Θεωρία Γραφημάτων

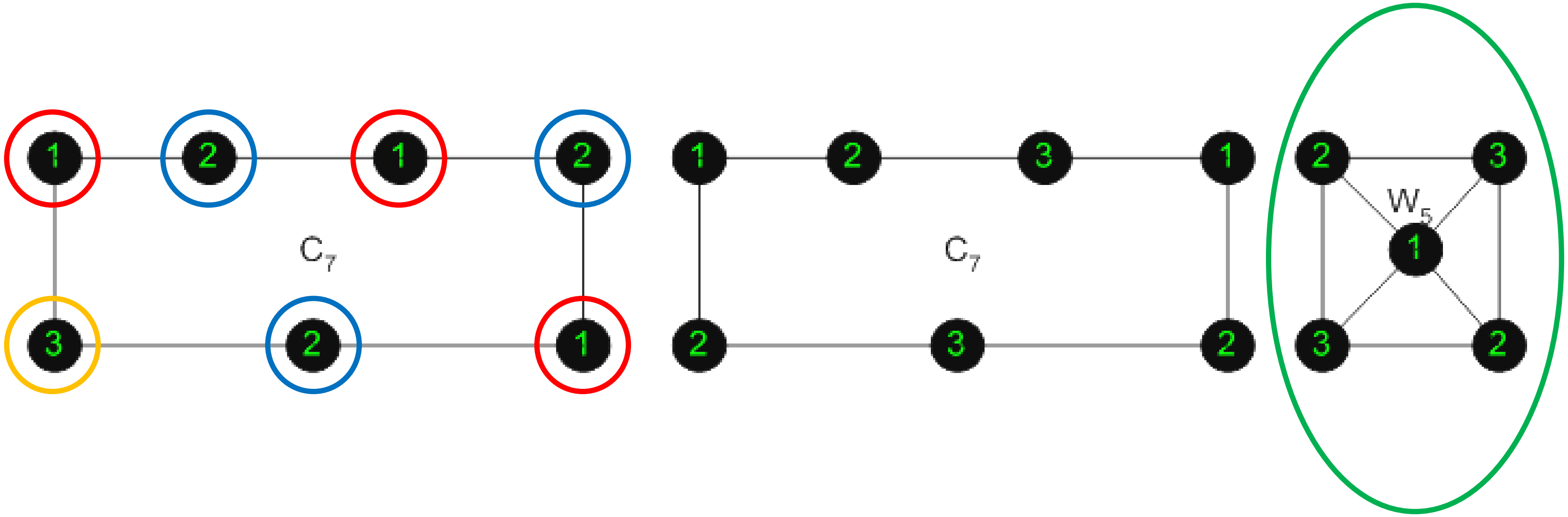
Θεμελιώσεις-Αλγόριθμοι-Εφαρμογές

Ενότητα 7

ΧΡΩΜΑΤΙΣΜΟΣ

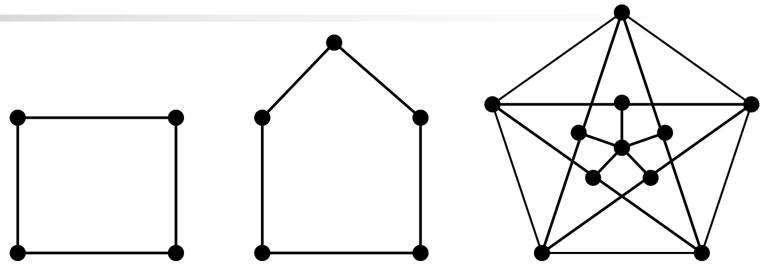
Εισαγωγή

- Χρωματισμός κορυφών-ακμών-περιοχών.
- Χρωματική τάξη (color class): σύνολο κορυφών με το ίδιο χρώμα.



Εισαγωγή

$\chi(G)$ $\omega(G)$ $\alpha(G)$ $\kappa(G)$



$\chi(G) \geq \omega(G)$

- Γράφημα *k*-χρωματίσιμο (*k*-colorable): οι κόμβοι του μπορούν να χρωματισθούν με *k* χρώματα.

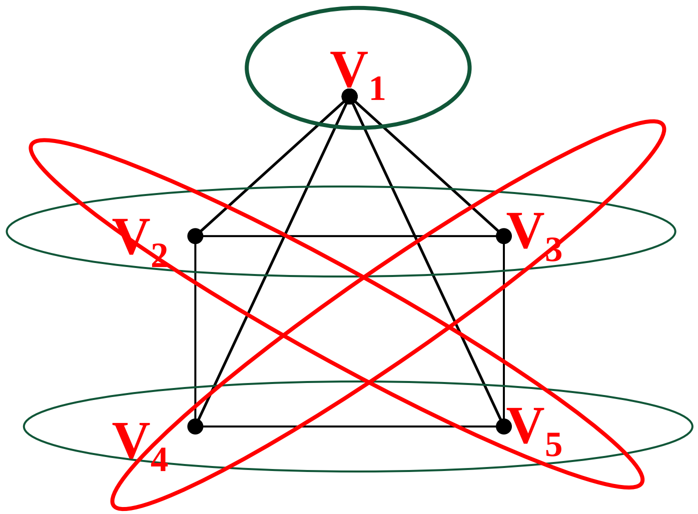
- Γράφημα *k*-χρωματικό (*k*-chromatic): οι κόμβοι του μπορούν να χρωματισθούν με *k* χρώματα, αλλά όχι με *k*-1.

- Χρωματικός αριθμός (chromatic number): χ(G) = *k*.

Εισαγωγή

- Χρωματικός αριθμός (chromatic number): $\chi(G) = k$.
- Αν ένα γράφημα G είναι p-χρωματίσιμο (όπου $p > \chi(G)$), τότε το G είναι και r-χρωματίσιμο (όπου $p > r \geq \chi(G)$).
- Γράφημα χρωματίσιμος κατά μοναδικό τρόπο (uniquely colorable)

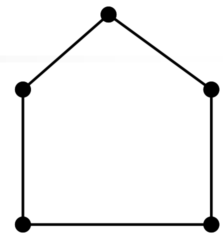
Ωστόσο, υπάρχουν ειδικές περιπτώσεις για $k = \chi(G)$ οι χρωματικές κλάσεις είναι σταθερές .



Γενική περίπτωση για $k > \chi(G)$, το G μπορεί να χρωματιστεί με πολλούς διαφορετικούς τρόπους χρησιμοποιώντας k χρώματα

3 χρωματικές κλάσεις $\{v_1\}, \{v_2,v_5\}, \{v_3,v_4\}$

Εισαγωγή



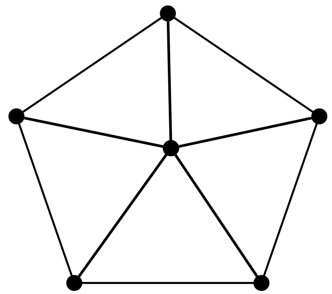
$\chi(G) = 3$
$\chi(H) < 3$

- <u>Κρίσιμος (critical):</u> $\chi(H) < \chi(G)$, για κάθε H υποσύνολο του γραφήματος G.

- <u>*k*-κρίσιμος (k-critical):</u> το G είναι *k*-χρωματικό και κρίσιμο, $k \geq 2$

εάν $\chi(G)=k$ και $\chi(G-v)=k-1$, για κάθε *v* που ανήκει V(G).

W_6



$\chi(W_6) = 4 \Rightarrow$ 4-χρωματικό και κρίσιμο
$\Rightarrow$ 4-κρίσιμο

- <u>Θεώρημα:</u> Αν το γράφημα G είναι *k*-κρίσιμο, τότε $d(G) \geq k-1$.

Εισαγωγή

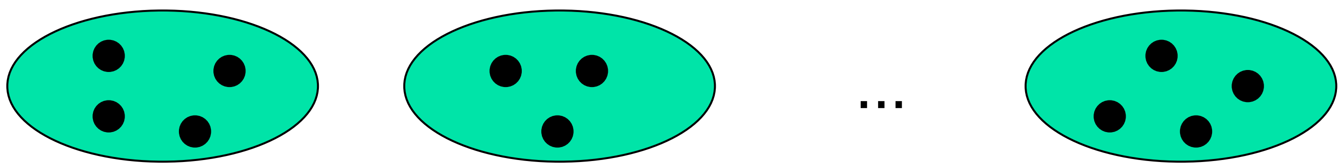
Θεώρημα: G είναι k-κρίσιμο $\Rightarrow$ $d(G) \geq k-1$

Υποθέτουμε ότι: G k-κρίσιμο και $d(G) < k-1$.

k-κρίσιμος $\Rightarrow$ $\chi(G-v) = k-1 \quad \forall v \in V(G)$

Επιλέγω v : $d(v) = d(G) < k-1$.

Έστω $V_1, V_2, \ldots, V_{k-1}$ οι χρωματικές κλάσεις του $G-v$



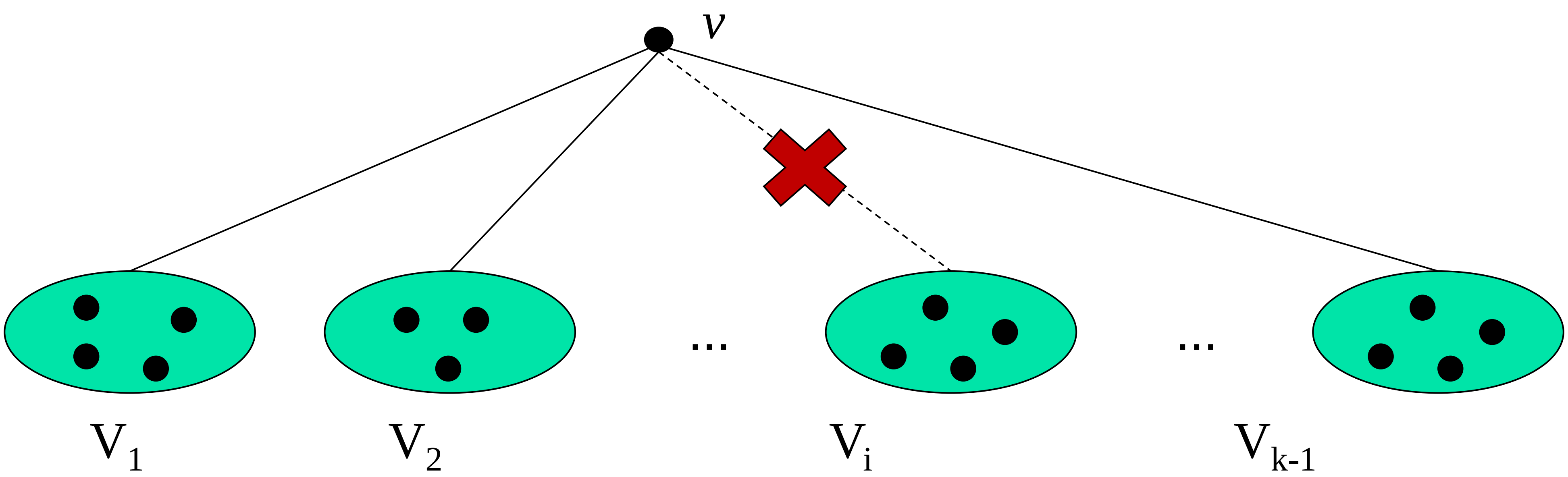
V_1 V_2 V_{k-1}

Εισαγωγή

Θεώρημα: G είναι k-κρίσιμο $\Rightarrow$ $d(G) \geq k-1$

$\exists\, V_i : vx \notin E(G) \;\; \forall x \in V_i$

Γιατί ?

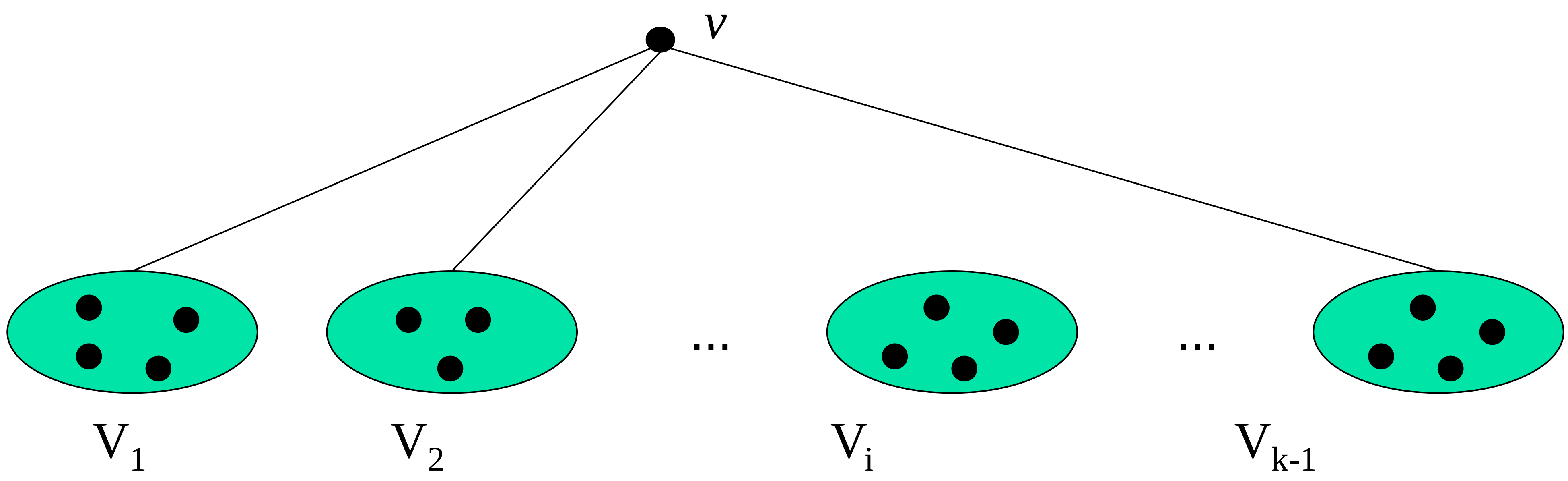


Εισαγωγή

Θεώρημα: G είναι k-κρίσιμο $\Rightarrow$ $d(G) \geq k-1$

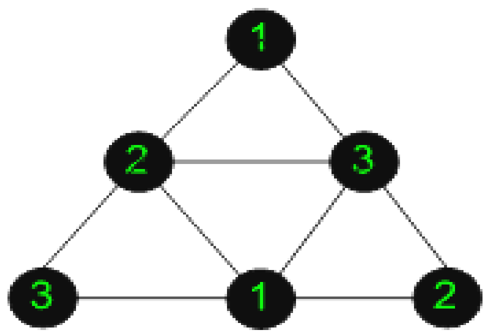
v χρωματίζεται με το χρώμα i $\longrightarrow$ G $k-1$ χρωματίσιμο

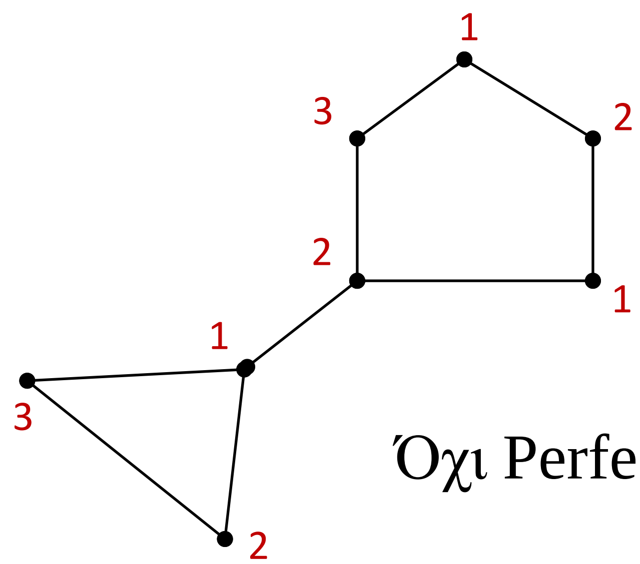
άτοπο



Εισαγωγή

- Τέλειο γράφημα (perfect graph): αριθμός κλίκας ω(H)=χ(H) χρωματικό αριθμό, για κάθε επαγόμενο υπογράφημα H του γραφήματος G.





