιχεία του). Ο αλγόριθμος παρουσιάζεται συνοπτικά στον πίνακα 1.

Θεώρημα 2. [6] Έστω Z ένας $m \times n$ πίνακας με $\gamma_2^\varepsilon(Z) = \gamma$, $\varepsilon > 0$. Για οποιοδήποτε

$\delta > 0$ ισχύει

$$\text{rank}_{\varepsilon+\delta}(Z) \leq \frac{8 \ln(4mn) \gamma^2}{\delta^2}$$

Επιπλέον, μπορούμε να υπολογίσουμε τυχειοκρατικά σε πολυωνυμικό χρόνο τον πίνακα Z' , που αποδεικνύει ότι η $\text{rank}_{\varepsilon+\delta}(Z)$ έχει το παραπάνω άνω όριο.

Απόδειξη: Θεωρούμε την παραγοντοποίηση $Z = UV^T$, με U έναν πίνακα $m \times k$ και V έναν πίνακα $n \times k$, που δίνει την $\gamma_2^\varepsilon(Z)$. Για μια τιμή $\delta > 0$, ορίζουμε

$r := 8\gamma^2 \ln(4mn)/\delta^2$. Δημιουργούμε τον τυχαίο πίνακα R , διάστασης $k \times r$, τα στοιχεία του οποίου είναι ανεξάρτητες και πανομοιότυπα κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την $N(0,1)$. Κατασκευάζουμε έτσι τον πίνακα $Z' := URR^T V^T$. Προφανώς, ισχύει ότι $\text{rank}(Z') \leq r$ κάτι που σημαίνει ότι $\text{rank}(Z') = O(\log(mn))$. Για να πιστοποιήσουμε ότι ο Z' δίνει το ζητούμενο $\text{rank}_{\varepsilon+\delta}(Z)$, αρκεί να δείξουμε ότι με μεγάλη πιθανότητα αποτελεί μια καλή προσέγγιση του Z . Λόγω του θεωρήματος των Arriaga-Vempala [7], ισχύει ότι η πιθανότητα να είναι ο Z' ένας δ -προσεγγιστικός πίνακας του Z είναι:

$$\Pr(\|Z - URR^T V^T\|_\infty \leq \delta) \geq \frac{1}{2}.$$

Θεώρημα (Arriaga-Vempala, 2006). Έστω $u, v \in \mathbb{R}^n$ και $u', v' \in \mathbb{R}^r$ οι προβολές των u, v στον \mathbb{R}^r με τον τυχαίο πίνακα $R \in \mathbb{R}^{r \times n}$, του οποίου τα στοιχεία είναι ανεξάρτητες και ομοιόμορφα κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την $N(0,1)$ ή την $U(-1,1)$. Τότε:

$$\Pr[(1 - \varepsilon)\|u - v\|^2 \leq \|u' - v'\|^2] \geq 1 - 2\exp\left(-\left(\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^2 - \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^3\right)r/4\right)$$

και

$$\Pr[\|u' - v'\|^2 \leq (1 + \varepsilon)\|u + v\|^2] \geq 1 - 2\exp\left(-\left(\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^2 - \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^3\right)r/4\right)$$

Γι' αυτό το λόγο, υπάρχει σίγουρα ανάμεσα σε όλες τις δυνατές κατασκευές του R ένας πίνακας R τέτοιος ώστε $\|Z - URR^T V^T\|_\infty \leq \delta$, τον οποίο μπορούμε να εντοπίσουμε με μεγάλη πιθανότητα σε πολυωνυμικό χρόνο. Ορίζουμε ένα κατάλληλο όριο, N , στον αριθμό των τυχαίων πινάκων που θα δημιουργήσουμε και, με χρήση των φραγμάτων Chernoff, παίρνουμε με μεγάλη πιθανότητα τον πίνακα Z' με $\text{rank}(Z') \leq r$ και που είναι δ -προσεγγιση του A , σε πολυωνυμικό χρόνο, μέσω της διενέργειας N δοκιμών Monte Carlo, σε κάθε μια απ' τις οποίες παράγουμε έναν

τυχαίο πίνακα R , δημιουργούμε τον αντίστοιχο του πίνακα Z' και ελέγχουμε αν ο Z' πληροί τις ιδιότητες του θεωρήματος. ■

Για να βρούμε ένα πλήθος επαναλήψεων του αλγορίθμου, N , τέτοιο ώστε να πάρουμε έναν πίνακα Z' που πληροί τις ζητούμενες ιδιότητες με μεγάλη πιθανότητα, θα θεωρήσουμε την κάθε εκτέλεσή του σαν μια δοκιμή Bernoulli. Ορίζουμε την ακολουθία 0/1 τυχαίων μεταβλητών $X_i, i \in [N]$, με πιθανότητα επιτυχίας $p \geq 1/2$ και με την i -οστή τυχαία μεταβλητή να αντιστοιχεί στην i -οστή επανάληψη του αλγορίθμου και το άθροισμά τους $S = \sum_{i=1}^N X_i$. Θα φράξουμε την πιθανότητα να μην επιστραφεί ο ζητούμενος πίνακας αν το αναμενόμενο πλήθος επαναλήψεων του αλγορίθμου είναι γραμμικό ως προς m, n , χρησιμοποιώντας φράγματα Chernoff. Χρησιμοποιώντας την παρακάτω απλή μορφή τους (όρια Angluin-Valiant [51]), έχουμε:

$$Pr[S \leq (1 - \epsilon)mn/2] \leq \exp(-\epsilon^2 mn/4), \text{ για } \epsilon \in [0,1]$$

δηλαδή, η πιθανότητα αποτυχίας μειώνεται εκθετικά ως προς m και n . Συνεπώς, ακόμα και για $N = mn$, ο αλγόριθμος μας επιστρέφει με μεγάλη πιθανότητα έναν πίνακα Z' που έχει $rank(Z') \leq r$ και είναι ένας δ -προσεγγιστικός πίνακας του πίνακα Z .

3.3 Αποτελεσματική Κατασκευή Σχεδόν Βέλτιστων ϵ -nets

Στην ενότητα 2.5.1 περιγράψαμε μια απλή κατασκευή ϵ -net για έναν πίνακα $Z \in [-1,1]^{m \times n}$, η οποία δίνει ένα εξαρτώμενο απ' τη βαθμίδα άνω όριο για τον αριθμό κάλυψης του Z , $N_\epsilon(Z) = (1/\epsilon)^{O(rank(Z))}$, το οποίο μπορεί να γίνει πολύ μεγάλο.

Μπορούμε να πάρουμε ένα σημαντικά χαμηλότερο όριο για τον αριθμό κάλυψης πίνακα, το οποίο εξαρτάται από την ϵ -βαθμίδα του, χρησιμοποιώντας έναν αλγόριθμο κατασκευής ενός σχεδόν-βέλτιστου ϵ -net, S , για τον Z που σχεδίασαν οι Alon et al

Πίνακας 3.1: Ο τροποποιημένος τυχαιοκρατικός αλγόριθμος των Lee και Shraibman.

$APPROX_RANK(Z, \varepsilon, \delta)$	
Είσοδος: Πίνακας $Z \in [-1,1]^{m \times n}$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$	
1.	$(U, V, \gamma_2^\varepsilon(Z)) = APPROX_GAMMA2(Z, \varepsilon)$
2.	$r := 8\gamma^2 \ln(4mn)/\delta^2$
3.	Για $i = 1, \dots, N$ //π.χ. $N = mn$
a.	$R = RANDN(k, r, 0, 1)$ //$\forall i, j: R_{ij} \sim N(0, 1)$
b.	$Z' := URR^T V^T$
c.	Αν $\ A - Z'\ _\infty \leq \delta$, επίστρεψε Z' .
4.	Εμφάνισε: «Δεν υπολογίστηκε πίνακας Z' που είναι δ -προσέγγιση του Z μέσα σε N επαναλήψεις.»
Εξόδος: Πίνακας $Z' \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ή μήνυμα ότι δεν υπολογίστηκε τέτοιος πίνακας.	

[5], ο οποίος κατασκευάζει ένα τέτοιο σύνολο, S , μεγέθους $(1/\varepsilon)^{O(d)}$ σε χρόνο $(1/\varepsilon)^{O(d)} \text{poly}(m, n)$, όπου $d = \text{rank}_{\varepsilon/2}(Z)$.

Ο αλγόριθμος των Alon et al βασίζεται στον αλγόριθμο των Dadush και Vempala [16] για την απαρίθμηση των σημείων της τομής ενός δικτυωτού μ' ένα κυρτό σώμα (παραπέμπουμε στο παράρτημα). Αν ξέρουμε εκ των πρότερων ότι $\text{rank}(Z) = O(\log(mn))$, μπορούμε να κατασκευάσουμε το S με τον αλγόριθμο που θα αναπτυχθεί σ' αυτή την ενότητα δουλεύοντας απ' ευθείας με τον Z , χωρίς να υπολογίσουμε την προσεγγιστική βαθμίδα του.

Για την ανάπτυξη της ενότητας, θεωρούμε ότι έχουμε έναν πίνακα $Z \in [-1,1]^{m \times n}$ (σε περίπτωση που αυτό δε ισχύει, εφαρμόζουμε κλιμάκωση στα στοιχεία του) και ότι

έχουμε υπολογίσει μια $\ln(mn)$ -προσέγγιση της $\text{rank}_{(\varepsilon/4)+\delta}(Z)$ για $\varepsilon > 0$ και $\delta = \varepsilon/4$ με τη ρουτίνα $\text{APPROX_RANK}(Z, \varepsilon/4, \delta)$.

Πρέπει να αναφέρουμε ότι θα μπορούσαμε να επιλέξουμε ένα $\delta = c$, όπου c μια θετική σταθερά, οπότε να μην είχαμε την εξάρτηση της χρονικής και χωρικής πολυπλοκότητας του αλγορίθμου από το $1/\varepsilon$, όμως τότε θα είχαμε απλά μια χονδρική προσέγγιση της $(\varepsilon/2)$ -βαθμίδας του Z και επιπρόσθετο σφάλμα στην προσέγγιση του κυρτού περιβλήματος του χώρου στηλών του πίνακα που τη δίνει από το $\varepsilon/2$ -net. Το ακόλουθο αποτέλεσμα διατυπώθηκε πρώτα από τους Alon et al [6].

Θεώρημα 3. Έστω πίνακας $Z \in [-1,1]^{m \times n}$ με $(\varepsilon/4) - \text{rank}(Z) = d$. Μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα $(\varepsilon/2)$ -net S για τον Z , μεγέθους $|S| = (1/\varepsilon)^{O(d \ln(mn)/\varepsilon^2)}$, σε χρόνο $(1/\varepsilon)^{O(d \ln(mn)/\varepsilon^2)} \text{poly}(m, n)$.

Απόδειξη: Χωρίζουμε την απόδειξη σε δύο μέρη. Αρχικά, θα δείξουμε πως μπορούμε να κατασκευάσουμε το S χρησιμοποιώντας το χώρο και το χρόνο που αναφέρονται στο θεώρημα. Μετά, θα δείξουμε ότι το S είναι πράγματι ε -net για τον Z .