Όχι Perfect

Holes

Antiholes

Εισαγωγή

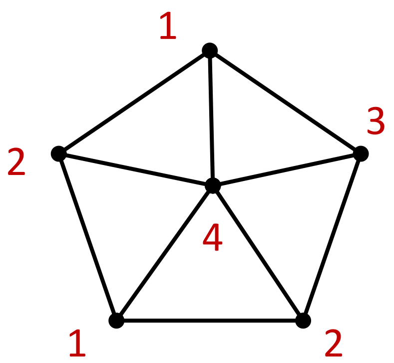
- Γράφημα *k*-χρωματίσιμο ως προς ακμές (*k*-edge colorable):
  οι ακμές μπορούν να χρωματισθούν με *k* χρώματα.
- Γράφημα *k*-χρωματικό ως προς ακμές (*k*-edge chromatic):
  οι ακμές μπορούν να χρωματισθούν με *k* χρώματα, αλλά όχι με *k*-1.
- Χρωματικός αριθμός ακμών ή κατάλογος (chromatic index):
  $\chi'(G) = k$.
- Γράφημα *k*-χρωματίσιμο ως προς περιοχές (*k*-region colorable):
  οι περιοχές μπορούν να χρωματισθούν με *k* χρώματα

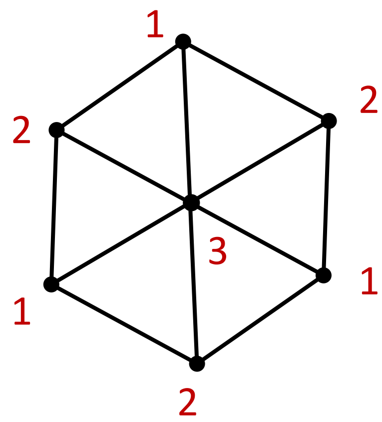
X′(G)

Χάρτες

Χρωματισμός Κόμβων

- $\chi(K_n) = n$
- $\chi(N_n) = 1$
- $\chi(K_{m,n}) = 2$, για m, n ≥ 1
- $\chi(G) = 2$, αν δεν υπάρχει κύκλος περιττού μήκους ⇒ ΌΧΙ
- $\chi(T) = 2$, αν το δένδρο έχει n > 2 κορυφές
- $\chi(C_{2n}) = 2$
- $\chi(C_{2n+1}) = 3$
- $\chi(W_{2n}) = 3$
- $\chi(W_{2n+1}) = 4$





Χρωματισμός Κόμβων

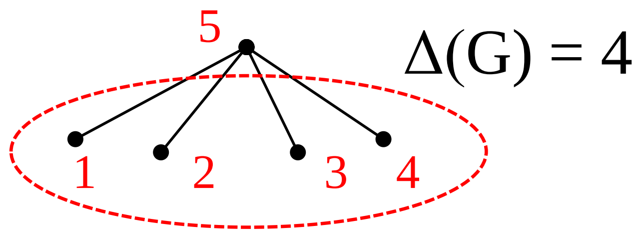
- Ερώτημα: ποιος είναι ο χρωματικός αριθμός ενός γραφήματος;
- Απάντηση: $r \leq \chi(G) \leq n$, αν υπάρχει υπογράφημα K_r .

- Θεώρημα: Κάθε γράφημα μη-πλήρης με μέγιστο βαθμό D είναι (D+1)-χρωματίσιμο (οι κόμβοι του μπορούν να χρωματιστούν με D+1 χρώματα).

- Θεώρημα (Brookes 1941): Κάθε γράφημα μη-πλήρες με $D(G) \geq 3$ είναι D-χρωματίσιμος.

Χρωματισμός Κόμβων

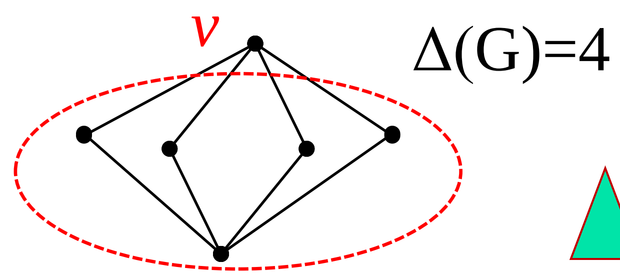
- Εάν *G* έχει *n* = D+1 κόμβους ⇒ η αλήθεια του Θεωρήματος είναι προφανής.



- Υποθέτουμε ότι ισχύει για *n* = *k*-1 ⇒ θα αποδείξουμε ότι ισχύει όταν το G έχει *k* κόμβους.

  Αν από G διαγράψουμε *v* : d(*v*) = D ⇒ G-*v* είναι βαθμού το πολύ D και έχει n-1 κόμβους.

  Άρα G-*v* είναι (D+1)-χρωματίσιμος ⇒ *v* παίρνει ένα χρώμα που δεν υπάρχει στους γείτονές του.



Χρωματισμός Κόμβων

- <u>Θεώρημα:</u> Κάθε επίπεδος γράφος είναι 6-χρωματίσιμος.
- <u>Θεώρημα:</u> Κάθε επίπεδος γράφος είναι 5-χρωματίσιμος.
- <u>Θεώρημα:</u> Κάθε επίπεδος γράφος είναι 4-χρωματίσιμος.

  Η απόδειξη δεν δίνεται σε κανένα δικτυακό βιβλίο

Χρωματισμός Κόμβων

Κάθε Επίπεδο Γράφημα είναι 6-χρωματίσιμο

Επαγωγικά από πλήθος των κόμβων.

Αν G έχει $n < 7$ κόμβους, τότε η απόδειξη του Θ. είναι προφανής.

Έστω ότι ισχύει για $n = k-1 \Rightarrow n = k$

Πόρισμα: Κάθε επίπεδο γράφ. έχει τουλάχιστον μια κορυφή $d(v) \leq 5$.

Διαγράφω v από το G. $\Rightarrow$ G′ έχει $n-1$ κόμβους $\Rightarrow$ 6-χρωματίσιμος

Άρα, με βάση τον G′ μπορεί να γίνει χρωματισμός του G δίνοντας στον κόμβο v ένα χρώμα διαφορετικό από το χρώμα των 5 γειτονικών κόμβων.

Χρωματισμός Κόμβων

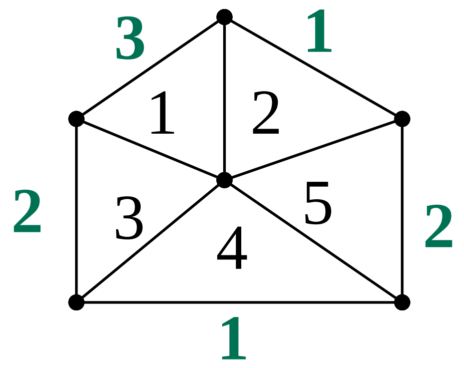
- Εικασία των 4 χρωμάτων (4 color conjecture):
  - Guthrie 1850 (παρατήρηση)
  - DeMorgan 1852
  - Hamilton 1852
  - Cayley 1878 (δεν βρήκε λύση)
  - Kempe 1880 (βρήκε λάθος λύση)
  - Heawood 1890 (βρήκε το λάθος της λύσης)
  - Franklin 1920 (για $n \leq 25$)
  - Reynolds 1926 (για $n \leq 27$)
  - Franklin 1931 (για $n \leq 31$)
  - Winn 1943 (για $n \leq 35$)
  - Ore-Stemple 1968 (για $n \leq 40$)
  - Appel-Haken-Koch 1977

Χρωματισμός Χαρτών

- <u>Θεώρημα:</u> Ένα επίπεδο απλός γράφημα G είναι k-χρωματίσιμο (ως προς τις κορυφές), αν και μόνον αν το G* είναι k-χρωματίσιμο ως προς τις περιοχές.
- <u>Θεώρημα:</u> Ένας χάρτης G είναι 2-χρωματίσιμος αν και μόνον αν είναι Eulerian.
- <u>Θεώρημα:</u> Ένας κυβικός χάρτης είναι 3-χρωματίσιμος αν και μόνον αν κάθε περιοχή περικλείεται από άρτιο αριθμό ακμών.

Χρωματισμός Ακμών

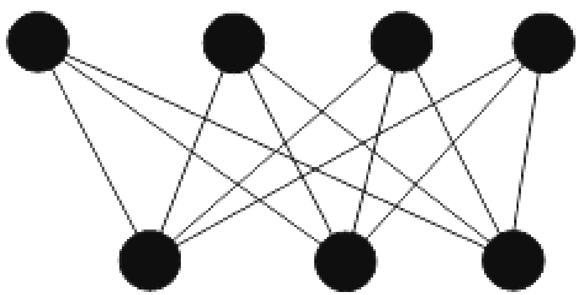
- $\chi'(C_{2n}) = 2$
- $\chi'(C_{2n+1}) = 3$
- $\chi'(W_n) = n-1$, αν $n \geq 4$



n=6
X'=5

- <u>Θεώρημα (Vizing 1964):</u> Για κάθε απλό γράφο G ισχύει $D(G) \leq \chi'(G) \leq D(G)+1$
- <u>Θεώρημα:</u> Για κάθε πλήρη διμερή γράφο ισχύει

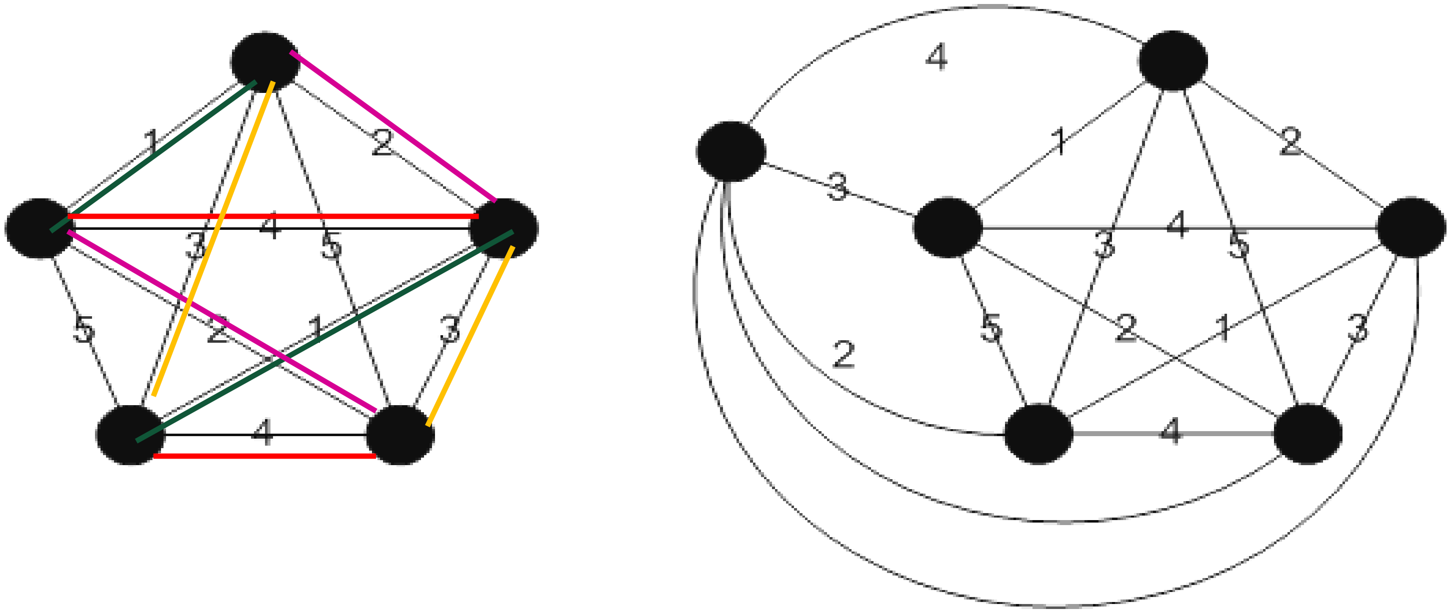
$\chi'(K_{m,n}) = D(K_{m,n}) = \max(m,n)$



Χρωματισμός Ακμών

- <u>Θεώρημα:</u> Για κάθε πλήρη γράφο ισχύει

$$\chi'(K_n) = n \text{ (n περιττό)}$$
$$= n-1 \text{ (n άρτιο)}$$



Χρωματικά Πολυώνυμα

- Ερώτηση: Κατά πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να χρωματίσουμε τις κορυφές ενός γράφου με k χρώματα;

- Απάντηση: Χρωματικό πολυώνυμο $P_G(k)$ (Birkhoff 1912)
- $P_{Nn}(k) = k^n$
- $P_T(k) = k(k-1)^n$
- $P_{Kn}(k) = k(k-1)\ldots(k-n+1)$
- $P_G(k) = 0$, αν $k < \chi(G)$
- $P_G(k) > 0$, αν $k \geq \chi(G)$
- $P_G(k) > 0$, αν G απλός επίπεδος γράφος

Ο αριθμός των τρόπων που μπορούν να χρωματιστούν οι κόμβοι ενός G με k χρώματα

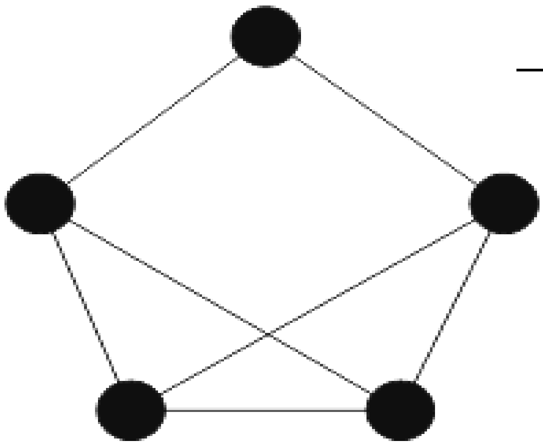
G

$P_G(k) = k(k-1)^2$

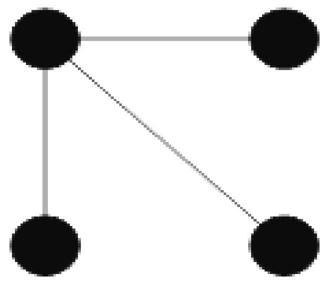
Χρωματικά Πολυώνυμα

- <u>Θεώρημα:</u> Έστω γράφος G και δύο μη γειτονικές κορυφές u, w. Τότε ισχύει $P_G(k)=P_{G1}(k)+P_{G2}(k)$, όπου $G_1=G+(u,w)$ και $G_2=G/(u,w)$.

- <u>Θεώρημα:</u> Το χρωματικό πολυώνυμο γράφου G με n κόμβους είναι πολυώνυμο ως προς k βαθμού n. Το πολυώνυμο έχει ακέραιους συντελεστές με εναλλασσόμενα πρόσημα, μεγαλύτερο όρο το k_n και σταθερό όρο ίσο με 0.



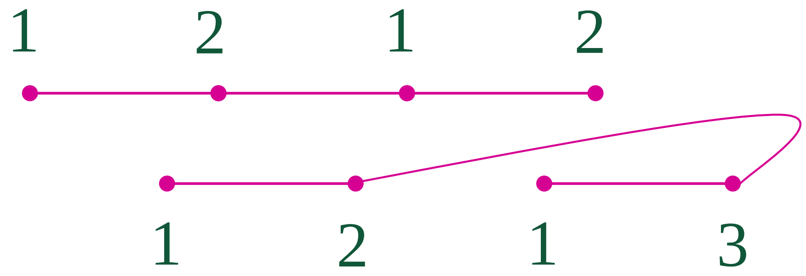
$\longrightarrow K_5+3K_4+2K_3$



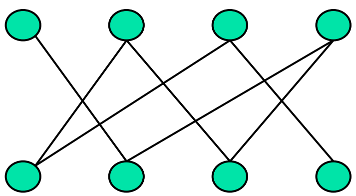
$K(k-1)^3 \longleftarrow$

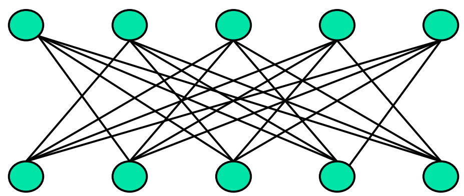
Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι Χρωματισμού

- Ο προσδιορισμός του χρωματικού αριθμού είναι NP-πλήρες πρόβλημα.



- <u>Σειριακός αλγόριθμος (άπληστος):</u>
  - Πολυπλοκότητα O(n*m)
  - Τι γίνεται σε διμερή γράφο;





Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι Χρωματισμού

- Πρώτα η Μεγαλύτερη (largest first):
  - Ταξινόμηση κορυφών ως προς φθίνοντα βαθμό.

$$d(v_i) \geq d(v_{i+1}) \quad \text{για } i=1, 2, 3, \ldots, k-1$$

  - Μετά σειριακός.

Welsh+Powell, 1967:

$$\chi(G) \leq \max_i \{\min (i, d(v_i) + 1)\}$$

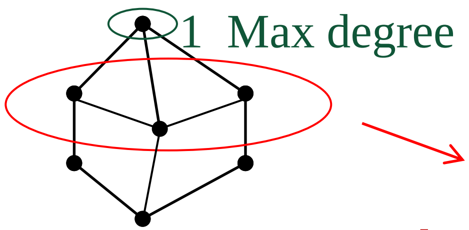
Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι Χρωματισμού

- <u>Τελευταία η Μικρότερη (smallest last):</u>
  - Matula-Marble-Issacson 1972.
  - Για i = n έως 1 με βήμα -1 επανέλαβε:
    - Βρες την κορυφή v_i με το min βαθμό.
    - Τοποθετήσετε την v_i στην i-στη θέση και διέγραψε αυτή από το γράφημα.
  - Μετά σειριακός.

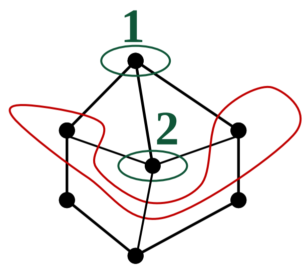
Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι Χρωματισμού

- Μέθοδος Βαθμού-Χρώματος (color-degree):
  - Brelaz 1979
  - Βαθμός (degree) χρώματος κορυφής: αριθμός χρωμάτων που χρησιμοποιήθηκαν σε γειτονικές κορυφές.

1) Κόμβος *v* με max degree $\Rightarrow$ color(*v*) = 1
2) Μετά max color-degree

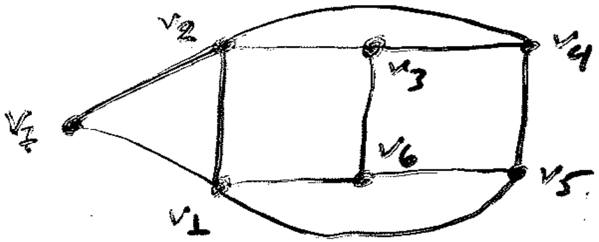


Color degree 1 $\Rightarrow$
επιλέγουμε *v* με max degree



Color degree 2 $\Rightarrow$
επιλέγουμε *v* με max degree

Εφαρμογή Αλγορίθμων Χρωματισμού



1) Σειριακή Μέθοδος : $v_1, v_2, v_4, v_3, v_5, v_6, v_7$

1 2 1 3 2 4 3

2) Πρώτα η Μεγαλύτερη : $v_1, v_2, v_3, v_6, v_5, v_4, v_7$

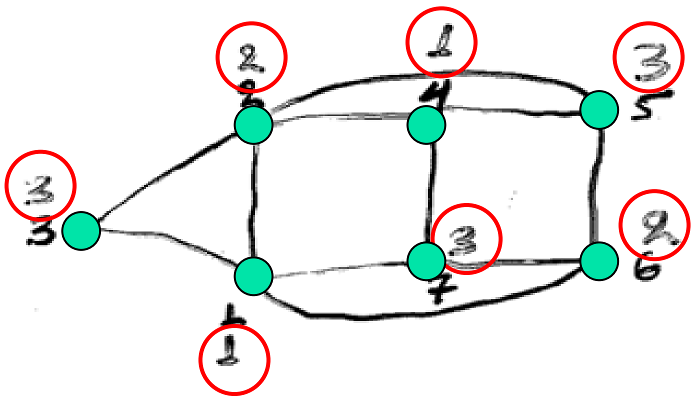
1 2 1 2 3 4 3

3) Τελευταία η Μικρότερη: $v_1, v_5, v_6, v_4, v_3, v_2, v_7$

1 2 3 1 2 3 2

Εφαρμογή Αλγορίθμων Χρωματισμού

4) Μέθοδος του Βαθμού Χρώματος



- Οι 4 αλγόριθμοι χρωματίζουν το γράφημα G με 4, 4, 3, 3 χρώματα, αντίστοιχα.
- Στο γράφημα G υπάρχει υπογράφημα K_3

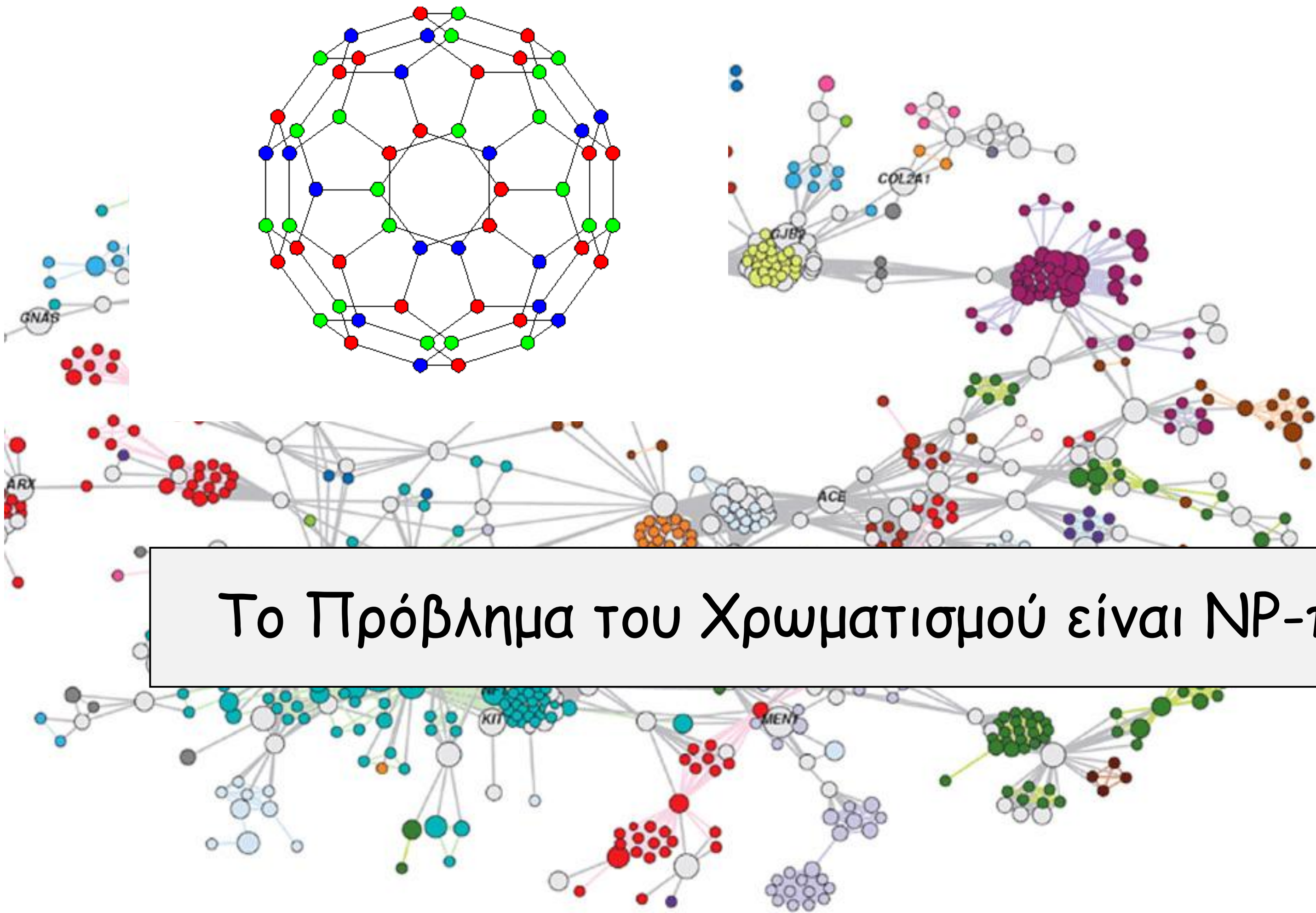
$\chi(G) = 3$

Εφαρμογή Αλγορίθμων Χρωματισμού

Ωρολόγιο Πρόγραμμα

- Ο καθηγητής X_i $(1 \le i \le m)$ διδάσκει το μάθημα Y_j $(1 \le j \le n)$ για P_{ij} ώρες/εβδομάδα.
- Κανείς καθηγητής X_i δεν διδάσκει περισσότερο από p ώρες/εβδομάδα, αλλά και κανένα μάθημα Y_j δεν διδάσκεται περισσότερο από p ώρες/εβδομάδα.
- Λύση: Διμερής γράφος $K_{m,n}$.
- Η κορυφή X_i ενώνεται με την κορυφή Y_j με P_{ij} ακμές
- $X'(K_{m,n}) = P$
- Χρωματισμός ακμών

Το Πρόβλημα του Χρωματισμού



Το Πρόβλημα του Χρωματισμού είναι NP-πλήρες

Το Πρόβλημα k-Coloring

- ***k*-Coloring**

  Δεδομένου ενός γραφήματος G = (V, E), βρες εάν υπάρχει ένας κατάλληλος χρωματισμός του G που χρησιμοποιεί $\leq k$ χρώματα.

Σημείωση

- *k*-Coloring είναι μια συνάρτηση $f : V \rightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$ τέτοια ώστε για κάθε ακμή (x, y) του G ισχύει $f(x) \neq f(y)$.

- Εάν υπάρχει μια τέτοια συνάρτηση *f* για ένα δεδομένο γράφημα G, τότε το G είναι *k*-χρωματίσιμο (*k*-colorable).

Το Πρόβλημα k-Coloring

- **Ερώτημα ?**
  - Πώς μπορούμε να ελέγξουμε εάν ένα γράφημα G είναι 2-χρωματίσιμο ?
  - Απλώς, έλεγξε εάν το G είναι διμερές (bipartite) !

Δυστυχώς, για $k \geq 3$ το πρόβλημα είναι NP-πλήρες

Το Πρόβλημα k-Coloring

Χειρισμός NP-πληρότητας

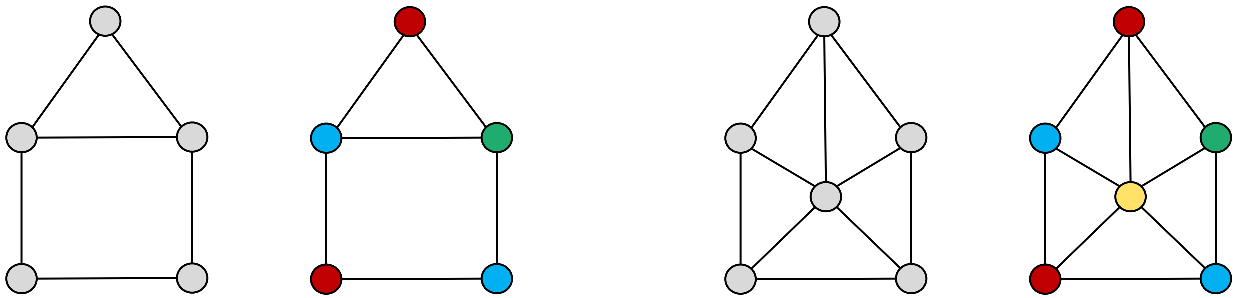
- Ένας τρόπος να χειριστούμε την NP-πληρότητα είναι να περιορίσουμε το πρόβλημα σε υποσύνολα της εισόδου.

- Θα δείξουμε ότι το *k*-Coloring πρόβλημα σε τυχαία γραφήματα είναι NP-πλήρες ακόμα και για $k = 3$!

Το Πρόβλημα 3-Coloring

- **3-Coloring**

  Δεδομένου ενός γραφήματος G = (V, E), βρες εάν υπάρχει ένας κατάλληλος χρωματισμός του G που χρησιμοποιεί ≤ 3 χρώματα.



G_1 - return NAI

G_2 - return OXI

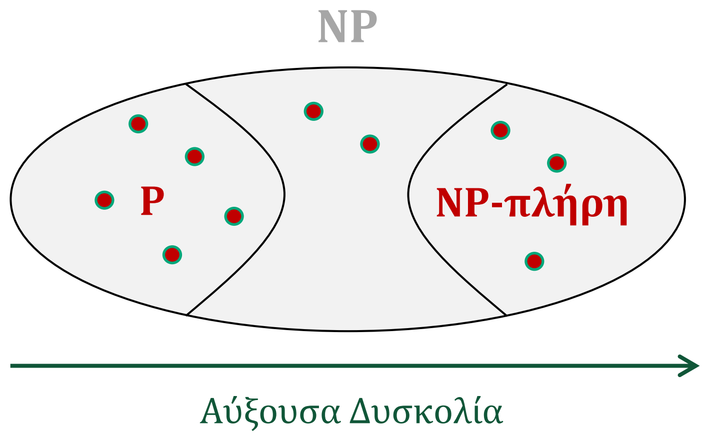
Το Πρόβλημα 3-Coloring είναι NP-πλήρες

Το Πρόβλημα 3-Coloring και το 3SAT

Επιλογή NP-πλήρους

- Πρέπει να επιλέξω ένα πρόβλημα από την «δεξαμενή» των NP-πλήρων προβλημάτων για την αναγωγή μου !!!

SAT, 3SAT, CHam, TSP, IS,
Clique, …



- Επιλέγω το **3SAT**

Το Πρόβλημα 3-Coloring είναι NP-πλήρες

Το Πρόβλημα 3-Coloring και το 3SAT

3SAT

Δεδομένου ενός λογικού τύπου (Boolean formula) σε συζευκτική μορφή με το πολύ 3 μεταβλητές σε κάθε όρο του:

$$(x \vee \overline{y} \vee z) \wedge (w \vee \overline{y}) \wedge (y \vee \overline{z}) \wedge (\overline{p} \vee x) \wedge (x \vee \overline{y} \vee z)$$

βρες μια *ικανοποιούσα ανάθεση τιμών αληθείας* ή ανάφερε ότι δεν υπάρχει καμία !!!

Το Πρόβλημα 3-Coloring είναι NP-πλήρες

Το Πρόβλημα 3-Coloring και το 3SAT

- **Θα δείξουμε:**

  - 3-Coloring $\in$ NP
  - 3-Coloring $\in$ NP-hard: 3SAT $\leq_p$ 3-Coloring

Θεώρημα:

Το Πρόβλημα 3-Coloring είναι NP-πλήρες

Το Πρόβλημα 3-Coloring είναι NP-πλήρες

- **3SAT ≤ 3-Coloring**

  - 3-Coloring $\in$ NP

  - Πιστοποιητικό: το *G* με κάθε κόμβο του χρωματισμένο με ένα χρώμα από το σύνολο {1, 2, 3}

  - Πιστοποιητής: έλεγξε εάν για κάθε ακμή (x, y) του G, οι κόμβοι x και y έχουν διαφορετικό χρώμα

  Ο έλεγχος του πιστοποιητή απαιτεί $O(n^2)$ χρόνο.