Θεωρούμε τον πίνακα $Z' = \text{APPROX_RANK}(Z, \varepsilon/4, \varepsilon/4)$. Έστω τα συμμετρικά ως προς το κέντρο τους κυρτά σώματα $K = \text{conv}(Z') \cap [-1,1]^n$ και $L = \text{conv}(Z') \cap \left[-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right]^n$. Ο στόχος είναι η σχεδόν βέλτιστη, δηλαδή με μια καλή προσέγγιση του ελάχιστου αριθμού αντιγράφων, κάλυψη του K από αντίγραφα του L .

Ας κάνουμε πρώτα μια εκτίμηση του $N(K, L)$. Επειδή $L = \frac{\varepsilon}{2}K$, έχουμε ότι

$N(K, L) = N(K, \frac{\varepsilon}{2}K) \leq \left(1 + \frac{4}{\varepsilon}\right)^d$, χρησιμοποιώντας το λήμμα 3.3 του [5]. Τώρα, θα

δούμε πως μπορούμε να κατασκευάσουμε αλγοριθμικά την προαναφερθείσα βέλτιστη κάλυψη του K από αντίγραφα του L , η οποία θα μας δώσει το ζητούμενο $\varepsilon/2$ -net, S ,

για τον Z' , χρησιμοποιώντας χρόνο $N(K, L)2^{O(d)}$ και χώρο $2^{O(d)}$ (θεώρημα 1.9 του [5]). Η βάση του αλγορίθμου είναι ο υπολογισμός ενός δικτυωτού του Rogers διάστασης d , \mathcal{L} , για το L , κι ενός M -ελλειψοειδούς, $E \subset \mathbb{R}^n$, για το $K + L$, τα οποία ορίσαμε στους ορισμούς 8 κι 9 της ενότητας 2.6. Όπως αναφέραμε και στην ενότητα 2.6, η βάση ενός δικτυωτού του Rogers μπορεί να υπολογιστεί σε χρόνο $2^{O(d)}$, ενώ τον ίδιο χρόνο απαιτεί ο υπολογισμός ενός M -Ελλειψοειδούς για το $K + L$. Για λεπτομέρειες, παραπέμπουμε στο παράρτημα της παρούσας εργασίας. Το επιστρεφόμενο $(\varepsilon/2)$ -net για τον Z' είναι το $S = (K + L) \cap \mathcal{L}$. Χρησιμοποιούμε το M -ελλειψοειδές, E , για την απαρίθμηση του $(K + L) \cap \mathcal{L}$. Η απαρίθμηση αυτού του συνόλου απαιτεί χρόνο $G((K + L), \mathcal{L})2^{O(d)}$, όπου $G(K, \mathcal{L}) := \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\mathcal{L} \cap (x + (K + L))|$. Αποδεικνύεται [5] ότι $G((K + L), \mathcal{L}) \leq 24^d N(K, L)$, οπότε ο χρόνος κατασκευής του είναι στην ουσία $2^{O(d)} N(K, L)$.

Γιατί, όμως, το S είναι όντως ε -net για τον Z ; Η παρακάτω πρόταση δίνει την απάντηση.

Πρόταση 1: Ένα $(\frac{\varepsilon}{2})$ -net για έναν πίνακα B που είναι $(\frac{\varepsilon}{2})$ -προσέγγιση ενός πίνακα A στη νόρμα $\|\cdot\|_\infty$ είναι ε -net για τον A .

Απόδειξη: Έστω το $(\frac{\varepsilon}{2})$ -net S για τον B . Τότε, $\forall u \in \text{conv}(\text{span}(B))$, $\exists u \in S$ s. t. $\|u - v\|_\infty = \|u - Bx\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$, για κάποιο x . Ας δούμε πόσο καλά προσεγγίζουν τα στοιχεία του S αυτά του $\text{conv}(\text{span}(A))$. $\|u - Ax\|_\infty = \|u - Bx + Bx - Ax\|_\infty \leq \|u - Bx\|_\infty + \|Ax - Bx\|_\infty = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
 . Άρα, το S είναι πράγματι ε -net για τον A . ■

Έτσι, δείξαμε ότι το S είναι το ζητούμενο ε -net. ■

Στο εξής, θα θεωρούμε ότι έχουμε διαθέσιμη μια ρουτίνα $\text{EPSILON_NET}(Z, \varepsilon)$, η οποία κατασκευάζει ένα σχεδόν-βέλτιστο ε -net για τον $Z \in [-1,1]^{m \times n}$, με τη μέθοδο που περιγράφηκε στην απόδειξη του θεωρήματος 3.

3.4 Πολυωνυμικού Χρόνου Προσεγγιστικό Σχήμα Εύρεσης Ισορροπιών Nash για Παίγνια Λογαριθμικής Προσεγγιστικής Βαθμίδας

Όπως αναφέραμε και στην υποενότητα 2.2.1, το πρόβλημα εύρεσης μιας ισορροπίας Nash, $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \in \Delta_m \times \Delta_n$, ενός παιγνίου διπίνακα $\langle R, C \rangle$ με $R, C \in [-1,1]^{m \times n}$ είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα εύρεσης ενός ολικού ελαχιστοποιητή του τετραγωνικού προγράμματος (NEQP). Αποκτάμε ένα πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικό σχήμα, για την περίπτωση όπου ο πίνακας Z έχει λογαριθμική $\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ -βαθμίδα ως προς τις διαστάσεις του και έχουμε εκ των προτέρων έναν πίνακα Z' τέτοιον ώστε $\text{rank}(Z') = d = O(\log(mn))$ και $\|Z - Z'\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Για να πάρουμε, όμως αυτόν τον πίνακα, αρκεί να χρησιμοποιήσουμε την $\text{APPROX_GAMMA2}(Z, \frac{\varepsilon}{4})$ και να εξετάσουμε αν ο πίνακας Z έχει σταθερή νόρμα $\gamma_2^{\varepsilon/4}$, διότι αυτό είναι ικανή συνθήκη για να έχει λογαριθμική $\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ -βαθμίδα.

Στην ουσία, η επίλυση του $(\gamma_2\text{SDP})$ μας δίνει έναν αλγόριθμο πολυωνυμικού χρόνου για την επαλήθευση αν ο πίνακας Z ενός παιγνίου διπίνακα $\langle R, C \rangle$ έχει σταθερή νόρμα $\gamma_2^{\varepsilon/4}$.

Αν αυτό ισχύει, δημιουργούμε τον πίνακα $Z' := URR^T V^T$, όπου U, V οι πίνακες της παραγοντοποίησης που δίνει τη νόρμα $\gamma_2^{\varepsilon/4}(Z)$, κατασκευάζουμε ένα $\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ -net, S , γι' αυτόν και υπολογίζουμε, για κάθε $\tilde{\mathbf{y}} \in S$, τον ολικό ελαχιστοποιητή του ακόλουθου κυρτού προβλήματος βελτιστοποίησης

Πίνακας 3.2: Ο αλγόριθμος των Alon et al για τον υπολογισμό ε -ισορροπιών Nash.

LOGAPPROXRANK_APPROX_NE(R, C, Z', ε)
Είσοδος: Παίγνιο διπίνακα $\langle R, C \rangle$, $R, C \in [-1, 1]^{m \times n}$, $Z' := URR^T V^T$, $\varepsilon > 0$
Προϋπόθεση: $\gamma_2^{\varepsilon/4}(Z) = O(1)$
<ol style="list-style-type: none"> 1. $S = \text{EPSILON_NET}(Z', \frac{\varepsilon}{2})$ 2. Για κάθε $\tilde{y} \in S$, υπολόγισε μια λύση του (NECP) <ol style="list-style-type: none"> a. $NE_\varepsilon(R, C) = \{(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \mid \max_i R_{i*} \mathbf{y} + \min \max_j C_{*j}^T \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \tilde{y} \leq \varepsilon/2\}$ 3. Επέστρεψε το $NE_\varepsilon(R, C)$
Εξοδος: Σύνολο ε -ισορροπιών Nash του $\langle R, C \rangle$, $NE_\varepsilon(R, C)$.

$$\begin{aligned}
 \text{(NECP)} \quad & \min \max_i R_{i*} \mathbf{y} + \max_j C_{*j}^T \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \tilde{\mathbf{y}} \\
 & \text{subject to } (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Delta_m \times \Delta_n, \|\mathbf{Z}' \mathbf{y} - \tilde{\mathbf{y}}\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}
 \end{aligned}$$

Επιστρέφουμε όλα τα ζεύγη $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ για τα οποία η αντικειμενική συνάρτηση έχει τιμή μικρότερη ή ίση της $\varepsilon/2$, διότι αντιστοιχούν σε ε -ισορροπίες Nash του $\langle R, C \rangle$.

Η κατασκευή του S γίνεται σε χρόνο $\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{O(d)} \text{poly}(mn)$ και το μέγεθός του είναι $|S| = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{O(d)}$. Εφόσον το κυρτό πρόγραμμα (NECP) μπορεί να επιλυθεί σε χρόνο $O(m^3 + n^3 + m^2 n^2)$ (παραπέμπουμε στην ενότητα 2.5.3), ο χρόνος εκτέλεσης χειρότερης περίπτωσης του LOGAPPROXRANK_APPROX_NE είναι $\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{O(d)} O(m^3 + n^3 + m^2 n^2)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ NASH ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΠΟΙΗΜΕΝΩΝ ΠΑΙΓΝΙΩΝ ΔΙΠΙΝΑΚΑ

4.1 Παραμετροποιημένα Παίγνια Διπίνακα

4.2 Διεύρυνση της Κλάσης Παιγνίων Διπίνακα με Σταθερή Προσεγγιστική Νόρμα γ_2 του Αθροίσματος των Πινάκων Ωφελειών τους

4.3 Πειραματική Διερεύνηση

4.1 Παραμετροποιημένα Παίγνια Διπίνακα

Παραμετροποιούμε ένα παίγνιο διπίνακα ακλουθώντας την ίδια προσέγγιση με την εργασία των Κοντογιάννη και Σπυράκη [33]. Έστω το παίγνιο διπίνακα $\langle R, C \rangle$,

$R, C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ και $Z := R + C$ το άθροισμα των πινάκων ωφέλειας του παιγνίου.

Θεωρούμε μια παράμετρο $\lambda \in (0,1)$ και παραμετροποιούμε το άθροισμα των πινάκων ωφέλειας ως $Z(\lambda) := \lambda R + (1 - \lambda)C$. Μπορούμε να θεωρήσουμε το λ ως

μια παράμετρο ανισομερούς στάθμισης των ωφελειών των δύο παικτών. Οπότε, μας ενδιαφέρει να μην είναι πολύ κοντά στις τιμές 0 και 1 (μπορούμε να θεωρήσουμε

$\lambda \in [a, b] \subset (0,1)$), ενώ προτιμούμε να μην είναι ίσο με $1/2$, αφού τότε κάνει απλώς

μια κλιμάκωση των τιμών ωφέλειας, χωρίς να τις σταθμίζει ανισομερώς.

4.2 Διεύρυνση της Κλάσης Παιγνίων Διπίνακα με Σταθερή Προσεγγιστική

Νόρμα γ_2 του Αθροίσματος των Πινάκων Ωφελειών τους

Όπως δείξαμε στην ενότητα 3.1, η νόρμα γ_2^ε ενός πίνακα μπορεί να υπολογιστεί μέσω της επίλυσης του ημιορισμένου προγράμματος $\gamma_2\text{SDP}$. Μπορούμε να παραμετροποιήσουμε αυτό το ημιορισμένο πρόγραμμα ως προς $\lambda \in (0,1)$, ούτως ώστε να επιστρέφει εκείνη την τιμή του λ , έστω λ^* , που ελαχιστοποιεί τη νόρμα γ_2^ε του δεδομένου πίνακα. Μέσω παραμετροποίησης, παίρνουμε το ακόλουθο ημιορισμένο πρόγραμμα

$$\begin{array}{ll} \gamma_2\text{SDP}(\lambda) & \gamma_2^\varepsilon(\lambda R + (1 - \lambda)C) := \min t \\ \text{subject to} & \begin{bmatrix} W_1 & B \\ B^T & W_2 \end{bmatrix} \succcurlyeq 0, \text{diag}(W_1) \leq t, \text{diag}(W_2) \leq t, \\ & \forall i \in [m], j \in [n]: -\varepsilon \leq \lambda R_{ij} + (1 - \lambda)C_{ij} - B_{ij} \leq \varepsilon \end{array}$$

Είναι προφανές ότι για δύο οποιουσδήποτε πίνακες $R, C \in \mathbb{R}^{m \times n}$, η νόρμα $\gamma_2^\varepsilon(R + C)$ έχει μεγαλύτερη τιμή από τη νόρμα $\gamma_2^\varepsilon(\lambda R + (1 - \lambda)C)$. Εφόσον το λ ορίζεται στο $(0,1)$, το μέγεθος των τιμών των πινάκων $R, C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ μπορεί μόνο να μειωθεί από τον πολλαπλασιασμό τους με λ και $(1 - \lambda)$. Αυτό είναι αρκετό ώστε οι πίνακες της παραγοντοποίησης $U_2 V_2^T$, $U_2 \in \mathbb{R}^{m \times k}$, $V_2 \in \mathbb{R}^{n \times k}$ που δίνει τη νόρμα γ_2^ε του $\lambda R + (1 - \lambda)C$ να έχουν μικρότερες μέγιστες l_2 -νόρμες γραμμών από τους αντίστοιχούς τους πίνακες της παραγοντοποίησης $U_1 V_1^T$, $U_1 \in \mathbb{R}^{m \times k}$, $V_1 \in \mathbb{R}^{n \times k}$ που δίνει τη νόρμα γ_2^ε του $R + C$.

Η επίλυση του $\gamma_2\text{SDP}(\lambda)$ δε μας επιστρέφει μόνο τη γ_2^ε νόρμα του πίνακα $Z(\lambda)$, αλλά και την τιμή λ^* για την οποία επιτυγχάνεται η μεγαλύτερη μείωση της νόρμας γ_2^ε για $\varepsilon > 0$. Αυτό σημαίνει ότι το $\gamma_2\text{SDP}(\lambda)$ μας δίνει ένα πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμο αναγνώρισης του αν ένα παραμετροποιημένο παίγνιο διπίνακα, (R, C) , $R, C \in \mathbb{R}^{m \times n}$, ανήκει στην υποκλάση των παιγνίων διπίνακα για τα οποία μπορούμε

να υπολογίσουμε μια προσεγγιστική ισορροπία Nash με το τυχαιοκρατικό πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικό σχήμα που αναπτύξαμε στην παράγραφο 3.

Θεώρημα 4. Έστω το παίγνιο διπίνακα $\langle R, C \rangle$, $R, C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ και ο πίνακας $Z(\lambda) := \lambda R + (1 - \lambda)C$, για $\lambda \in (0,1)$. Αν υπάρχει μια τιμή $\lambda^* \in (0,1)$, φραγμένη μακριά από τις τιμές 0 και 1, για την οποία ο πίνακας $Z(\lambda^*) = \lambda^* R + (1 - \lambda^*)C$ να έχει νόρμα $\gamma_2^{\varepsilon/4}(Z(\lambda^*)) = O(1)$, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε, με μεγάλη πιθανότητα, μια ε -ισορροπία Nash του $\langle R, C \rangle$, σε πολυωνυμικό χρόνο μέσω απαρίθμησης των στοιχείων ενός σχεδόν-βέλτιστου $\frac{\varepsilon \min\{\lambda^*, 1-\lambda^*\}}{2}$ -net.

Απόδειξη: Αρχικά, αποδεικνύουμε την ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 2: Έστω το παίγνιο διπίνακα $\langle R, C \rangle$, $R, C \in [-1,1]^{m \times n}$ και ο πίνακας $Z(\lambda) := \lambda R + (1 - \lambda)C$, για $\lambda \in (0,1)$. Κάθε $\bar{\varepsilon}$ -ελαχιστοποιητής, $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \in \Delta_m \times \Delta_n$, του παραμετροποιημένου τετραγωνικού προγράμματος των Mangasarian και Stone:

$$\begin{aligned} \text{(NEQP}(\lambda)\text{): } & \min \lambda \max_{i \in [m]} R_{i*} \mathbf{y} + (1 - \lambda) \max_{j \in [n]} C_{*j}^T \mathbf{x} - \mathbf{x}^T Z(\lambda) \mathbf{y} \\ & \text{subject to } (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Delta_m \times \Delta_n \end{aligned}$$

επάγει μια ε -ισορροπία Nash του $\langle R, C \rangle$, $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$, για κάθε $\varepsilon \geq \frac{\bar{\varepsilon}}{\min\{\lambda^*, 1-\lambda^*\}}$.

Απόδειξη: Προφανώς, ισχύει ότι $\max_{i \in [m]} \lambda^* R_{i*} \mathbf{y}^* + \mathbf{x}^{*T} \lambda^* R \mathbf{y}^* \leq \bar{\varepsilon}$ και

$$\max_{i \in [m]} (1 - \lambda^*) C_{*j}^T \mathbf{x}^* + \mathbf{x}^{*T} (1 - \lambda^*) C \mathbf{y}^* \leq \bar{\varepsilon}.$$

Αυτές οι ανισότητες είναι ισοδύναμες με τις: $\max_{i \in [m]} R_{i*} \mathbf{y}^* + \mathbf{x}^{*T} R \mathbf{y}^* \leq \frac{\bar{\varepsilon}}{\lambda^*}$

και $\max_{i \in [m]} C_{*j}^T \mathbf{x}^* + \mathbf{x}^{*T} C \mathbf{y}^* \leq \frac{\bar{\varepsilon}}{(1-\lambda^*)}$. Αυτό σημαίνει ότι οι μεταμέλειες των

παικτών δεν υπερβαίνουν το $\frac{\bar{\varepsilon}}{\min\{\lambda^*, 1-\lambda^*\}}$, ο.ε.δ. ■

Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι αν για το $\langle R, C \rangle$ ισχύει ότι $\gamma_2^{\varepsilon/4}(Z(\lambda^*)) = O(1)$, μπορούμε να υπολογίσουμε μια τέτοια ε -ισορροπία Nash του σε πολυωνυμικό χρόνο με μεγάλη πιθανότητα, μέσω της απαρίθμησης των στοιχείων ενός σχεδόν βέλτιστου $\frac{\varepsilon \min\{\lambda^*, 1-\lambda^*\}}{2}$ -net για την προσέγγιση της τετραγωνικής μορφής του $(NEQP(\lambda))$. Αρχικά, μελετάμε την ποιότητα προσέγγισης των ισορροπιών Nash του $\langle R, C \rangle$ των $\frac{\varepsilon \min\{\lambda^*, 1-\lambda^*\}}{2}$ -ελαχιστοποιητών του $(NEQP(\lambda))$.

Πρόταση 3: Έστω το παίγνιο διπίνακα $\langle R, C \rangle$, $R, C \in [-1, 1]^{m \times n}$ και ο πίνακας $Z(\lambda^*) := \lambda^* R + (1 - \lambda^*) C$, για δεδομένο $\lambda^* \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $\gamma_2^{\varepsilon/4}(Z(\lambda^*)) = O(1)$. Αν μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα $\frac{\varepsilon \min\{\lambda^*, 1-\lambda^*\}}{2}$ -net, S , για τον $Z(\lambda^*)$ με χρήση ενός ντετερμινιστικού (ή τυχαιοκρατικού Las Vegas) αλγορίθμου σε χρόνο $\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{O(d)} \text{poly}(mn)$ με μέγεθος $|S| = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{O(d)}$, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε μια ε -ισορροπία Nash του $\langle R, C \rangle$, $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$, σε χρόνο $\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{O(d)} O(m^3 + n^3 + m^2 n^2)$.

Απόδειξη: Έστω ότι έχουμε κατασκευάσει ένα $\frac{\varepsilon \min\{\lambda^*, 1-\lambda^*\}}{2}$ -net, S , για τον $Z(\lambda^*)$ χρησιμοποιώντας χρόνο $\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{O(d)} \text{poly}(mn)$ και χώρο $\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{O(d)}$. Μέσω αυτού, επιλύουμε, για κάθε $\tilde{\mathbf{y}} \in S$, το κυρτό πρόβλημα βελτιστοποίησης:

$$\begin{aligned} \text{NECP}(\lambda^*) \quad & \min \max_i \lambda^* R_{i*} \mathbf{y} + \max_j (1 - \lambda^*) C_{*j}^T \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \tilde{\mathbf{y}} \\ \text{subject to} \quad & (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Delta_m \times \Delta_n, \|\mathbf{Z}(\lambda^*) \mathbf{y} - \tilde{\mathbf{y}}\|_\infty \leq \frac{\varepsilon \min\{\lambda^*, 1 - \lambda^*\}}{2} \end{aligned}$$

Επιστρέφουμε όλα τα ζεύγη $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ για τα οποία η αντικειμενική συνάρτηση έχει τιμή μικρότερη ή ίση της $\frac{\varepsilon \min\{\lambda^*, 1-\lambda^*\}}{2}$. Αυτό απαιτεί χρόνο $\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{O(d)} O(m^3 + n^3 + m^2 n^2)$ με τον πολυωνυμικό ως προς m και n παράγοντα να είναι ο χρόνος επίλυσης του $\text{NECP}(\lambda^*)$. Θα δείξουμε ότι αυτά τα ζεύγη επάγουν ε -ισορροπίες Nash του $\langle R, C \rangle$. Έστω, λοιπόν, ένα τέτοιο ζεύγος $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \in \Delta_m \times \Delta_n$ που είναι $\frac{\varepsilon \min\{\lambda^*, 1-\lambda^*\}}{2}$ -ελαχιστοποιητής της αντικειμενικής συνάρτησης του $\text{NECP}(\lambda^*)$ για το στοιχείο $\tilde{\mathbf{y}}^* \in S$.