Το Πρόβλημα 3-Coloring είναι NP-πλήρες

○ 3SAT ≤ 3-Coloring

- 3-Coloring ∈ NP-hard: 3SAT ≤p 3-Coloring

- Αναγωγή: Δεδομένου ενός στιγμιότυπου *φ* του 3SAT, θα κατασκευάσουμε σε πολυωνυμικό χρόνο ένα στιγμιότυπο του 3-Coloring (δηλ. ένα γράφημα *G*)

- Ορθότητα Αναγωγής: το γράφημα *G* είναι 3-χρωματίσημο εάν-ν ο λογικός τύπος *φ* είναι ικανοποιήσιμος.

Το Πρόβλημα 3-Coloring είναι NP-πλήρες

3SAT $\leq$ 3-Coloring

- Ξεκινάμε από το πρόβλημα 3SAT !!!
- Έστω φ ένα στιγμιότυπο (Boolean formula) του 3SAT με k όρους $C_1, C_2, \ldots, C_k$ (clauses) και n μεταβλητές $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (variables).

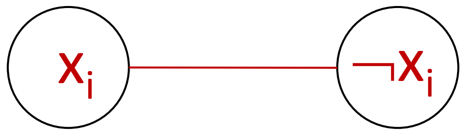
Κατασκευάζουμε σε πολυωνυμικό χρόνο ένα στιγμιότυπο G του προβλήματος 3-Coloring τέτοιο ώστε:

- εάν $\varphi \in$ 3SAT, τότε $G \in$ 3-Coloring
- εάν $G \in$ 3-Coloring, τότε $\varphi \in$ 3SAT

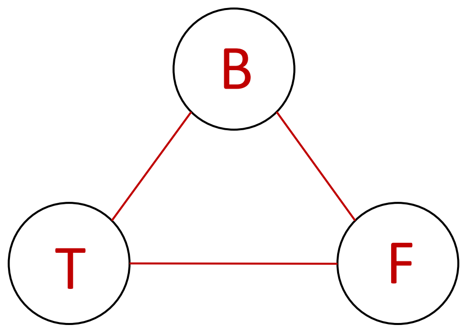
Το Πρόβλημα 3-Coloring είναι NP-πλήρες

3SAT ≤ 3-Coloring - Κατασκευή του *G*

- Για κάθε μεταβλητή x_i (x_1, x_2, …, x_n) του φ, δημιούργησε 2 κόμβους στο G, ένα για την μεταβλητή x_i και ένα για την $\neg x_i$, και ένωσέ τους με ακμή:

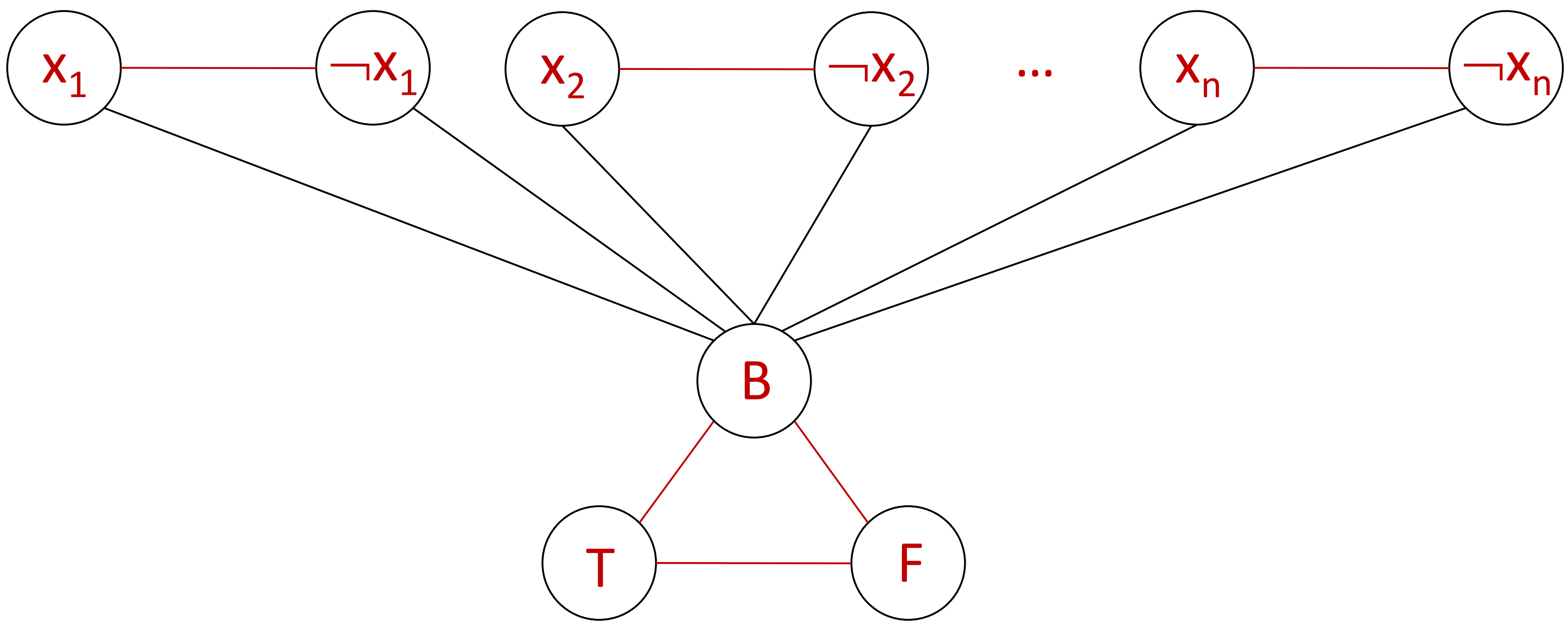


- Δημιούργησε 3 ειδικούς κόμβους T, F και B και ένωσέ τους μεταξύ του:



Το Πρόβλημα 3-Coloring είναι NP-πλήρες

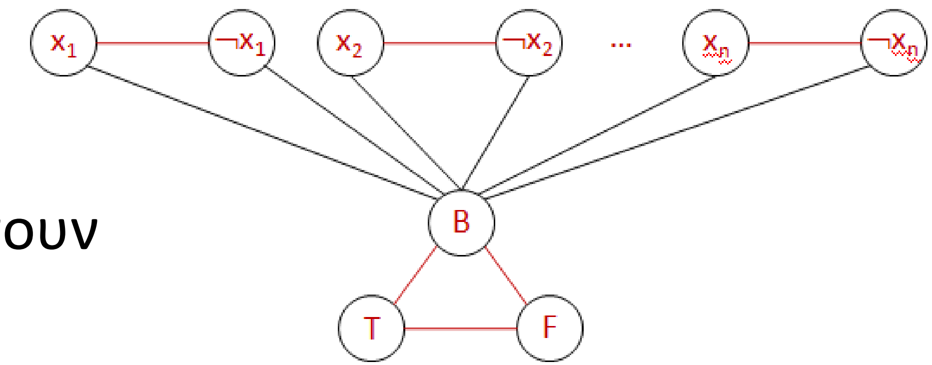
- **3SAT ≤ 3-Coloring - Κατασκευή του *G***
  - Ένωσε κάθε κόμβο-μεταβλητή με τον κόμβο B:



Το Πρόβλημα 3-Coloring είναι NP-πλήρες

3SAT ≤ 3-Coloring - Κατασκευή του *G*

- Ιδιότητες

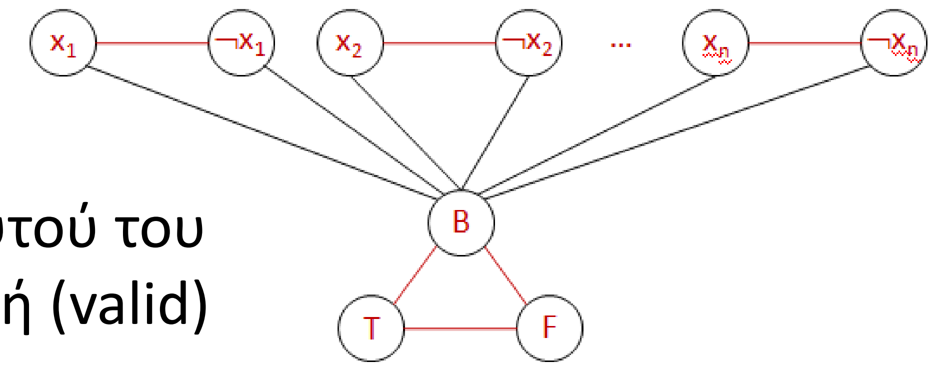


  - Κάθε κόμβος x_i και $\neg x_i$ παίρνουν διαφορετικό χρώμα
  - Κάθε κόμβος x_i και $\neg x_i$ παίρνει διαφορετικό χρώμα από τον κόμβο B
  - Οι κόμβοι B, T και F παίρνουν διαφορετικό χρώμα

Το Πρόβλημα 3-Coloring είναι NP-πλήρες

3SAT ≤ 3-Coloring - Κατασκευή του *G*

- Ιδιότητες



  - Άρα, κάθε *3-χρωματισμός* αυτού του γραφήματος ορίζει μια σωστή (valid) *ανάθεση τιμών αληθείας* του *φ*

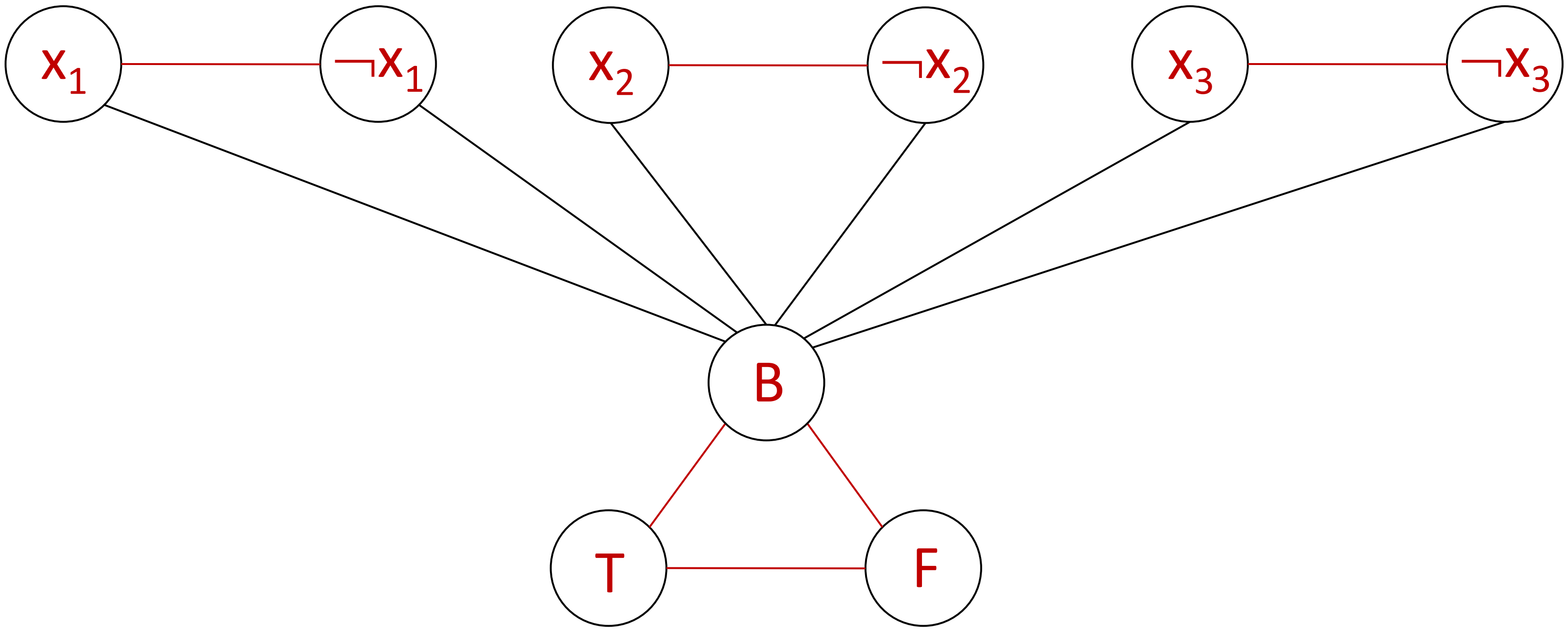
  - Πώς;

    Θέσε **x_i := True** εάν-ν ο κόμβος x_i έχει χρωματιστεί όπως ο κόμβος **T** (δηλ. x_i και T έχουν πάρει το ίδιο χρώμα)

Το Πρόβλημα 3-Coloring είναι NP-πλήρες

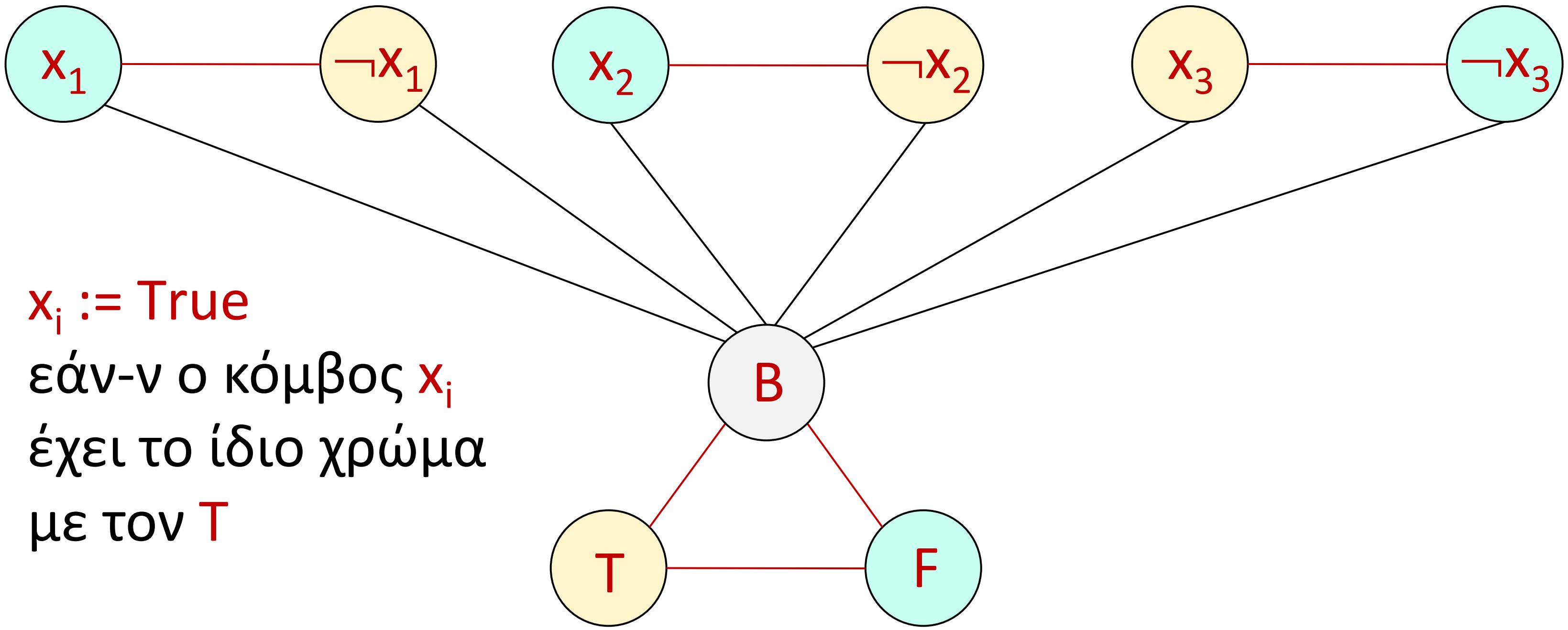
3SAT ≤ 3-Coloring - Κατασκευή του *G*

- Παράδειγμα: $\varphi = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2 \vee x_3 \vee \neg x_1)$



3SAT ≤ 3-Coloring - Κατασκευή του *G*

- Παράδειγμα: $\varphi = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2 \vee x_3 \vee \neg x_1)$



x_i := True
εάν-ν ο κόμβος x_i
έχει το ίδιο χρώμα
με τον T

Το Πρόβλημα 3-Coloring είναι NP-πλήρες

3SAT ≤ 3-Coloring - Κατασκευή του *G*

- Παράδειγμα: $\varphi = (x_1 \lor x_2 \lor \neg x_3) \land (\neg x_2 \lor x_3 \lor \neg x_1)$

$\neg x_1$ $\neg x_2$ x_3

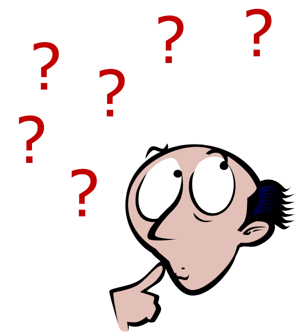
x_i := True
εάν-ν ο κόμβος x_i
έχει το ίδιο χρώμα
με τον T

T

x_1 = False
x_2 = False
x_3 = True

Το Πρόβλημα 3-Coloring είναι NP-πλήρες

3SAT ≤ 3-Coloring - Κατασκευή του *G*



- Παράδειγμα: $\varphi = (x_1 \vee x_2 \vee \neg\, x_3) \wedge (\neg\, x_2 \vee x_3 \vee \neg\, x_1)$

Αυτή *ανάθεση τιμών αληθείας* του φ είναι σωστή (valid) !!!