Προφανώς,

$$\begin{aligned} \max_i \lambda^* R_{i*} \mathbf{y}^* + \max_j (1 - \lambda^*) C_{*j}^T \mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{*T} Z(\lambda) \mathbf{y}^* &\leq \max_i \lambda^* R_{i*} \mathbf{y}^* + \\ \max_j (1 - \lambda^*) C_{*j}^T \mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{*T} \tilde{\mathbf{y}}^* + \frac{\varepsilon \min\{\lambda^*, 1-\lambda^*\}}{2}, &\quad \text{λόγω του περιορισμού} \\ \|Z(\lambda^*) \mathbf{y} - \tilde{\mathbf{y}}\|_\infty &\leq \frac{\varepsilon \min\{\lambda^*, 1-\lambda^*\}}{2}. \end{aligned}$$

Επίσης, $\max_i \lambda^* R_{i*} \mathbf{y}^* + \max_j (1 - \lambda^*) C_{*j}^T \mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{*T} \tilde{\mathbf{y}}^* \leq \frac{\varepsilon \min\{\lambda^*, 1-\lambda^*\}}{2}$, οπότε

$$\max_i \lambda^* R_{i*} \mathbf{y}^* + \max_j (1 - \lambda^*) C_{*j}^T \mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{*T} Z(\lambda^*) \mathbf{y}^* \leq \varepsilon \min\{\lambda^*, 1 - \lambda^*\}. \text{ Αυτό,}$$

με τη σειρά του, συνεπάγεται ότι:

$$\begin{aligned} &\left\{ \begin{array}{l} \lambda^* \max_i R_{i*} \mathbf{y}^* - \lambda^* \mathbf{x}^{*T} R \mathbf{y}^* \leq \varepsilon \min\{\lambda^*, 1 - \lambda^*\} - (1 - \lambda^*) (\max_j C_{*j}^T \mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{*T} C \mathbf{y}^*) \\ (1 - \lambda^*) \max_j C_{*j}^T \mathbf{x}^* - (1 - \lambda^*) \mathbf{x}^{*T} C \mathbf{y}^* \leq \varepsilon \min\{\lambda^*, 1 - \lambda^*\} - \lambda^* (\max_i R_{i*} \mathbf{y}^* - \mathbf{x}^{*T} R \mathbf{y}^*) \end{array} \right. \Rightarrow \\ &\left\{ \begin{array}{l} \max_i R_{i*} \mathbf{y}^* - \mathbf{x}^{*T} R \mathbf{y}^* \leq \frac{\varepsilon \min\{\lambda^*, 1-\lambda^*\}}{\lambda^*} - \frac{(1-\lambda^*)}{\lambda^*} (\max_j C_{*j}^T \mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{*T} C \mathbf{y}^*) \\ \max_j C_{*j}^T \mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{*T} C \mathbf{y}^* \leq \frac{\varepsilon \min\{\lambda^*, 1-\lambda^*\}}{(1-\lambda^*)} - \frac{\lambda^*}{(1-\lambda^*)} (\max_i R_{i*} \mathbf{y}^* - \mathbf{x}^{*T} R \mathbf{y}^*) \end{array} \right. \Rightarrow \\ &\max \left\{ \max_i R_{i*} \mathbf{y}^* - \mathbf{x}^{*T} R \mathbf{y}^*, \max_j C_{*j}^T \mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{*T} C \mathbf{y}^* \right\} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Οπότε, συμπεραίνουμε ότι το $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ είναι ε -ισορροπία Nash του $\langle R, C \rangle$ αφού καθιστά τις μεταμέλειες των παικτών το πολύ ίσες με ε . ■

Λόγω του ότι η υπόθεση $\gamma_2^{\varepsilon/4}(Z(\lambda^*)) = O(1)$ είναι ικανή συνθήκη για να ισχύει ότι $\text{rank}_{\frac{\varepsilon}{2}}(Z(\lambda^*)) = O(\log(mn))$, έχουμε ότι $d := \text{rank}_{\frac{\varepsilon}{2}}(Z(\lambda^*))$. Χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο των Alon et al [5] για την κατασκευή ενός σχεδόν βέλτιστου $\frac{\varepsilon \min\{\lambda^*, 1-\lambda^*\}}{2}$ -net, S , για τον $Z(\lambda^*)$ (ή για μια $\frac{\varepsilon}{4}$ -προσέγγισή του, αν δεν ισχύει ότι $\text{rank}(Z(\lambda^*)) = O(\log(mn))$) χρησιμοποιώντας χρόνο $\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{O(d)} \text{poly}(mn)$ και χώρο $\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{O(d)}$. Από τις Προτάσεις 2 και 3 σε συνδυασμό με το Θεώρημα 2, έπεται η απόδειξη του θεωρήματος. ■

Το θεώρημα 4, με τη σειρά του, δημιουργεί το ερώτημα: για ποιες υποκλάσεις παιγνίων διπίνακα υπάρχει μια τιμή $\lambda^* \in (0,1)$, φραγμένη μακριά από τις τιμές 0 και 1, για την οποία ο πίνακας $Z(\lambda)$ να έχει $\gamma_2^{\varepsilon/4}(Z(\lambda)) = O(1)$; Σαν ένα πρώτο βήμα προς αυτή την κατεύθυνση, αποδεικνύουμε ότι τα παίγνια διπίνακα σταθερού αθροίσματος (στα οποία υπάγονται τα παίγνια μηδενικού αθροίσματος) ανήκουν στην προτεινόμενη από εμάς υποκλάση παιγνίων διπίνακα:

Λήμμα 2. Για κάθε παίγνιο διπίνακα σταθερού αθροίσματος $\langle R, -R + c\mathbf{1}_m\mathbf{1}_n^T \rangle$, $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$, υπάρχει μια τιμή $\lambda^* \in (0,1)$ τέτοια ώστε η νόρμα $\gamma_2^{\varepsilon/4}$ του $Z(\lambda^*)$, με $Z(\lambda^*) = \lambda^*R - (1 - \lambda^*)R$, να είναι σταθερή ως προς m, n .

Απόδειξη: Θεωρούμε $\lambda^* = \frac{1}{2}$. Τότε, $Z\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}R - \frac{1}{2}R = \frac{c}{2}\mathbf{1}_m\mathbf{1}_n^T$. Δεν είναι δύσκολο να δείξουμε ότι το γινόμενο πινάκων $\left(\frac{c}{2} - \frac{\varepsilon}{4}\right)\mathbf{1}_m\mathbf{1}_n^T$ δίνει την $\gamma_2^{\varepsilon/4}\left(Z\left(\frac{1}{2}\right)\right)$. Ας μελετήσουμε, λοιπόν, τις μέγιστες l_2 -νόρμες μεταξύ των γραμμών για τους πίνακες $\left(\frac{c}{2} - \frac{\varepsilon}{4}\right)\mathbf{1}_m$ και $\left(\frac{c}{2} - \frac{\varepsilon}{4}\right)\mathbf{1}_n$. Προφανώς, $\left\|\left(\frac{c}{2} - \frac{\varepsilon}{4}\right)\mathbf{1}_m\right\|_{2 \rightarrow \infty} = \left\|\left(\frac{c}{2} - \frac{\varepsilon}{4}\right)\mathbf{1}_n\right\|_{2 \rightarrow \infty} = \frac{c}{2} - \frac{\varepsilon}{4}$. Συνεπώς, η νόρμα $\gamma_2^{\varepsilon/4}$ του $Z(\lambda^*)$ είναι σταθερή ως προς m, n . ■

Κλείνοντας την ενότητα, θα δείξουμε ότι η πολύ ευρύτερη υποκλάση των παιγνίων διπίνακα σταθερής βαθμίδας των Kannan και Theobald [27], η οποία περιλαμβάνει όλα τα παίγνια σταθερού αθροίσματος, ανήκει στην προτεινόμενη από εμάς υποκλάση παιγνίων διπίνακα.

Λήμμα 4: Έστω ένα παίγνιο διπίνακα $\langle R, C \rangle$, $R, C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ με $\text{rank}(R + C) \leq k$, όπου k μη-αρνητική ακέραια σταθερά. Η νόρμα $\gamma_2^{\varepsilon/4}$ του πίνακα $R + C$ έχει σταθερή τιμή ως προς m, n .

Απόδειξη: Από τον Ορισμό 5 (ενότητα 2.4.1) γίνεται προφανές ότι $\text{rank}_{\varepsilon/4}(R + C) \leq \text{rank}(R + C)$, για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$. Συνεπώς, η $\text{rank}_{\varepsilon/4}$ του $(R + C)$ είναι σταθερή ως προς m, n . Χρησιμοποιώντας την ανισότητα [6]:

$$\text{rank}_{\varepsilon/4}(R + C) \geq \left(\frac{\gamma_2^{\varepsilon/4}(R+C)}{\|R+C\|_{\infty} + \varepsilon/4} \right)^2,$$

δείχνουμε ότι η νόρμα $\gamma_2^{\varepsilon/4}$ του $R + C$ είναι σταθερή ως προς m, n .

4.3 Πειραματική Διερεύνηση

Το κίνητρό μας για τη διενέργεια πειραμάτων, είναι η διερεύνηση των δύο ακόλουθων ερωτημάτων:

- Υπάρχει πράγματι για ένα παίγνιο διπίνακα $\langle R, C \rangle$, $R, C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ μια τιμή της παραμέτρου λ που να οδηγεί σε μεγάλη μείωση της νόρμας $\gamma_2^{\varepsilon/4}$ του αθροίσματος των πινάκων ωφελειών του, αν αυτός παραμετροποιηθεί με μια παράμετρο $\lambda \in (0,1)$; Αν ναι, ποιά είναι η διακύμανση των τιμών της;
- Υπάρχει, για ένα παίγνιο διπίνακα $\langle R, C \rangle$, $R, C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ του οποίου το άθροισμα των πινάκων ωφελειών δεν έχει σταθερή νόρμα $\gamma_2^{\varepsilon/4}$, μια τιμή αυτής της παραμέτρου για την οποία η νόρμα $\gamma_2^{\varepsilon/4}$ του, παραμετροποιημένου, πλέον, αθροίσματος των πινάκων ωφελειών γίνεται σταθερή ως προς το πλήθος ενεργειών των παικτών;

Συνεπώς, τα πειράματά μας διενεργούνται σε μια κατηγορία παιγνίων διπίνακα, για την οποία υπολογίζουμε τη νόρμα $\gamma_2^{\varepsilon/4}$ του πίνακα-αθροίσματος των πινάκων ωφελειών των παικτών μέσω επίλυσης του $(\gamma_2\text{SDP}(\lambda))$, την τιμή της παραμέτρου λ για την οποία η νόρμα $\gamma_2^{\varepsilon/4}$ παραμετροποιημένου αθροίσματος των πινάκων ωφελειών ελαχιστοποιείται (ως μεταβλητή απόφασης του $(\gamma_2\text{SDP}(\lambda))$) και την τιμή της νόρμας $\gamma_2^{\varepsilon/4}$ γι' αυτή την τιμή του λ . Θα πρέπει να δούμε πώς αυτά τα μεγέθη κλιμακώνονται ως προς το πλήθος ενεργειών των παικτών.

Η κλάση παιγνίων διπίνακα που επιλέξαμε είναι τα παίγνια νίκης-ήττας. Ένα παίγνιο νίκης-ήττας είναι ένα παίγνιο διπίνακα $\langle R, C \rangle$, τέτοιο ώστε $R, C \in \{0,1\}^{m \times n}$.

Επιλέξαμε τα παίγνια νίκης-ήττας για τους εξής λόγους:

- a. Μετά από επισκόπηση της βιβλιογραφίας πάνω σε κατηγορίες πινάκων για τους οποίους η προσεγγιστική νόρμα γ_2 έχει κάποιο γνωστό κάτω φράγμα ως προς τις διαστάσεις τους, διαπιστώσαμε ότι υπάρχουν σχετικά αποτελέσματα μόνο για μία υποκατηγορία τετραγωνικών πινάκων προσήμων, των πινάκων half-graph. Ένας πίνακας half-graph ορίζεται ως $G \in \{-1,1\}^{n \times n}$ με $G_{ij} = 1, i \geq j$ και $G_{ij} = -1, i < j$ και για τη νόρμα γ_2^α , $\alpha > 1$ αυτών των πινάκων ισχύει ότι $\gamma_2^\alpha(G) = \Omega(\log n)$ (παραπέμπουμε στο [5] και στις αναφορές εκεί).
- b. Ένας πίνακας προσήμων, $S \in \{-1,1\}^{m \times n}$, μπορεί να μετασχηματιστεί σ' έναν πίνακα $A \in \{0,1\}^{m \times n}$ μέσω του 1-1 και επί μετασχηματισμού $T(S) := \frac{1}{2}(S + \mathbf{1}_{m \times n})$, όπου $\mathbf{1}_{m \times n}$ ο πίνακας διαστάσεων $m \times n$ με όλα τα στοιχεία του ίσα με 1. Γι' αυτό το λόγο, τα παίγνια που αναπαριστώνται από πίνακες προσήμων είναι ισοδύναμα με τα παίγνια νίκης-ήττας, με την έννοια ότι οι προτιμήσεις των παικτών διατηρούνται από τον μετασχηματισμό T .
- c. Λόγω του αποτελέσματος των Abbott et al [1], τα παίγνια νίκης-ήττας είναι τόσο δύσκολα για το πρόβλημα εύρεσης ισορροπίας Nash όσο τα γενικά παίγνια διπίνακα. Γι' αυτό, έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον η ανακάλυψη υποκλάσεων παιγνίων νίκης-ήττας που να επιδέχονται έναν αλγόριθμο

πολυωνυμικού χρόνου ή, έστω, ένα πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικό σχήμα για την εύρεση ισοροπιών Nash.

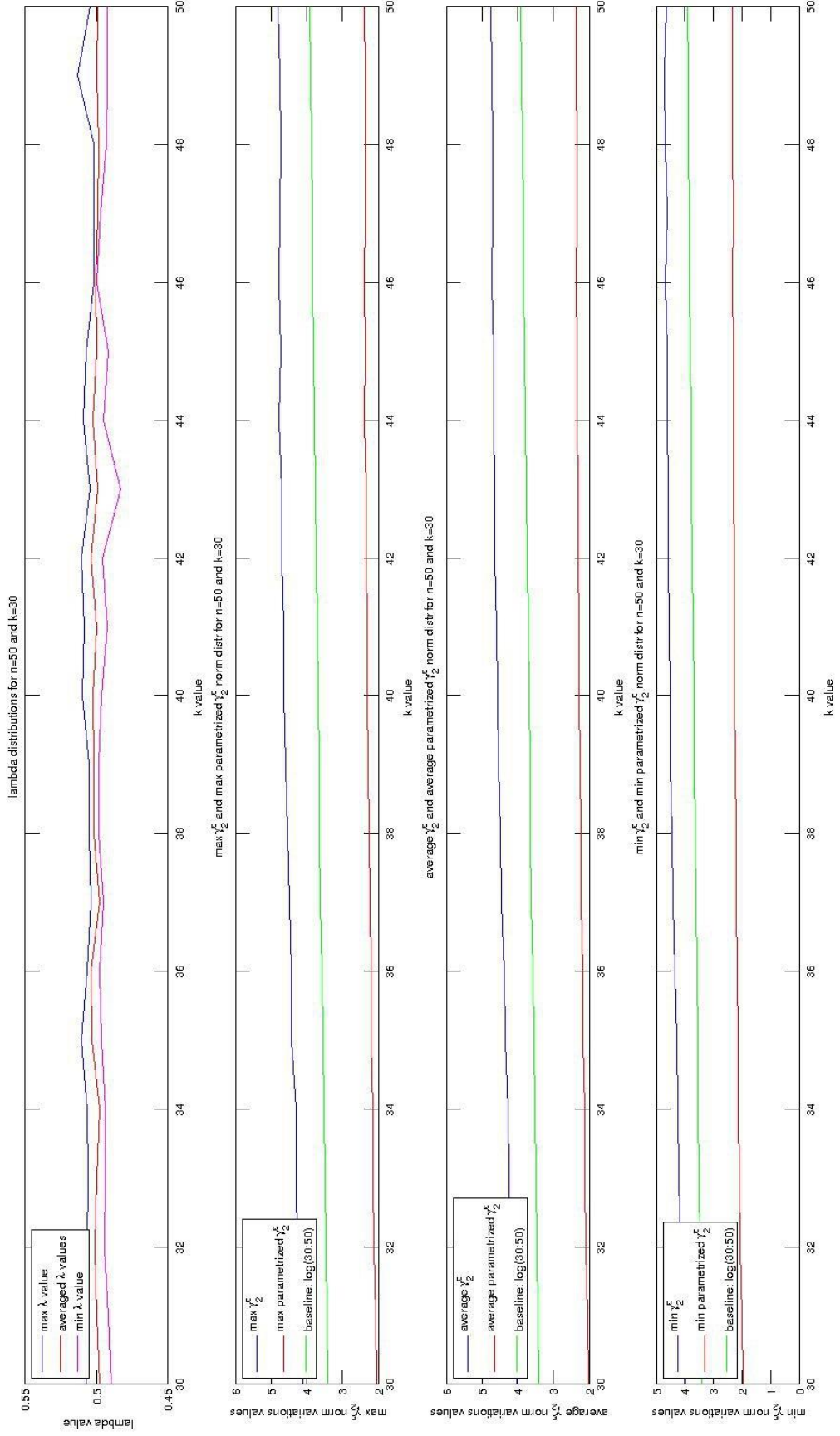
Μια χρήσιμη ιδιότητα του μετασχηματισμού T είναι ότι διατηρεί τη νόρμα γ_2 ενός πίνακα.

Λήμμα 3: Έστω ο πίνακας $S \in \{-1,1\}^{m \times n}$. Τότε, $\gamma_2(A) \leq \gamma_2\left(\frac{1}{2}T(A)\right) + 1$.

Απόδειξη: $\gamma_2(S) = \gamma_2(T^{-1}(T(S))) = \gamma_2\left(\frac{1}{2}(T(S) + \mathbf{1}_{m \times n})\right) \leq \gamma_2\left(\frac{1}{2}T(S)\right) + 1$, αφού $\gamma_2(\mathbf{1}_{m \times n}) = 1$ και $\gamma_2(X + Y) \leq \gamma_2(X) + \gamma_2(Y)$ λόγω της τριγωνικής ανισότητας νορμών. ■

Εκτελέσαμε τα πειράματά μας στο περιβάλλον επιστημονικών υπολογισμών MATLAB (έκδοση R2008b). Για τη μοντελοποίηση και την επίλυση των ημιορισμένων προγραμμάτων χρησιμοποιήσαμε το λογισμικό CVX [56].

Προκειμένου να αποφύγουμε εμφανίσεις ίδιου πλήθους άσων στις γραμμές ή στις στήλες δύο ή περισσότερων πινάκων ωφέλειας από διαφορετικά παίγνια που αντιστοιχούν στον ίδιο παίκτη, φτιάχνουμε μια ομάδα παιγνίων νίκης-ήττας με ίσα πλήθη ενεργειών για τους δύο παίκτες, ως ακολούθως: για μια προκαθορισμένη διάσταση (ή, αλλιώς, πλήθος ενεργειών ανά παίκτη) n , ξεκινάμε από έναν μηδενικό πίνακα, επιλέγουμε μια παράμετρο $k \in [n]$ και κάνουμε k τυχαία στοιχεία της πρώτης γραμμής ίσα με 1 , $k - 1$ τυχαία στοιχεία της δεύτερης γραμμής ίσα με 1 , κ.ο.κ. Έτσι, ένα παίγνιο διπίνακα ορίζεται από το ζεύγος παραμέτρων n, k . Δημιουργούμε, λοιπόν, για κάποια επιλογή του n όλους τους πίνακες με τυχαία επιλεγμένα στοιχεία ίσα με 1 για $k = a, \dots, n$, όπου $a < n$. Για κάθε ζεύγος παραμέτρων n, k , δημιουργούμε 5 τυχαία παίγνια νίκης ήττας. Γι' αυτά τα 5 παίγνια, υπολογίζουμε τη μέγιστη, τη μέση και την ελάχιστη τιμή της νόρμας $\gamma_2^{\varepsilon/4}$ του πίνακα-αθροίσματος των πινάκων ωφελειών των παικτών μέσω επίλυσης του $(\gamma_2\text{SDP}(\lambda))$, την τιμή της παραμέτρου λ για την οποία η νόρμα $\gamma_2^{\varepsilon/4}$ παραμετροποιημένου αθροίσματος των πινάκων ωφελειών ελαχιστοποιείται (ως μεταβλητή απόφασης του



Σχήμα 4.1: Γραφικές παραστάσεις πειραμάτων πάνω σε τυχαία παίγνια νίκης-ήττας με παραμέτρους $n=50$, $k=30$ και το λιγότερο 4 άσσους ανά γραμμή. (1) Κοινή γραφική παράσταση της επιστρεφόμενης τιμής της μέγιστης (μπλε), μέσης (κόκκινο) και ελάχιστης (μωβ) τιμής της παραμέτρου λ όσο το k αυξάνεται από την τιμή 30 στην τιμή 50. (2) Κοινή γραφική παράσταση της μέγιστης τιμής της νόρμας $\gamma_2^{\varepsilon/4}$ για τον μη-παραμετροποιημένο (μπλε) και τον παραμετροποιημένο (κόκκινο) πίνακα-άθροισμα των πινάκων ωφελειών του παιγνίου που ορίζεται από το ζεύγος παραμέτρων n , k , όσο το k αυξάνεται από την τιμή 30 στην τιμή 50. (3) Κοινή γραφική παράσταση της μέσης τιμής της νόρμας $\gamma_2^{\varepsilon/4}$ για τον μη-παραμετροποιημένο (μπλε) και τον παραμετροποιημένο (κόκκινο) πίνακα-άθροισμα των πινάκων ωφελειών του παιγνίου που ορίζεται από το ζεύγος παραμέτρων n , k , όσο το k αυξάνεται από την τιμή 30 στην τιμή 50. (4) Κοινή γραφική παράσταση της ελάχιστης τιμής της νόρμας $\gamma_2^{\varepsilon/4}$ για τον μη-παραμετροποιημένο (μπλε) και τον παραμετροποιημένο (κόκκινο) πίνακα-άθροισμα των πινάκων ωφελειών του παιγνίου που ορίζεται από το ζεύγος παραμέτρων n , k , όσο το k αυξάνεται από την τιμή 30 στην τιμή 50. Στις γραφικές παραστάσεις (2), (3) και (4), παραθέτουμε στο ίδιο γράφημα, σαν μέτρο σύγκρισης τη γραφική παράσταση του φυσικού λογαρίθμου (με πράσινο χρώμα).