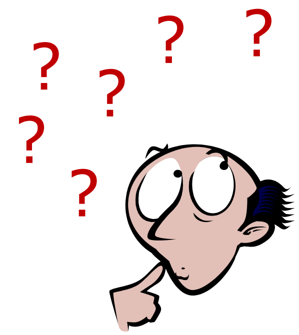
- Ερώτηση!..

είναι *ικανοποιούσα* ?

x_1 = False
x_2 = False
x_3 = True

Το Πρόβλημα 3-Coloring είναι NP-πλήρες

$3SAT \leq 3$-Coloring - Κατασκευή του *G*



- Παράδειγμα: $\varphi = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2 \vee x_3 \vee \neg x_1)$

False

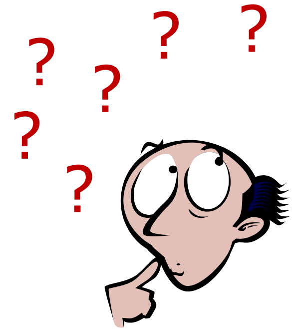
- Ερώτηση!..

είναι *ικανοποιούσα* ?

x_1 = False
x_2 = False
x_3 = True

Το Πρόβλημα 3-Coloring είναι NP-πλήρες

3SAT ≤ 3-Coloring - Κατασκευή του *G*



- Παράδειγμα: $\varphi = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2 \vee x_3 \vee \neg x_1)$

φ = False

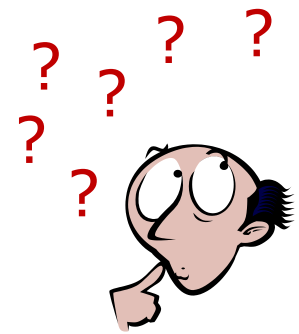
- Ερώτηση!..

είναι *ικανοποιούσα* ?

x_1 = False
x_2 = False
x_3 = True

Το Πρόβλημα 3-Coloring είναι NP-πλήρες

3SAT ≤ 3-Coloring - Κατασκευή του *G*



- Παράδειγμα: $\varphi = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2 \vee x_3 \vee \neg x_1)$

Όμως, *υπάρχει ικανοποιούσα ανάθεση τιμών αληθείας* του λογικού τύπου φ	x_1 = True x_2 = False x_3 = True

- Ερώτηση!..

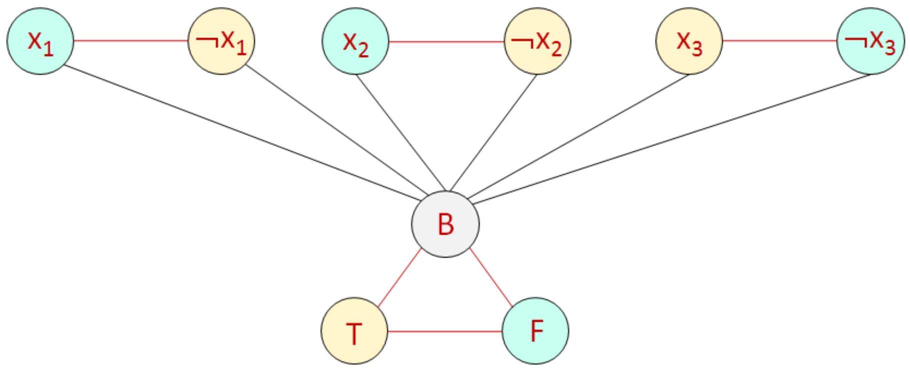
είναι *ικανοποιούσα* ?

x_1 = False
x_2 = False
x_3 = True

Το Πρόβλημα 3-Coloring είναι NP-πλήρες

3SAT ≤ 3-Coloring - Κατασκευή του G

- Θα πρέπει η ανάθεση τιμών στις μεταβλητές $x_1, x_2, \ldots, x_n$ να εξασφαλίζει την ικανοποίηση κάθε όρου $C_1, C_2, \ldots, C_k$ του φ
  - Πώς;



G΄

Για κάθε όρο $C_i = (a \vee b \vee c)$ του φ, δημιούργησε ένα "gadget" γράφημα που ενώνει τους κόμβους x_p, x_q και x_r του G' που αντιστοιχούν στις μεταβλητές a, b και c και υλοποιεί το OR !

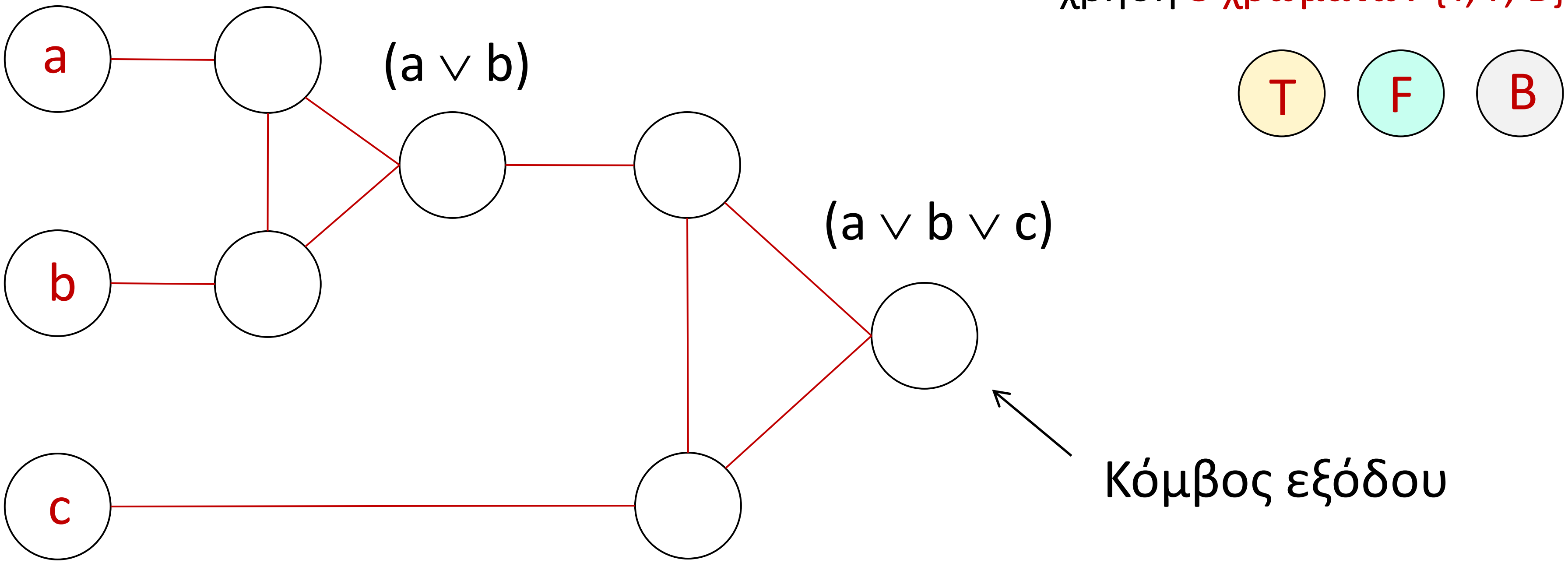
Το Πρόβλημα 3-Coloring είναι NP-πλήρες

3SAT ≤ 3-Coloring - Κατασκευή του *G*

$C_i = (a \vee b \vee c)$

Εκφράζουμε το OR των μεταβλητών του με τη χρήση 3 χρωμάτων {T, F, B}

- Το "gadget" γράφημα ή OR-γράφημα



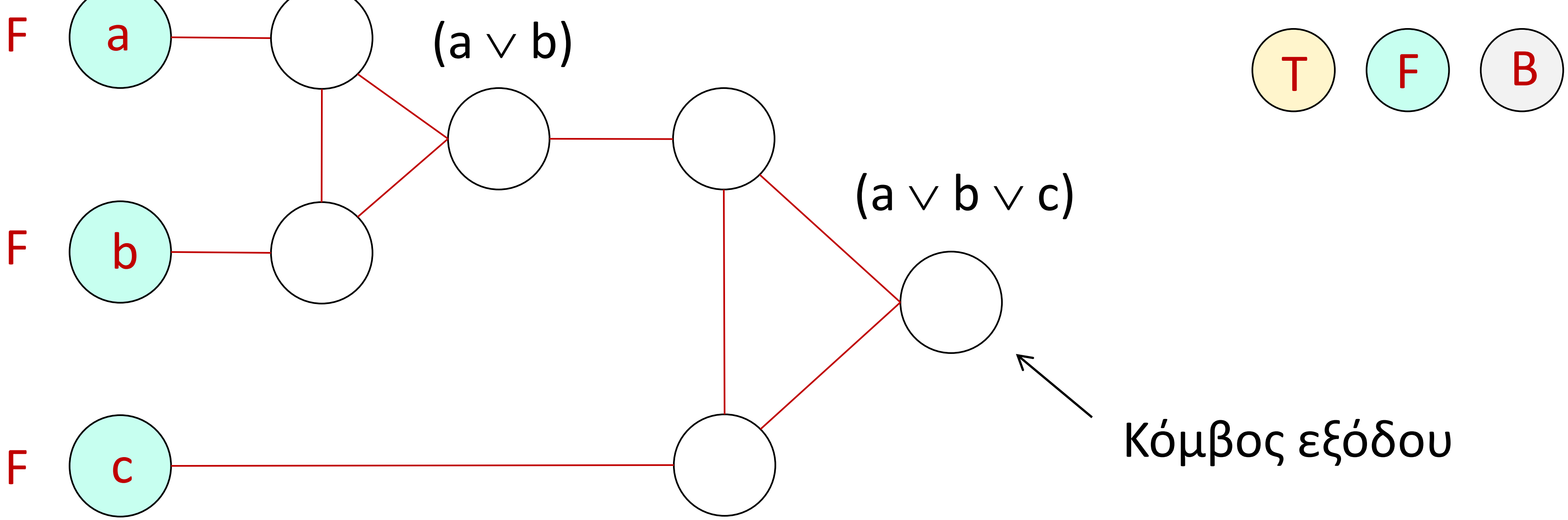
Το Πρόβλημα 3-Coloring είναι NP-πλήρες

- **3SAT ≤ 3-Coloring - Κατασκευή του *G***

$C_i = (a \vee b \vee c)$

Εκφράζουμε το OR των μεταβλητών του με τη χρήση 3 χρωμάτων {T, F, B}

  - Το “gadget” γράφημα ή OR-γράφημα



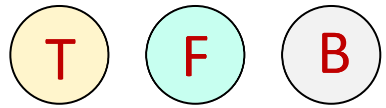
Το Πρόβλημα 3-Coloring είναι NP-πλήρες

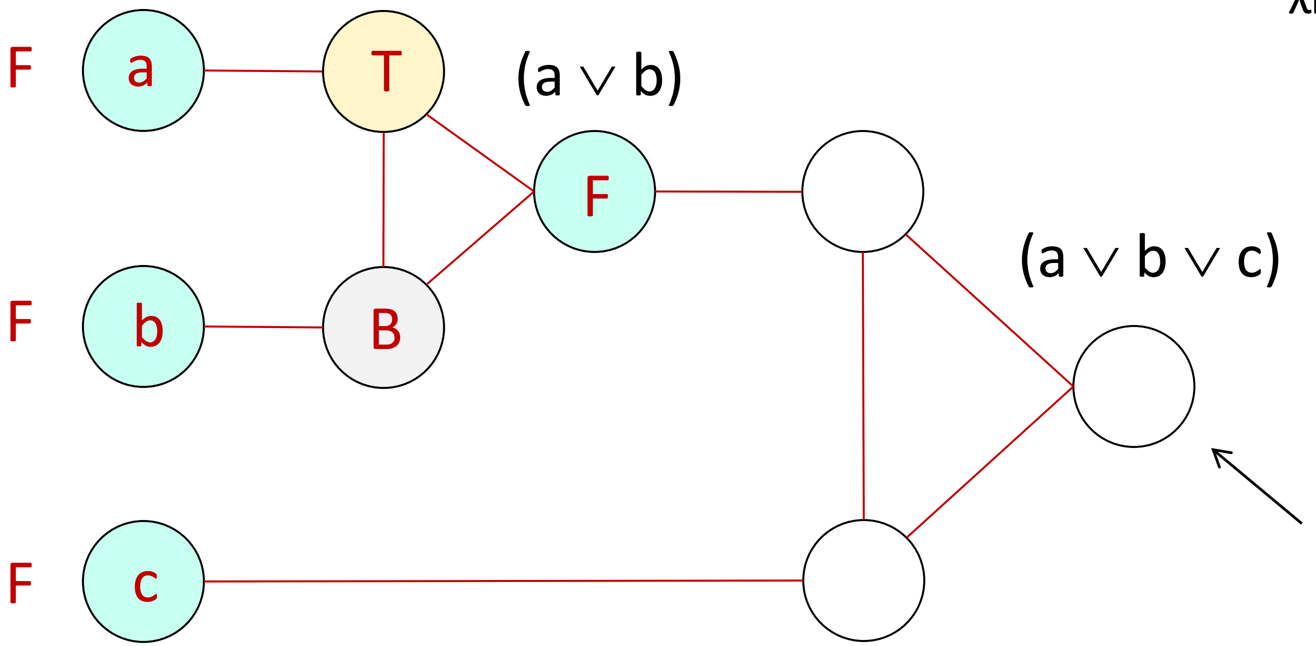
3SAT ≤ 3-Coloring - Κατασκευή του *G*

$C_i = (a \lor b \lor c)$

- Το “gadget” γράφημα ή OR-γράφημα

Εκφράζουμε το OR των μεταβλητών του με τη χρήση 3 χρωμάτων {T, F, B}



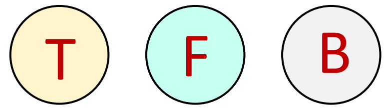


Το Πρόβλημα 3-Coloring είναι NP-πλήρες

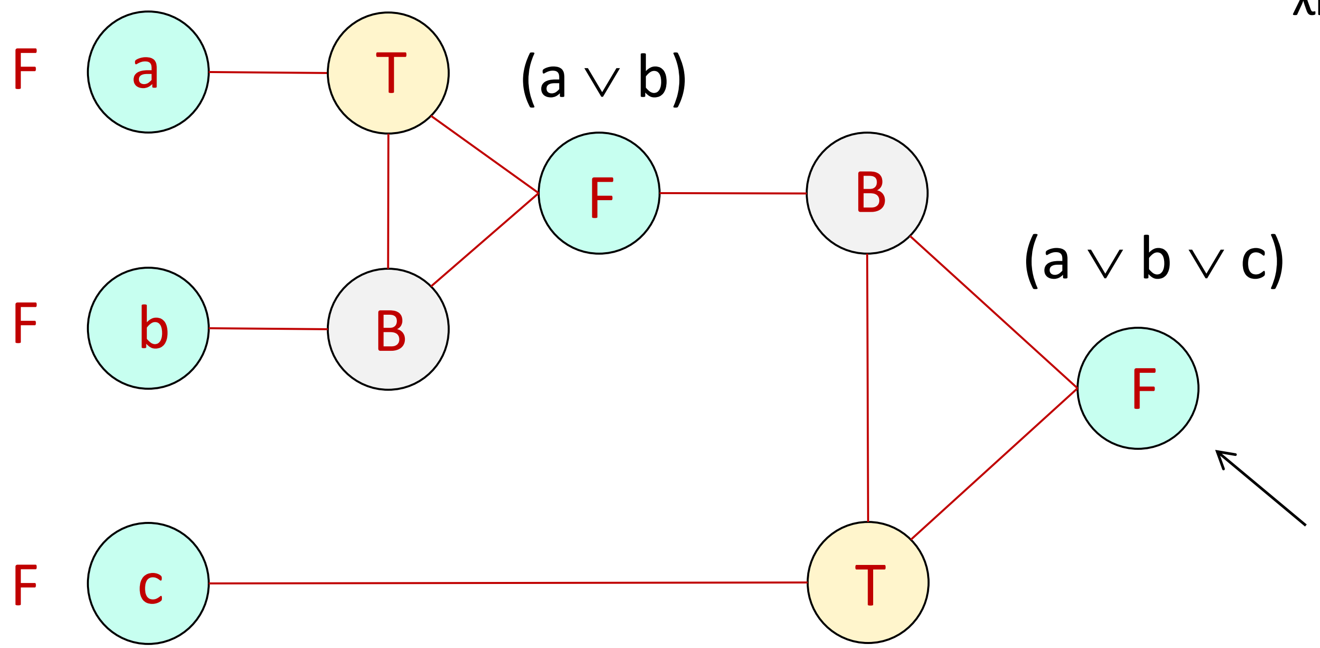
- **3SAT ≤ 3-Coloring - Κατασκευή του *G***