($\gamma_2\text{SDP}(\lambda)$) και την τιμή της νόρμας $\gamma_2^{\varepsilon/4}$ γι' αυτή την τιμή του λ . Κατά κανόνα, δε θέλουμε να δημιουργήσουμε πολύ αραιούς πίνακες, αφενός μεν διότι το άθροισμά τους έχει πολύ μικρή νόρμα $\gamma_2^{\varepsilon/4}$, αφετέρου δε, χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο των Codenotti et al [15] μπορούμε να υπολογίσουμε, ούτως ή άλλως μια επακριβή ισορροπία Nash σε πολυωνυμικό χρόνο. Λόγω της αδυναμίας του CVX να χειριστεί πίνακες μεγάλης διάστασης ($n > 70$), διενεργούμε τα πειράματά μας κλιμακώνοντας την παράμετρο k και όχι την παράμετρο n , για συγκεκριμένο n . Αυτός είναι ένας θεμιτός τρόπος διενέργειας πειραμάτων για πίνακες με στοιχεία στο $\{0,1\}$, των οποίων το μέτρο της νόρμας $\gamma_2^{\varepsilon/4}$ εξαρτάται μόνο απ' το πλήθος των άσσων ανά γραμμή. Επίσης, για να αποφύγουμε εμφανίσεις μηδενικών γραμμών και στηλών στους πίνακες των παιγνίων που δημιουργούμε, οι οποίες αντιστοιχούν σε ενέργειες

που δεν πρόκειται να επιλέξουν οι παίκτες, ορίζουμε ένα ελάχιστο πλήθος άσων ανά γραμμή, σε σχέση με την παράμετρο k .

Η γραφική παράσταση του σχήματος 4.1 απεικονίζει τα πειραματικά μας αποτελέσματα για τα ζεύγη παραμέτρων $n = 50$ και $k = 30$. Παρατηρούμε ότι η κατανομή των τιμών της παραμέτρου λ δεν φαίνεται να έχει καμία εξάρτηση από το k όσο αυτό αυξάνεται, όμως συσσωρεύεται σχετικά κοντά στο $1/2$, κάτι που να μην οδηγεί σε ισομερή κλιμάκωση των πινάκων ωφελειών, αλλά διατηρεί το μέγεθος του -net μικρό, οπότε είναι επιθυμητή. Όσον αφορά τις κατανομές τιμών της νόρμας $\gamma_2^{\varepsilon/4}$ για τον μη-παραμετροποιημένο και τον παραμετροποιημένο πίνακα-άθροισμα των πινάκων ωφελειών του παιγνίου, παρατηρούμε ότι η μεγάλη μείωση που επιφέρει η παραμετροποίηση με λ επιτυγχάνεται, όμως, εξ' αιτίας της συσσώρευσης του λ κοντά στο $1/2$, βλέπουμε ότι η καμπύλη της νόρμας $\gamma_2^{\varepsilon/4}$, για τα παραμετροποιημένα παίγνια νίκης ήττας είναι σχεδόν κλιμακωμένη εκδοχή της καμπύλης της νόρμας $\gamma_2^{\varepsilon/4}$ για τα αντίστοιχα μη-παραμετροποιημένα παίγνια νίκης-ήττας. Η σημαντικότερη παρατήρηση είναι η μικρή αλλά σταθερή αύξηση τους που προσεγγίζει χονδρικά αυτή του φυσικού λογαρίθμου, τόσο για τη μη-παραμετροποιημένη όσο και για τη παραμετροποιημένη νόρμα $\gamma_2^{\varepsilon/4}$ του ίδιου πίνακα-αθροίσματος των πινάκων ωφελειών του παιγνίου. Ωστόσο, οι τιμές των παραμέτρων που χρησιμοποιούμε είναι πολύ μικρές για να εξαχθεί ένα ασφαλές συμπέρασμα για το αν η παραμετροποίηση του αθροίσματος των πινάκων ωφελειών με λ των παιγνίων που δημιουργούμε δε μπορεί να κάνει τη νόρμα $\gamma_2^{\varepsilon/4}$ τους σταθερή, καθώς ο ρυθμός αύξησης του λογαρίθμου για μικρές τιμές του ορίσματος του είναι σχεδόν αμελητέα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5. ΕΠΙΛΟΓΟΣ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

5.1 Μελλοντικές Επεκτάσεις

Στην παρούσα εργασία παρουσιάσαμε έναν τυχαιοκρατικό αλγόριθμο πολυωνυμικού χρόνου με τον οποίο μπορούμε να υπολογίσουμε σε πολυωνυμικό χρόνο και με μεγάλη πιθανότητα μια ε -ισορροπία Nash, για παίγνια διπίνακα των οποίων το άθροισμα των πινάκων ωφελειών έχει ε -βαθμίδα που είναι λογαριθμική ως προς το πλήθος ενεργειών των παικτών. Μια ικανή συνθήκη για να έχει ένας πίνακας λογαριθμική ε -βαθμίδα είναι το να έχει σταθερή νόρμα $\gamma_2^{\varepsilon/4}$ ως προς τις διαστάσεις του. Σε αντίθεση με την ε -βαθμίδα, για την οποία κανένας αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου δεν είναι γνωστός, η νόρμα $\gamma_2^{\varepsilon/4}$ μπορεί να υπολογιστεί σε πολυωνυμικό χρόνο μέσω της επίλυσης ενός θετικά ημιορισμένου προγράμματος, ενώ ο υπολογισμός της είναι το πρώτο βήμα ενός τυχαιοκρατικού αλγορίθμου πολυωνυμικού χρόνου που επιστρέφει μια λογαριθμική προσέγγιση της ε -βαθμίδας. Έτσι, αποκτάμε έναν πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμο επαλήθευσης για το αν ένα παίγνιο διπίνακα ανήκει στην κλάση παιγνίων διπίνακα για τα οποία μπορούμε να υπολογίσουμε μια ε -ισορροπία Nash σε πολυωνυμικό χρόνο με μεγάλη πιθανότητα. Στη συνέχεια, παρουσιάσαμε μια πρόταση για την επέκταση της κλάσης των παιγνίων διπίνακα με σταθερή νόρμα $\gamma_2^{\varepsilon/4}$, θεωρώντας την παραμετροποίηση του αθροίσματος των πινάκων ωφελειών τους με μια παράμετρο $\lambda \in (0,1)$. Παραμετροποιούμε αναλόγως το ημιορισμένο πρόβλημα υπολογισμού της νόρμας $\gamma_2^{\varepsilon/4}$ ενός πίνακα και

αποδεικνύουμε ότι ένα παραμετροποιημένο παίγνιο διπίνακα έχει πάντα χαμηλότερη νόρμα $\gamma_2^{\varepsilon/4}$ από το αντίστοιχο του μη-παραμετροποιημένο παίγνιο διπίνακα. Χρησιμοποιούμε την παραμετροποιημένη εκδοχή του ημιορισμένου προγράμματος υπολογισμού της νόρμας $\gamma_2^{\varepsilon/4}$ ως έναν πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμο επαλήθευσης για το αν μπορούμε να υπολογίσουμε μια ε -ισορροπία Nash ενός παιγνίου διπίνακα σε πολυωνυμικό χρόνο με μεγάλη πιθανότητα, με κριτήριο αν υπάρχει μια κατάλληλη τιμή της παραμέτρου λ , τέτοια ώστε αν ένα (μη-παραμετροποιημένο) παίγνιο δεν έχει σταθερή νόρμα $\gamma_2^{\varepsilon/4}$, το αντίστοιχο του παραμετροποιημένο παίγνιο να την έχει. Ακόμη, αποδεικνύουμε ότι σημαντικές υποκλάσεις παιγνίων διπίνακα με στιγμιότυπα για τα οποία μια ισορροπία Nash είναι υπολογίσιμη ή, τουλάχιστον, προσεγγίσιμη σε πολυωνυμικό χρόνο ανήκουν στην προτεινόμενη από εμάς υποκλάση παιγνίων διπίνακα. Συνοδεύουμε τα θεωρητικά αποτελέσματα με υπολογιστικά πειράματα πάνω σε παίγνια νίκης-ήττας, που διενεργήθηκαν με στόχο τον προσδιορισμό της γενικότητας και της σημασίας αυτής της υποκλάσης παιγνίων διπίνακα.

5.1 Μελλοντικές Επεκτάσεις

Ο γενικός ερευνητικός στόχος είναι η διεύρυνση της κλάσης παιγνίων διπίνακα τα οποία αποτελούν εύκολα στιγμιότυπα του προβλήματος εύρεσης μιας ισορροπίας Nash ή, έστω, του προβλήματος εύρεσης μιας ε -ισορροπίας Nash, δηλαδή επιδέχονται ένα (πλήρως) πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικό σχήμα για το πρόβλημα. Ένας παράλληλος, αλλά φαινομενικά δυσκολότερος γενικός ερευνητικός στόχος είναι ο σχεδιασμός ενός πολυωνυμικού χρόνου προσεγγιστικού σχήματος για γενικά παίγνια διπίνακα ή η απόδειξη ότι αυτό δεν υπάρχει, με βάση τα τρέχοντα δεδομένα στις σχέσεις εγκλεισμού μεταξύ των κλάσεων πολυπλοκότητας χρόνου. Το ερώτημα «για ποιες υποκλάσεις παιγνίων διπίνακα των οποίων ο πίνακας $Z := R + C$ έχει $\gamma_2^{\varepsilon/4}(Z) = \Omega(\log(mn))$ υπάρχει μια τιμή $\lambda^* \in (0,1)$, φραγμένη μακριά από τις τιμές 0 και 1 , για την οποία ο πίνακας $Z(\lambda) := \lambda R + (1 - \lambda)C$ να έχει

$\gamma_2^{\varepsilon/4}(Z(\lambda)) = O(1)$;» παραμένει ανοιχτό., ωστόσο τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας αποτελούν ένα αρχικό στάδιο για τη διερεύνησή του. Επίσης, τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας μπορούν να επεκταθούν μέσω της ανακάλυψης υποκλάσεων των παιγνίων διπίνακα για τις οποίες να υπάρχει θεωρητική εγγύηση πως το παραμετροποιημένο άθροισμα των πινάκων ωφελειών έχει σταθερή νόρμα $\gamma_2^{\varepsilon/4}$ και της χρησιμοποίησης του ημιορισμένου προγράμματος $\gamma_2\text{SDP}(\lambda)$ ως πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμο επαλήθευσης γι' αυτό το κριτήριο. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον θα είχε η ανακάλυψη υποκλάσεων παιγνίων διπίνακα που είναι γνωστές στη θεωρία παιγνίων, οι οποίες περιλαμβάνουν παίγνια που πληρούν την παραπάνω ιδιότητα και δεν υπάγονται σε καμία από τις μέχρι τώρα γνωστές υποκλάσεις παιγνίων διπίνακα για τα παίγνια των οποίων μπορούμε να βρούμε μια ισορροπία Nash ή, έστω, μια ε -ισορροπία Nash σε πολυωνυμικό χρόνο. Με άλλα λόγια, εκκρεμεί ένας χαρακτηρισμός της κλάσης παιγνίων που η νόρμα $\gamma_2^{\varepsilon/4}$ του παραμετροποιημένου αθροίσματος των πινάκων ωφελειών τους είναι σταθερή.