  $C_i = (a \vee b \vee c)$

  Εκφράζουμε το OR των μεταβλητών του με τη χρήση 3 χρωμάτων {T, F, B}

  - Το “gadget” γράφημα ή OR-γράφημα



Κόμβος εξόδου

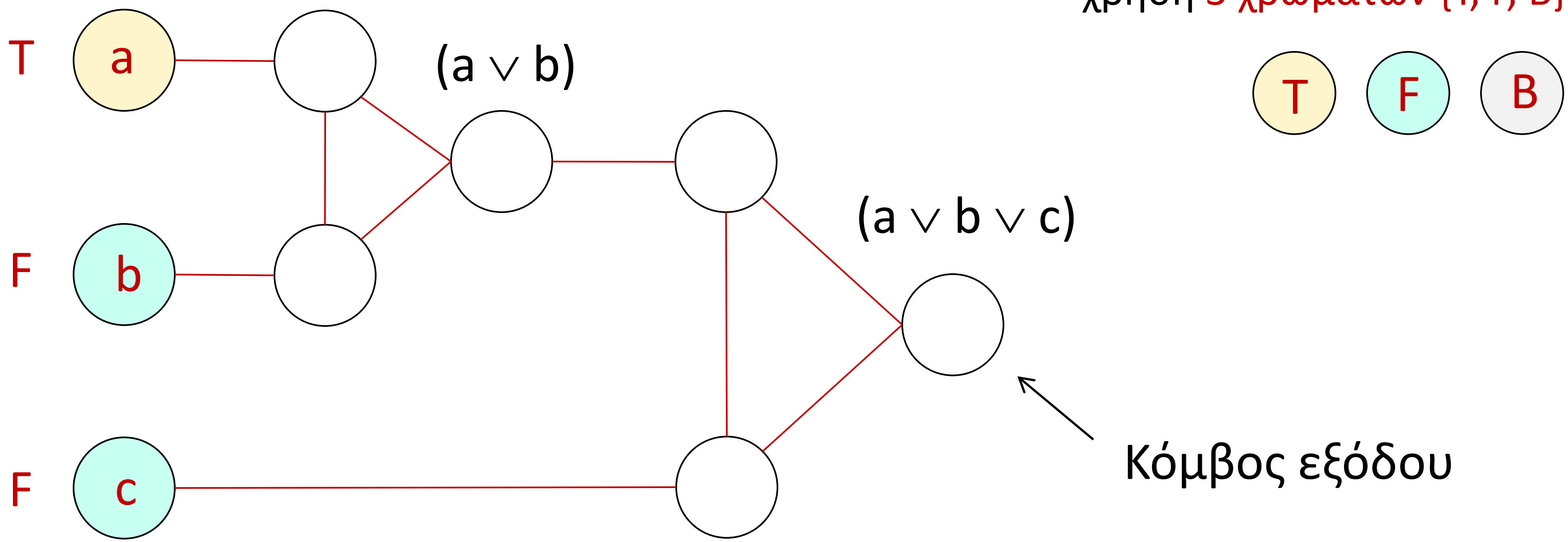
Το Πρόβλημα 3-Coloring είναι NP-πλήρες

- **3SAT ≤ 3-Coloring - Κατασκευή του *G***

$C_i = (a \vee b \vee c)$

Εκφράζουμε το OR των μεταβλητών του με τη χρήση 3 χρωμάτων {T, F, B}

  - Το "gadget" γράφημα ή OR-γράφημα



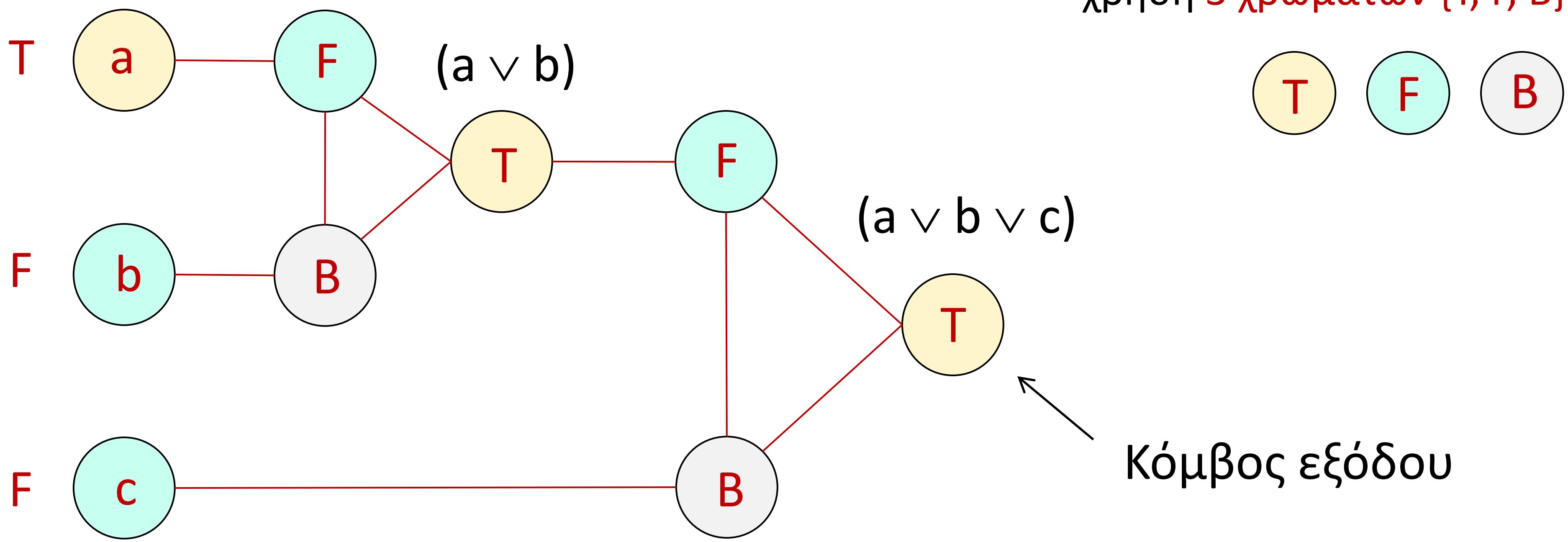
Το Πρόβλημα 3-Coloring είναι NP-πλήρες

3SAT ≤ 3-Coloring - Κατασκευή του *G*

$C_i = (a \lor b \lor c)$

- Το “gadget” γράφημα ή OR-γράφημα

Εκφράζουμε το OR των μεταβλητών του με τη χρήση 3 χρωμάτων {T, F, B}



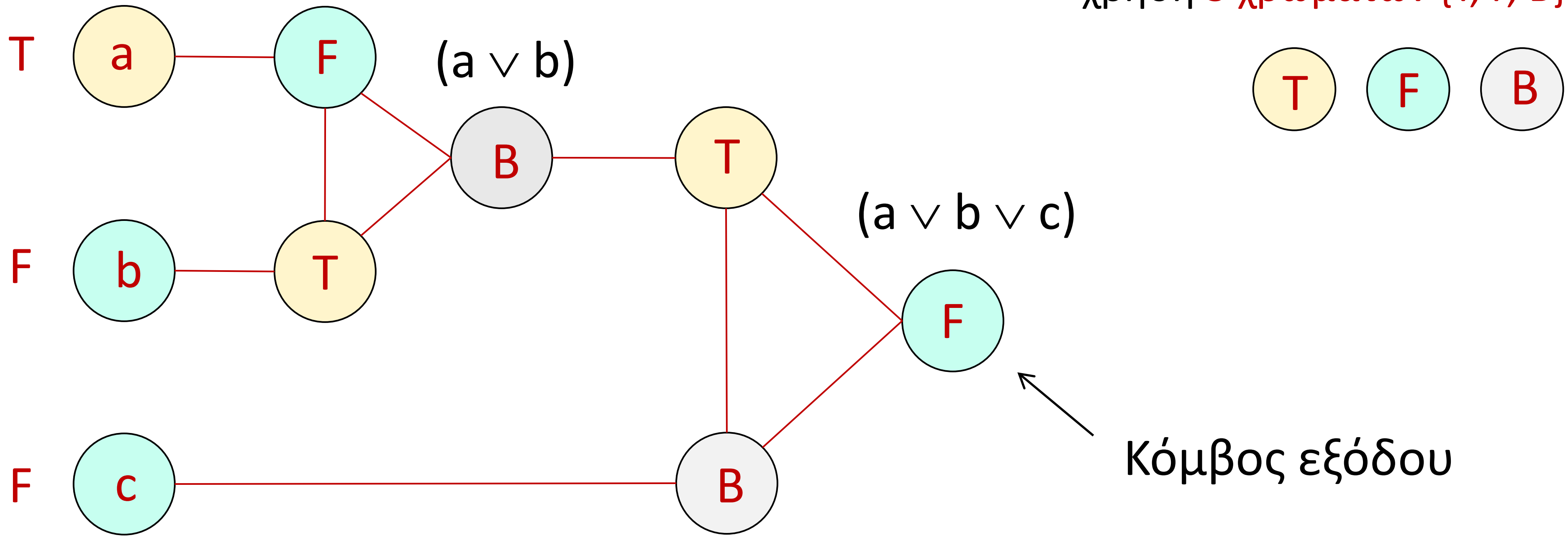
Το Πρόβλημα 3-Coloring είναι NP-πλήρες

3SAT ≤ 3-Coloring - Κατασκευή του *G*

$C_i = (a \vee b \vee c)$

- Το “gadget” γράφημα ή OR-γράφημα

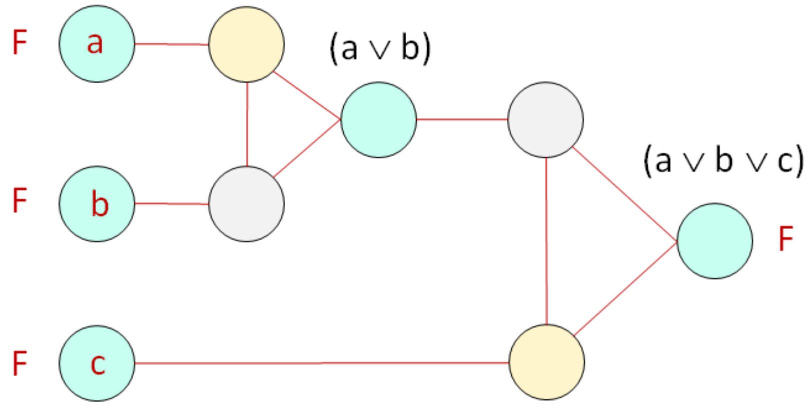
Εκφράζουμε το OR των μεταβλητών του με τη χρήση 3 χρωμάτων {T, F, B}



Το Πρόβλημα 3-Coloring είναι NP-πλήρες

3SAT ≤ 3-Coloring - Κατασκευή του *G*

- Το "gadget" γράφημα ή OR-γράφημα
- **Ιδιότητες**

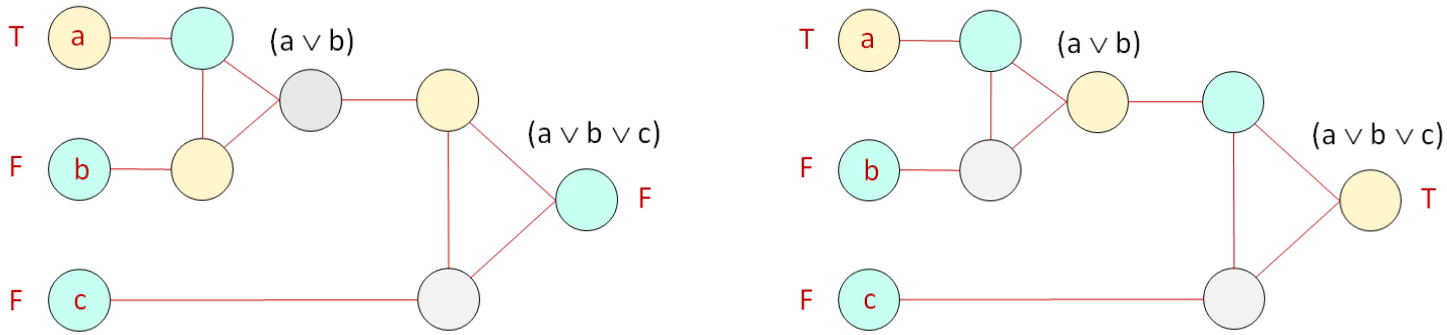


1) Εάν όλες οι μεταβλητές a, b, c πάρουν το χρώμα F, τότε η έξοδος του OR-γραφήματος χρωματίζεται με F.