Προς αυτή την κατεύθυνση, θα βοηθούσε μια εκτενέστερη πειραματική διερεύνηση των αποτελεσμάτων που δίνουν το ημιορισμένο πρόγραμμα ($\gamma_2\text{SDP}$) και ο αλγόριθμος που παρουσιάσαμε στο κεφάλαιο 3, με τη διεξαγωγή των πειραμάτων να γίνεται περισσότερο στοχευμένα, σε διάφορες ενδιαφέρουσες κατηγορίες παιγνίων διπίνακα με πολύ μεγάλο πλήθος ενεργειών για τον κάθε παίκτη.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- [1] Abbott, T., Kane, D., Valiant, P., *On the Complexity of 2-Player Win-Lose Games*, in Proc. of the 46th Annual IEEE Symposium on Foundations of Theoretical Computer Science (FOCS'05), 2005
- [2] Addario-Berry, L., Olver, N., Vetta, A., *A Polynomial Time Algorithm for Finding Nash Equilibria in Planar Win-Lose Games*, Journal of Graph Algorithms and Applications, vol. 1(1), pp. 1-11, 2007.
- [3] Adsul, B., Garg, R., Mehta, R., Sohoni, M., *Rank-1 Bimatrix Games: A Homeomorphism and a Polynomial Time Algorithm*, ArXiv:1010.3083v2 [cs.GT], 2010
- [4] Alizadeh, F., Haeberly, J.-P., Overton, M., *Primal-Dual Interior-Point Methods for Semidefinite Programming: Convergence Rates, Stability and Numerical Results*, SIAM Journal of Optimization, Vol. 8(3), pp. 746-768, SIAM, 1998
- [5] Alon, N., Lee, T., Shraibman, A., Vempala, S., *The approximate rank of a matrix and its algorithmic applications*, in Proc. of 45th Symposium on Theoretical Computer Science, (STOC13), ACM, 2013.
- [6] Alon, N., Lee, T., Shraibman, A., *The cover number of a matrix and its algorithmic applications*, LIPIcs-Leibniz International Proceedings in Informatics, Vol. 28. Schloss Dagstuhl-Leibniz-Zentrum fuer Informatik, 2014.
- [7] Arriaga, R., Vempala, S., *An algorithmic theory of learning: robust concepts and random projection*, Machine Learning, vol. 63, pp. 161-182, Springer-Verlag, 2006.
- [8] Aumann, R., *Subjectivity and Correlation in Randomized Strategies*, Journal of Mathematical Economics, vol. 1, pp. 67-96, North Holland, 1974.
- [9] Barany, I., Vempala, S., Vetta, A., *Nash Equilibria in Random Games*, Random Structures and Algorithms, vol. 31(4), pp. 391-405, Wiley Interscience, 2005.

- [10] Bosse, H., Byrka, J., Markakis, E., *New Algorithms for Approximate Nash Equilibria in Bimatrix Games*, Theoretical Computer Science, vol. 411, pp. 164-173, 2010, Elsevier. Conference version on WINE 2007.
- [11] Boyd, S., Vandenberghe, L., *Convex Optimization*, 1st ed., Cambridge University Press, 2004.
- [12] Chen, X., Deng, X., *3-Nash is PPAD-complete*, Electronic Colloquium on Computational Complexity (ECCC), vol. 134, 2005.
- [13] Chen, X., Deng, X., *Settling the complexity of 2-Player Nash Equilibrium*, in Proc. of IEEE annual symposium on Foundations of Computer Science (FOCS'06), IEEE, 2006
- [14] Chen, X., Deng, X., Teng, S-H. *Computing Nash Equilibria: Approximation and smoothed complexity*, in Proc. of IEEE annual symposium on Foundations of Computer Science (FOCS'06), IEEE, 2006
- [15] Codenotti, B. Leonchini, M., Resta, G., *Efficient Computation of Nash Equilibria for Very Sparse Win-Lose Bimatrix Games*, in Proc. of European Symposium on Algorithms (ESA'06), LNCS 4168, pp. 232-243, Springer, 2006.
- [16] Dadush, D., Vempala, S., *Near-Optimal Deterministic Algorithms for Volume Computation and Lattice Problems*, ArXiv:1201.5972v2 [cs.CC], 2012.
- [17] Daskalakis, C., Goldberg, P., Papadimitriou, C., *The complexity of computing a Nash equilibrium*, TR05-11, University of California at Berkeley, Computer Science Division, Berkeley, CA, USA, 2005.
- [18] Daskalakis, C., Papadimitriou, C., *Three-Player games are hard*, Electronic Colloquium on Computational Complexity, vol. 139, pp. 81-87, 2005.
- [19] Daskalakis, C., Mehta, A., Papadimitriou, C., *A note on approximate Nash equilibria*, in Proc. of the 2nd Workshop of Internet and Network Economics (WINE'06), 2006.
- [20] Daskalakis, C., Mehta, A., Papadimitriou, C., *Progress in approximate Nash equilibria*, in Proc. of the 8th ACM Conference on Electronic Commerce (EC'07), 2007.
- [21] Daskalakis, C., *On the Complexity of Approximating a Nash Equilibrium*, ACM Transactions on Algorithms, vol. 9(3), art. 23, ACM, 2013

- [22] Fearnley, J., Goldberg, P.W., Savani, R., Sorensen T.B., *Approximate Well Supported Nash Equilibria Below Two-Thirds*, in SAGT 2012, LNCS 7615, pp. 108-119, Springer, 2012.
- [23] Feder, T, Naderzadeh, H., Saberi, A., *Approximating Nash Equilibria Using Small-Support Strategies*, in Proc. of the 8th ACM Conference on Electronic Commerce (EC'07), ACM, 2007
- [24] Gilboa, I., Zemel, E., *Nash and Correlated Equilibria: some complexity considerations*, Games and Economic Behavior, vol. 1(1), pp. 80-93, Elsevier, 1989
- [25] Golub, G., Van Loan, C., *Matrix Computations*, 3rd ed., John Hopkins University Press, 1996
- [26] Grant, M., Boyd, S., *CVX: A modeling system for disciplined convex programming*, v.1.22, [HTTP://WWW.CVXR.COM](http://www.cvxr.com)
- [27] Kannan, R., Theobald, T., *Games of fixed rank: a hierarchy of bimatrix games*, Economic Theory, vol. 42, pp.152-173, Springer, 2010. Conference version on SODA 2007.
- [28] Khachiyan, L., *A polynomial algorithm in Linear Programming*, Soviet Mathematics Doklady, vol. 20, pp. 191-194, 1979
- [29] Kontogiannis, S., Panagopoulou, P., Spirakis, P. G., *Polynomial algorithms for approximating Nash equilibria of bimatrix games*, in Proc. of the 2nd Workshop of Internet and Network Economics (WINE'06), 2006.
- [30] Kontogiannis, S., Spirakis, P. G., *Exploiting Concavity in Bimatrix Games: New Polynomially Tractable Classes*, in Proc. of 13th Workshop on Approximation Algorithms for Combinatorial Optimization Problems (APPROX2010), LNCS6302, pp. 312--325, Springer, 2010.
- [31] Kontogiannis, S., Spirakis, P. G., *Well Supported Approximate Equilibria in Bimatrix Games*, Algorithmica, vol. 57(4), pp. 653—667, Springer, 2010.
- [32] Kontogiannis, S., Spirakis, P. G., *Approximability of Symmetric Games and related experiments*, in 10th int. Symp. on Experimental Algorithms (SEA2011), LNCS6630, pp. 1--20, Springer , 2011
- [33] Kontogiannis, S., Spirakis, P. G., *On mutual concavity and strategically zero-sum games*, Theoretical Computer Science, vol. 432, pp. 64-76, Elsevier, 2012.
- [34] Lee, T., Shraibman, A., *An Approximation Algorithm for Approximation Rank*, ArXiv:0809.2093v1, 2008

- [35] Lee, J., Recht, B., Salakhutdinov, R., Srebro, N., Tropp, J., *Practical Large Scale Optimization for Max-Norm Regularization*, Neural Information Processing Systems, 2010
- [36] Lemke, C. E., Howson, J. T., *Equilibrium points of bimatrix games*, Journal of Society of Industrial and Applied Mathematics, vol. 12(2), pp 413-423, SIAM, 1964
- [37] Linial, N., Mendelson, S., Schechtman, G., Shraibman, A., *Complexity Measures of Sign Matrices*, Combinatorica, vol. 27(4), pp. 439-463, Springer, 2007
- [38] Linial, N., Shraibman, A., *Lower bounds on communication complexity based on factorization norms*, in Proceedings of 39th ACM STOC, 2007
- [39] Lipton R., Markakis, E., Mehta, A., *Playing large games using simple strategies*, in Proc. of the 4th ACM Conference on Electronic Commerce (EC'03), ACM, 2003
- [40] Mangasarian, O., Stone, H., *Two-person nonzero-sum games and quadratic programming*, Journal of Mathematical Analysis and applications, vol. 9, pp. 348-355, Elsevier, 1964.
- [41] Mehta, R., *Constant Rank Bimatrix Games are PPAD-Hard*, in Proc. of the 46th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC'14), 2014.
- [42] Murty, K. G., Kabadi, S. N., *Some NP-Complete Problems in Quadratic and Nonlinear Optimization*, Mathematical Programming, vol. 39, pp. 117-129, Springer, 1987
- [43] Nash, J. F., *Non-Cooperative Games*, Annals of Mathematics, vol. 54, 289-295, JSTOR, 1951.
- [44] Nau, R., Gomez Canovas, S., Hansen, P., *On the Geometry of Nash Equilibria and Correlated Equilibria*, International Journal of Game Theory, vol. 32, pp. 443-453, Springer, 2003
- [45] Nisan, N., Ronen, A., *Algorithmic mechanism design*, Proceedings of the 31st annual ACM symposium on Theory of computing (STOC'99), ACM, 1999
- [46] Nisan, N, Roughgarden, T., Tardos, E., Vazirani, V., *Algorithmic Game Theory*, 1st ed., Cambridge University Press, 1st ed., 2007
- [47] Nocedal, J., Wright, S., *Numerical Optimization*, 2nd ed., Springer, 2006.
- [48] Osborne, O., Rubinstein, A., *A course in game theory*, 3rd ed., MIT Press, 1994.
- [49] Papadimitriou, C., *On the complexity of the Parity Argument and other inefficient proofs of Existence*, Journal of Computer and System Sciences, vol. 48, pp. 498-532, Elsevier, 1994