Το Πρόβλημα 3-Coloring είναι NP-πλήρες

3SAT ≤ 3-Coloring - Κατασκευή του *G*

- Το "gadget" γράφημα ή OR-γράφημα
- **Ιδιότητες**

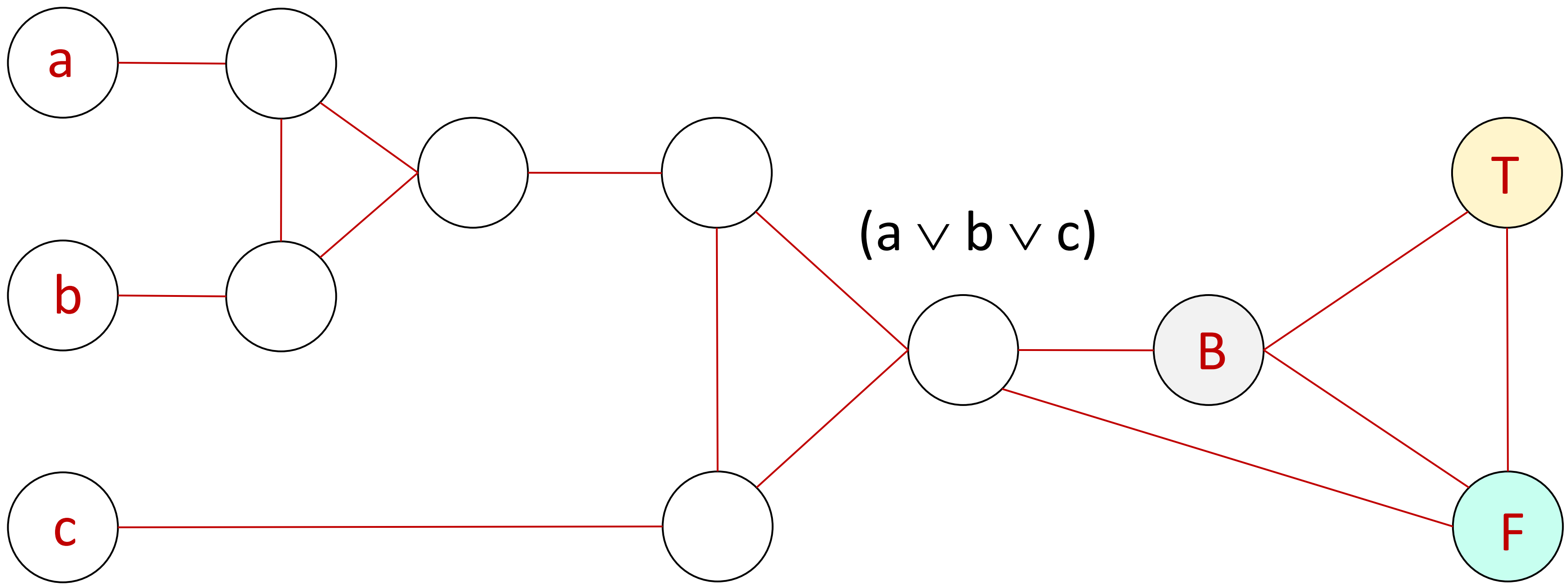


2) Εάν μία τουλάχιστον από τις a, b, c πάρει το χρώμα T, τότε ΥΠΑΡΧΕΙ ένας σωστός 3-χρωματισμός του OR-γραφήματος με τον κόμβο εξόδου να έχει χρώμα T.