- [50] Savani, R., Von Stengel, B., *Exponentially many steps for finding a Nash equilibrium in a bimatrix game*, Proceedings of the 45th Annual IEEE symposium on Foundations of Computer Science, pp. 258-267, 2004.
- [51] Sinclair, A., Lecture notes of the course “CS271: Randomness and computation”, Lecture 13, UC Berkeley, 2011.
- [52] Srebro, N., Shraibman, A., *Rank, Trace-norm and Max-norm*, COLT 2005, LNAI 3559, pp 545-560, Springer-Verlag, 2005.
- [53] Strang, G., *Linear Algebra and its Applications*, 3rd ed., Thomson Learning, 1988.
- [54] Tsaknakis, H., Spirakis, P. G., *An optimization approach for approximate Nash Equilibria*, Electronic Colloquium on Computational Complexity, Rev. 1 of report 67, 2007
- [55] Vavasis, S.A., *Quadratic programming is in NP*, TR90-1099, Dept. of Computer Science, Cornell University, Ithaca, NY, USA, 1990.
- [56] Vavasis, S.A., *Approximation algorithms for indefinite quadratic programming*, Mathematical Programming, vol. 57, pp. 279-311, Springer, 1992.
- [57] Von Neumann, J., Morgenstern, O., *Theory of games and economic behavior*, 3rd ed., Princeton University Press, 1953 (1st ed, Princeton University Press, 1947).
- [58] Yannakakis, M., *Equilibria, Fixed Points and Complexity Classes*, ArXiv:0802:2831v1 [cs.CC], 2008
- [59] Ye, Y., Tse, E., An extension of Karmarkar’s projective algorithm for convex quadratic programming, Mathematical Programming, vol. 44, pp. 157-179, 1989
- [60] “*Low-Rank Approximation*”, λήμμα της αγγλικής Wikipedia, [HTTPS://EN.WIKIPEDIA.ORG/WIKI/SINGULAR_VALUE_DECOMPOSITION](https://en.wikipedia.org/wiki/Singular_value_decomposition)

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Κατασκευή M-ελλειψοειδών και δικτυωτών του Rogers

Στο παράρτημα της εργασίας, θα παρουσιάσουμε συνοπτικά αλγορίθμους κατασκευής M-ελλειψοειδών και δικτυωτών του Rogers, ως προς ένα κυρτό σώμα $K \subset \mathbb{R}^n$. Θεωρούμε ότι έχουμε ένα μαντείο, δηλαδή έναν αλγόριθμο που εξετάζει σε ένα βήμα, αν ένα στοιχείο $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ανήκει στο K , το οποίο χρησιμοποιούμε στους αλγορίθμους που θα παρουσιάσουμε.

Για την κατασκευή ενός M-ελλειψοειδούς χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο των Dadush και Vempala [16], ο οποίος επιστρέφει τον πίνακα που περιγράφει ένα M-Ελλειψοειδές ως προς το K σε χρόνο $2^{O(n)}$ και πολυωνυμικό χώρο ως προς n . Πριν περιγράψουμε τον αλγόριθμο, παραθέτουμε κάποιους ορισμούς που χρησιμοποιήθηκαν για τη σχεδίασή του.

Για το κυρτό σώμα K , ορίζουμε τη l -νόρμα ως προς K ως ακολούθως: για $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$l_K(A) := \left(\int \|A\mathbf{x}\|_K^2 d\gamma_n(\mathbf{x}) \right)^{1/2}$$

όπου γ_n το τυπικό μέτρο Gauss στον \mathbb{R}^n . Ένα ελλειψοειδές του Lewis για το K περιγράφεται από τον πίνακα A^* , που είναι η λύση του ακόλουθου (γενικά μη-κυρτού) μαθηματικού προγράμματος:

$$\begin{aligned} \text{(A.1)} \quad & \max \det(A) \\ \text{subject to} \quad & A \in \mathbb{R}^{n \times n}, l_K(A) \leq 1 \end{aligned}$$

Παίρνουμε το αντίστοιχο ελλειψοειδές μέσω του μετασχηματισμού $A^*B_2^n$, όπου $B_2^n := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\|_2 \leq 1\}$. Μπορούμε να αποκτήσουμε μια κυρτή χαλάρωση του

παραπάνω μαθηματικού προγράμματος, αν χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη προσεγγιστική εκδοχή της L -νόρμας ως προς K

$$\bar{l}_K(A) := \sum_{x \in \{-1,1\}^n} \frac{1}{2^n} \|Ax\|_K$$

Χρησιμοποιώντας την \bar{l} -νόρμα ως προς K στη θέση της L -νόρμας, ορίζουμε το ημιορισμένο πρόγραμμα που αποτελεί χαλάρωση του προγράμματος (A.1)

$$\begin{aligned} \text{(LSDP)} \quad & \max (\det(A))^{1/n} \\ \text{subject to} \quad & A \succcurlyeq 0, \bar{l}_K(A) \leq 1 \end{aligned}$$

Ένα προσεγγιστικό ελλειψοειδές του Lewis για το K περιγράφεται από τον πίνακα A^* , που είναι η λύση του παραπάνω κυρτού προγράμματος. Αρχικά, υπολογίζεται ένας πίνακας μετασχηματισμού που περιγράφει ένα προσεγγιστικό ελλειψοειδές του Lewis, το οποίο στη συνέχεια βελτιώνεται επαναληπτικά, μέχρις ότου συγκλίνει στο ζητούμενο M-ελλειψοειδές.

Πίνακας Π.1: Ο αλγόριθμος των Dadush και Vempala για τον υπολογισμό ενός M-ελλειψοειδούς.

COMPUTE_M_ELLIPSOID(K)	
Είσοδος: Κυρτό σώμα $K \subset \mathbb{R}^n$, μαντείο ελέγχου αν ένα σημείο $x \in \mathbb{R}^n$ ανήκει στο K	
1.	$K_1 := K, T := \log^* n$
2.	Για $i = 1, \dots, T - 1$
a.	$A_i := \text{SOLVE_LSDP}(K_i)$ //επίλυση του (LSDP)
b.	$r_{in} := \frac{\sqrt{n}}{\log^{(i)} n \bar{l}_{K_i}(A)}, r_{out} := \frac{\log^{(i)} n \bar{l}_{K_i}(A^{-1})}{\sqrt{n}}$
c.	$K_{i+1} := \text{conv}\{K_i \cap r_{out} A_i B_2^n, r_{in} A_i B_2^n\}$
3.	Ορίζουμε $E := \frac{\sqrt{n}}{\bar{l}_{K_{T-1}}(A)} A_{T-1} B_2^n$
Εξοδος: Πίνακας E που περιγράφει ένα M-ελλειψοειδές ως προς το K	

Προχωράμε τώρα στην περιγραφή ενός αλγορίθμου κατασκευής ενός δικτυωτού του Rogers, τον οποίο παρουσιάζουν οι Alon et al στο [5]. Αυτός ο αλγόριθμος επιστρέφει τη βάση ενός δικτυωτού ως προς το K που πληροί τις προϋποθέσεις να είναι δικτυωτό του Rogers (ορισμός 9) σε χρόνο $2^{O(n)}$. Ο αλγόριθμος σχεδιάστηκε πάνω στην αρχή της επαναληπτικής βελτίωσης ενός αρχικά παραγόμενου δικτυωτού, μέχρις ότου η ελαχίστη απόσταση του \mathcal{L} από το K , $\lambda_1(K, \mathcal{L})$, να γίνει μεγαλύτερη ή ίση του $2/3$. Στο [5], αποδεικνύεται ότι η κλιμάκωση στο βήμα 3. του αλγορίθμου κάνει την ακτίνα κάλυψης του K από το \mathcal{L} να γίνει $\mu(K, \mathcal{L}) = 1$.

Πίνακας Π.2: Ο αλγόριθμος των Alon et al για τον υπολογισμό της βάσης ενός δικτυωτού του Rogers.

COMPUTE_ROGER'S_LATTICE(K)
Είσοδος: Κυρτό σώμα $K \subset \mathbb{R}^n$, μαντείο ελέγχου αν ένα σημείο $x \in \mathbb{R}^n$ ανήκει στο K
<ol style="list-style-type: none"> 1. Υπολογίζουμε τη βάση ενός δικτυωτού $\mathcal{L}_1, \mathbf{b}_1$, τ.ω. $\det(\mathcal{L}_1) = 1$ 2. Για κάθε δυνατή ανάθεση τιμών στις συνιστώσες του $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \{-1, 0, 1\}^n$, τέτοια ώστε $\exists i: \xi_i \neq 0$: <ol style="list-style-type: none"> a. $a := \sum_{i=1}^n \xi_i b_i / 3$ b. Ορίζουμε $\mathcal{L}_{i+1} := \mathcal{L}_i + a\mathbb{Z}$ // \mathbb{Z}: τυπικό δικτυωτό του \mathbb{Z}^n c. Αν $\lambda_1(K, \mathcal{L}_{i+1}) = \lambda_1(K, \mathcal{L}_i)$, τότε: <ol style="list-style-type: none"> i. $\mathcal{L}_{i+1} := \mathcal{L}_i$ ii. Υπολογισμός νέας βάσης για το \mathcal{L}_{i+1} iii. Επανεκκίνηση του βήματος (2.) 3. Κλιμάκωσε το \mathcal{L} έτσι ώστε $\lambda_1(K, \mathcal{L}) = 2/3$
Εξοδος: Βάση $\mathbf{b} := (b_1, \dots, b_n)$ που περιγράφει δικτυωτό του Rogers, \mathcal{L} , ως προς K .

ΣΥΝΤΟΜΟ ΒΙΟΓΡΑΦΙΚΟ

Ο Δανιήλ-Δημήτριος Πρόσκος γεννήθηκε στο Μαρούσι Αττικής το 1988. Τον Ιούνιο του 2006 αποφοίτησε από το Ενιαίο Λύκειο Αμυνταίου και τον Σεπτέμβριο του ίδιου έτους ξεκίνησε τις σπουδές του στο Τμήμα Πληροφορικής (νυν Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής) του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, απ' το οποίο αποφοίτησε τον Φεβρουάριο του 2013. Τον ίδιο μήνα, ξεκίνησε να παρακολουθεί το πρόγραμμα μεταπτυχιακών σπουδών του ίδιου τμήματος, απ' το οποίο αποφοίτησε τον Μάρτιο του 2016, με ειδίκευση στη Θεωρία Επιστήμης Υπολογιστών.