Το Πρόβλημα 3-Coloring είναι NP-πλήρες

3SAT ≤ 3-Coloring - Κατασκευή του *G*

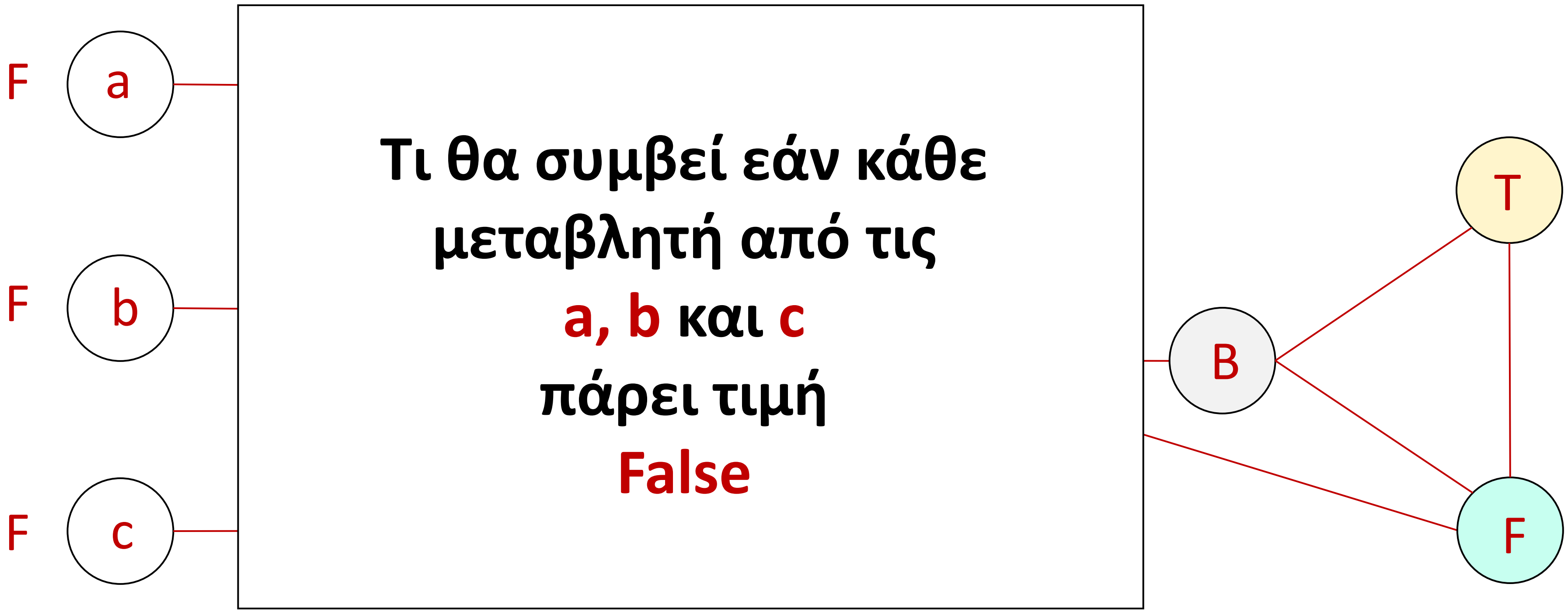
- Το "gadget" γράφημα ή OR-γράφημα



Το Πρόβλημα 3-Coloring είναι NP-πλήρες

3SAT ≤ 3-Coloring - Κατασκευή του *G*

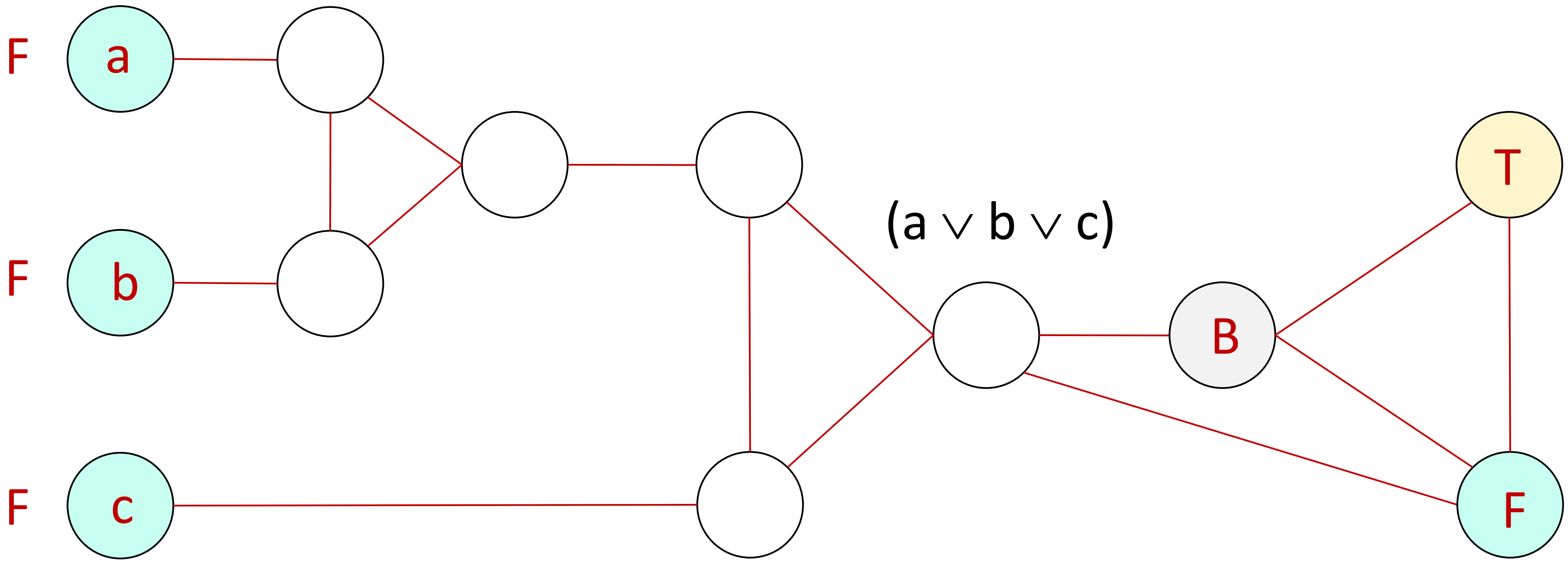
- Το “gadget” γράφημα ή OR-γράφημα



Το Πρόβλημα 3-Coloring είναι NP-πλήρες

3SAT ≤ 3-Coloring - Κατασκευή του *G*

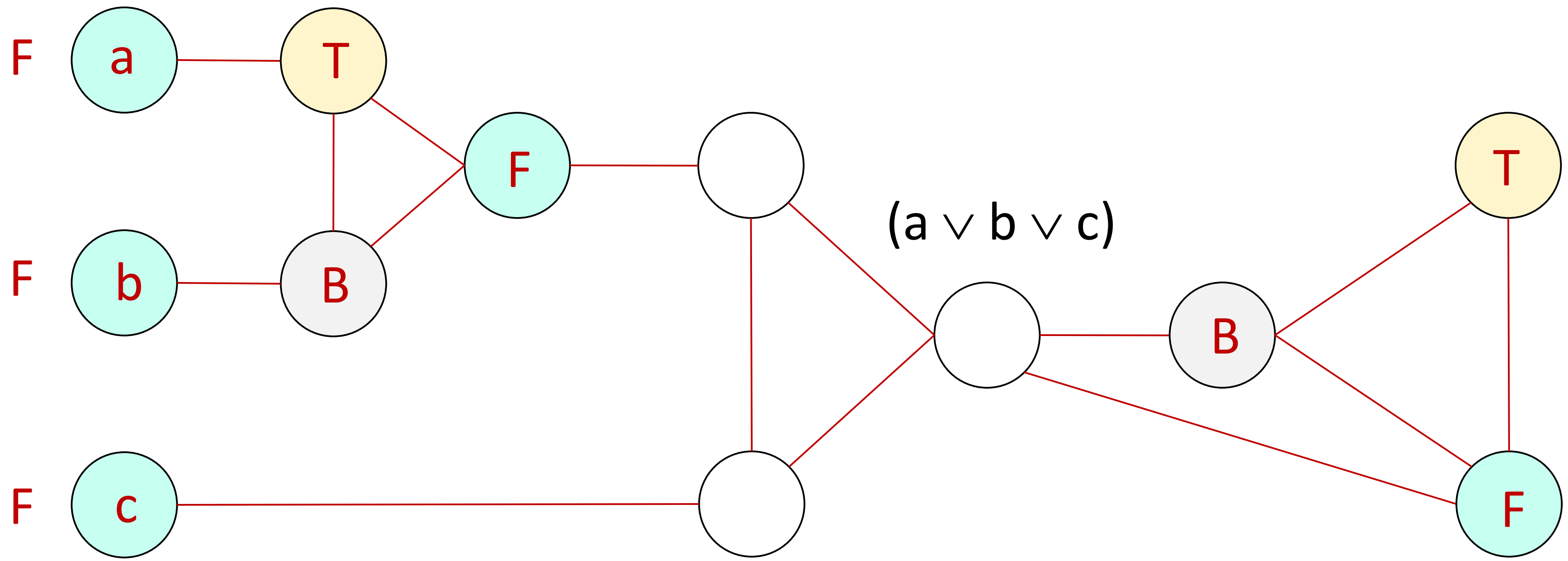
- Το “gadget” γράφημα ή OR-γράφημα



Το Πρόβλημα 3-Coloring είναι NP-πλήρες

3SAT ≤ 3-Coloring - Κατασκευή του *G*

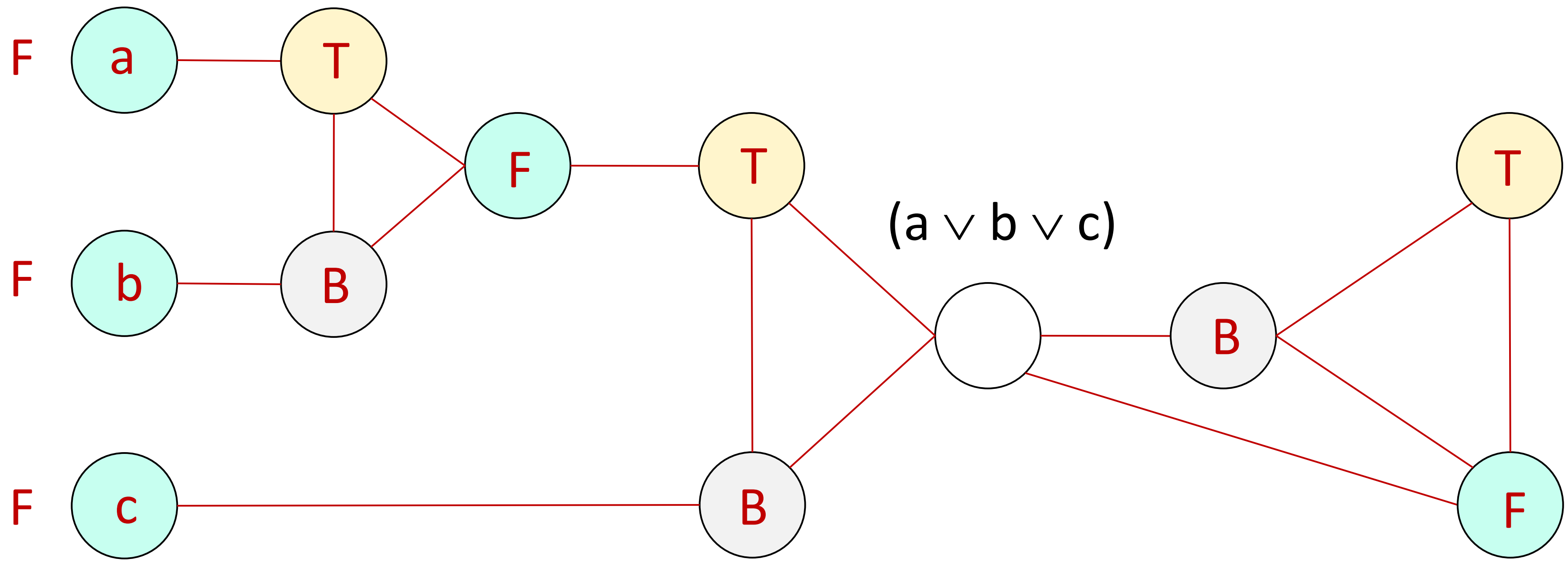
- Το "gadget" γράφημα ή OR-γράφημα



Το Πρόβλημα 3-Coloring είναι NP-πλήρες

3SAT ≤ 3-Coloring - Κατασκευή του *G*

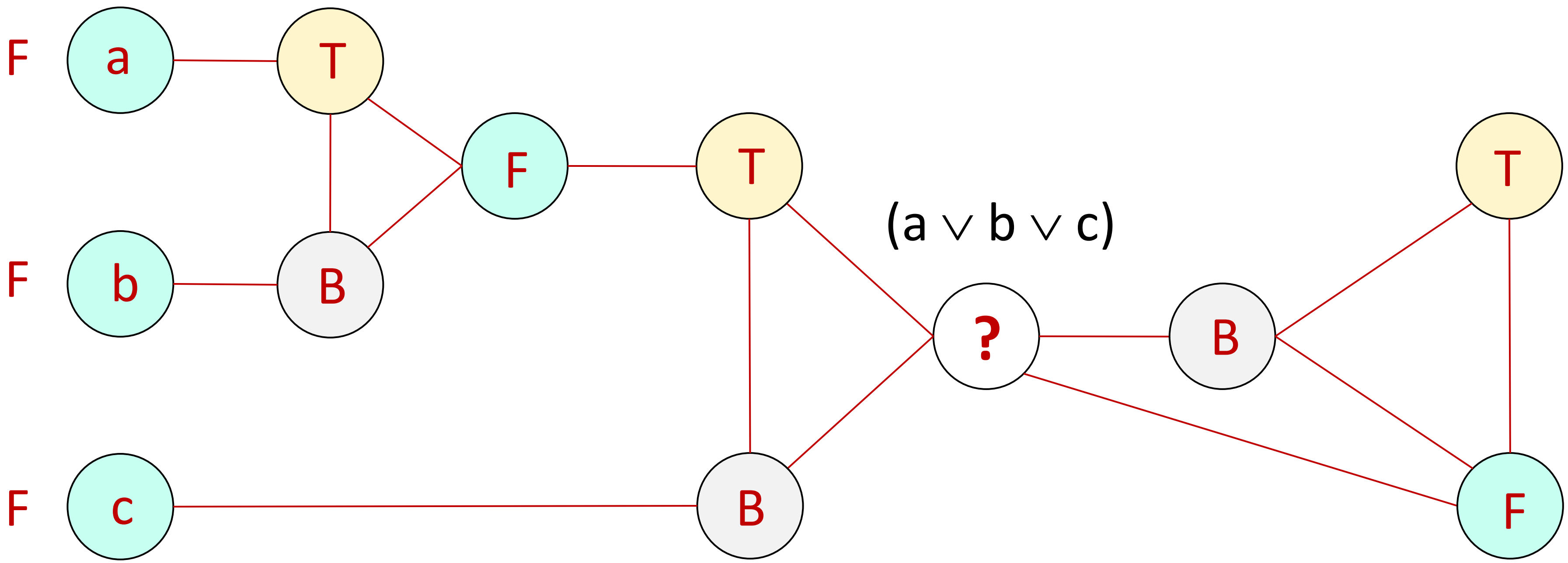
- Το "gadget" γράφημα ή OR-γράφημα



Το Πρόβλημα 3-Coloring είναι NP-πλήρες

3SAT ≤ 3-Coloring - Κατασκευή του *G*

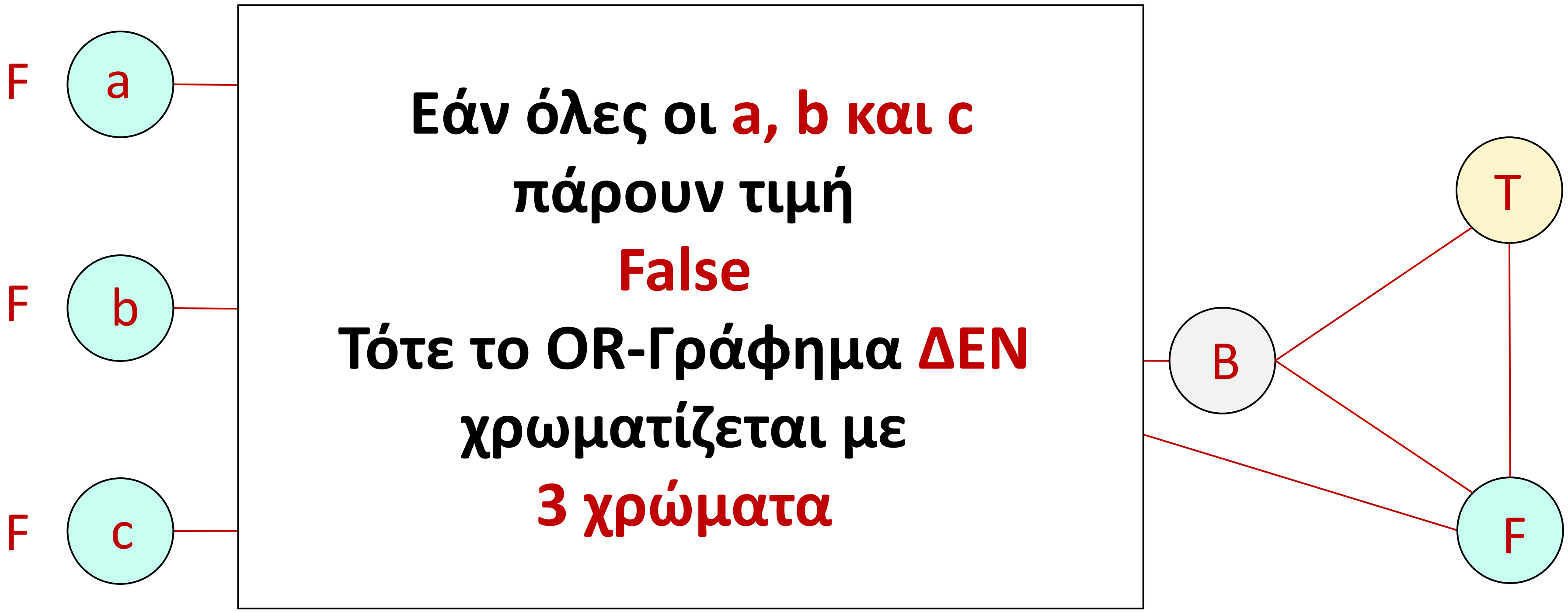
- Το “gadget” γράφημα ή OR-γράφημα



Το Πρόβλημα 3-Coloring είναι NP-πλήρες

3SAT ≤ 3-Coloring - Κατασκευή του *G*

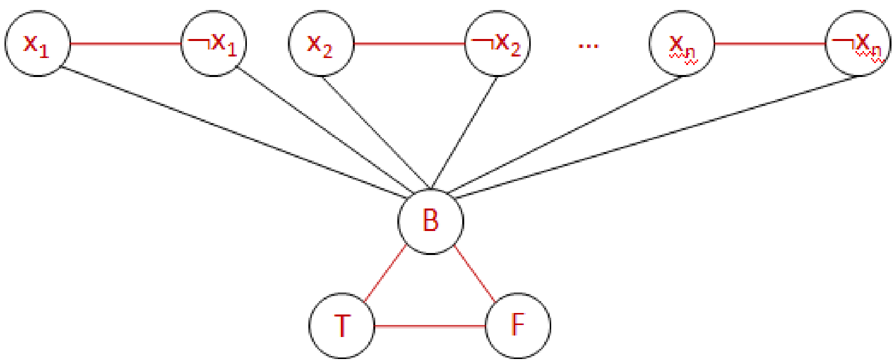
- Το “gadget” γράφημα ή OR-γράφημα



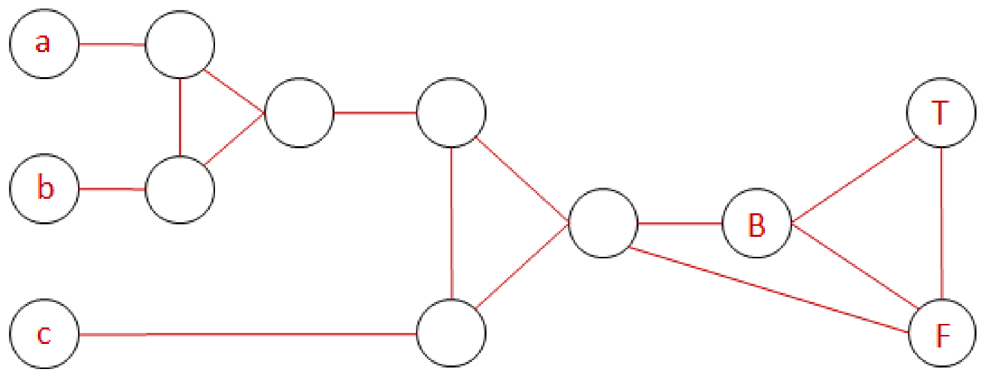
Το Πρόβλημα 3-Coloring είναι NP-πλήρες

3SAT ≤ 3-Coloring - Κατασκευή του *G*

- Για κάθε όρο $C_i = (x_p \vee x_q \vee x_r) = (a \vee b \vee c)$ του *φ*, ένωσε με ακμές τους κόμβους x_p, x_q, x_r του γραφήματος *G'* με τους κόμβους a, b, c, αντίστοιχα, του OR-γραφήματος



G'

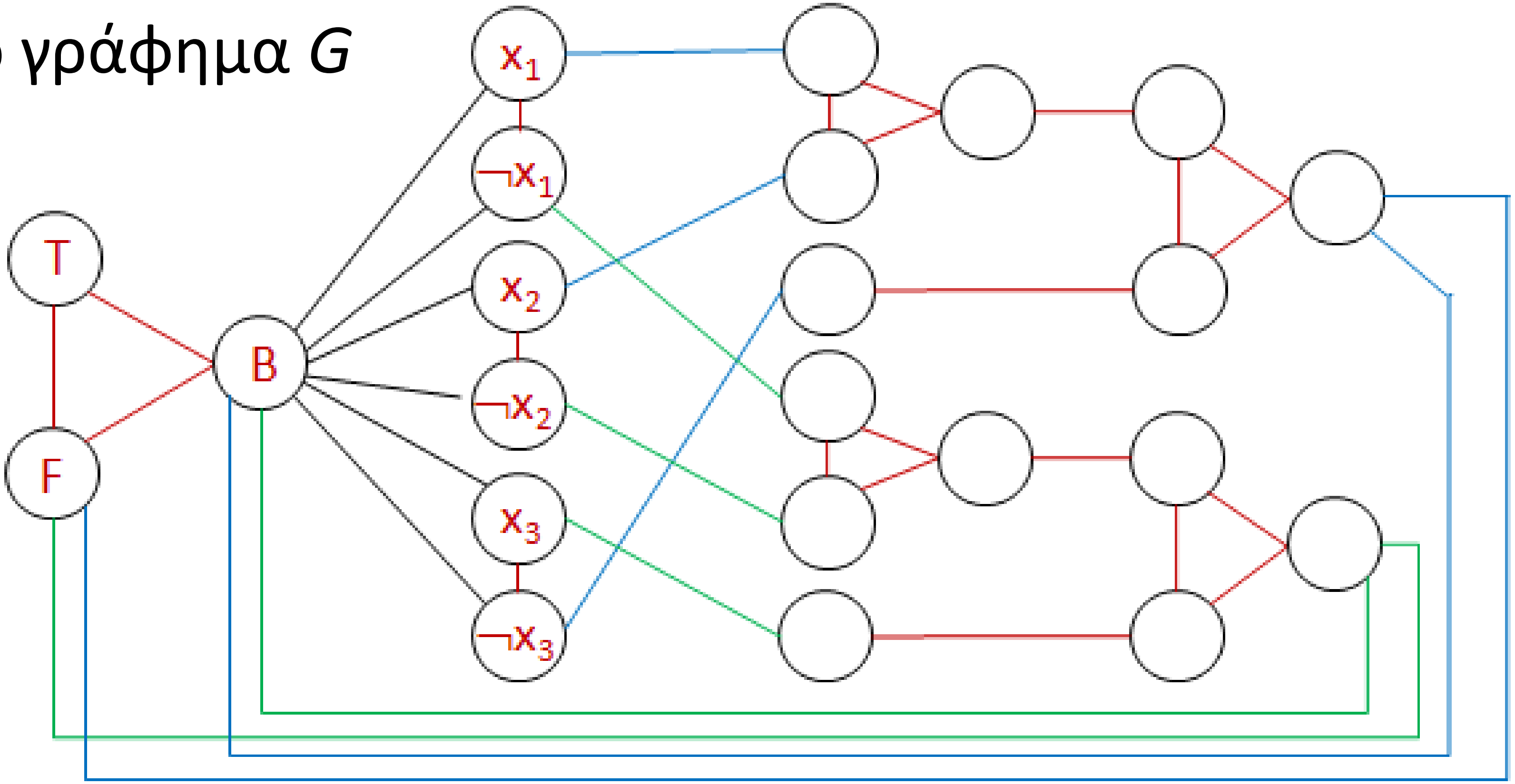


OR-γράφημα

Το Πρόβλημα 3-Coloring είναι NP-πλήρες

- **Παράδειγμα:** $\varphi = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2 \vee x_3 \vee \neg x_1)$

Το γράφημα *G*



Το Πρόβλημα 3-Coloring είναι NP-πλήρες

3SAT ≤ 3-Coloring - Ορθότητα Αναγωγής

(i) φ ικανοποιήσιμος $\Rightarrow$ G είναι 3-χρωματίσιμο

- Εάν x_i = True, τότε χρωμάτισε τον κόμβο x_i του G με χρώμα T και τον κόμβο $\neg x_i$ με χρώμα F. Εάν x_i = False, τότε κάνε το αντίθετο.
- Σε κάθε όρο $C_i = (a \vee b \vee c)$ του φ, τουλάχιστο μία μεταβλητή από τις a, b και c έχει τιμή True.
- Επομένως το OR-γράφημα που αντιστοιχεί στον C_i μπορεί να χρωματιστεί με 3 χρώματα.
- Άρα, το γράφημα G χρωματίζεται με 3 χρώματα.

Το Πρόβλημα 3-Coloring είναι NP-πλήρες

3SAT ≤ 3-Coloring - Ορθότητα Αναγωγής

(ii) G είναι 3-χρωματίσιμο $\Rightarrow$ φ ικανοποιήσιμος

- Εάν ο κόμβος x_i έχει το ίδιο χρώμα με τον κόμβο T, τότε x_i := True, άλλως x_i := False (αυτή είναι μια σωστή ανάθεση τιμών).

- Έστω $C_i = (a \vee b \vee c)$ ένας όρος του φ. Τουλάχιστο μία μεταβλητή από τις a, b και c έχει τιμή True, γιατί εάν όλες είχαν τιμή False τότε το G δεν θα μπορούσε να χρωματιστεί με 3 χρώματα (όπως δείξαμε πριν).

- Άρα, φ ικανοποιήσιμος.

Το Πρόβλημα 3-Coloring είναι NP-πλήρες

- **Παράδειγμα:** $\varphi = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2 \vee x_3 \vee \neg x_1)$

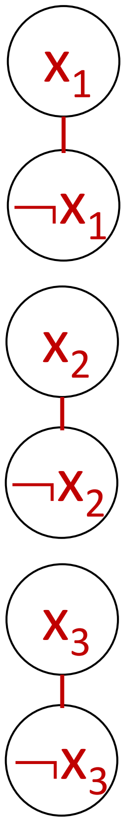
Δείχνουμε πως μπορούμε χρησιμοποιώντας το πρόβλημα 3-Coloring να λύσουμε το πρόβλημα 3SAT

Δείξαμε ότι **3SAT ≤ 3-Coloring**

- Εάν είχαμε ένα πολυωνυμικό αλγόριθμο για το πρόβλημα 3-Coloring θα μπορούσαμε να λύσουμε το πρόβλημα 3SAT σε πολυωνυμικό χρόνο.

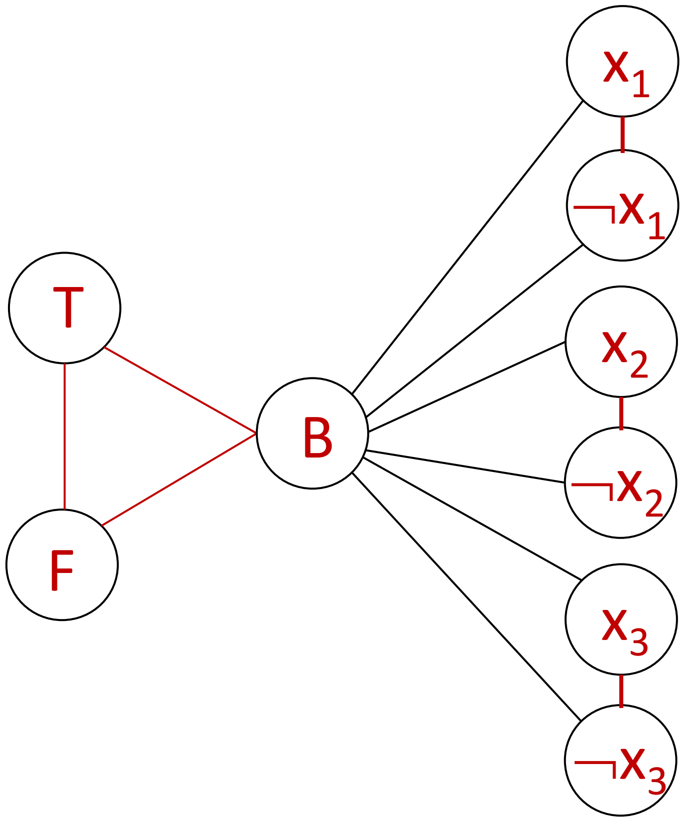
Το Πρόβλημα 3-Coloring είναι NP-πλήρες

- **Παράδειγμα:** $\varphi = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2 \vee x_3 \vee \neg x_1)$



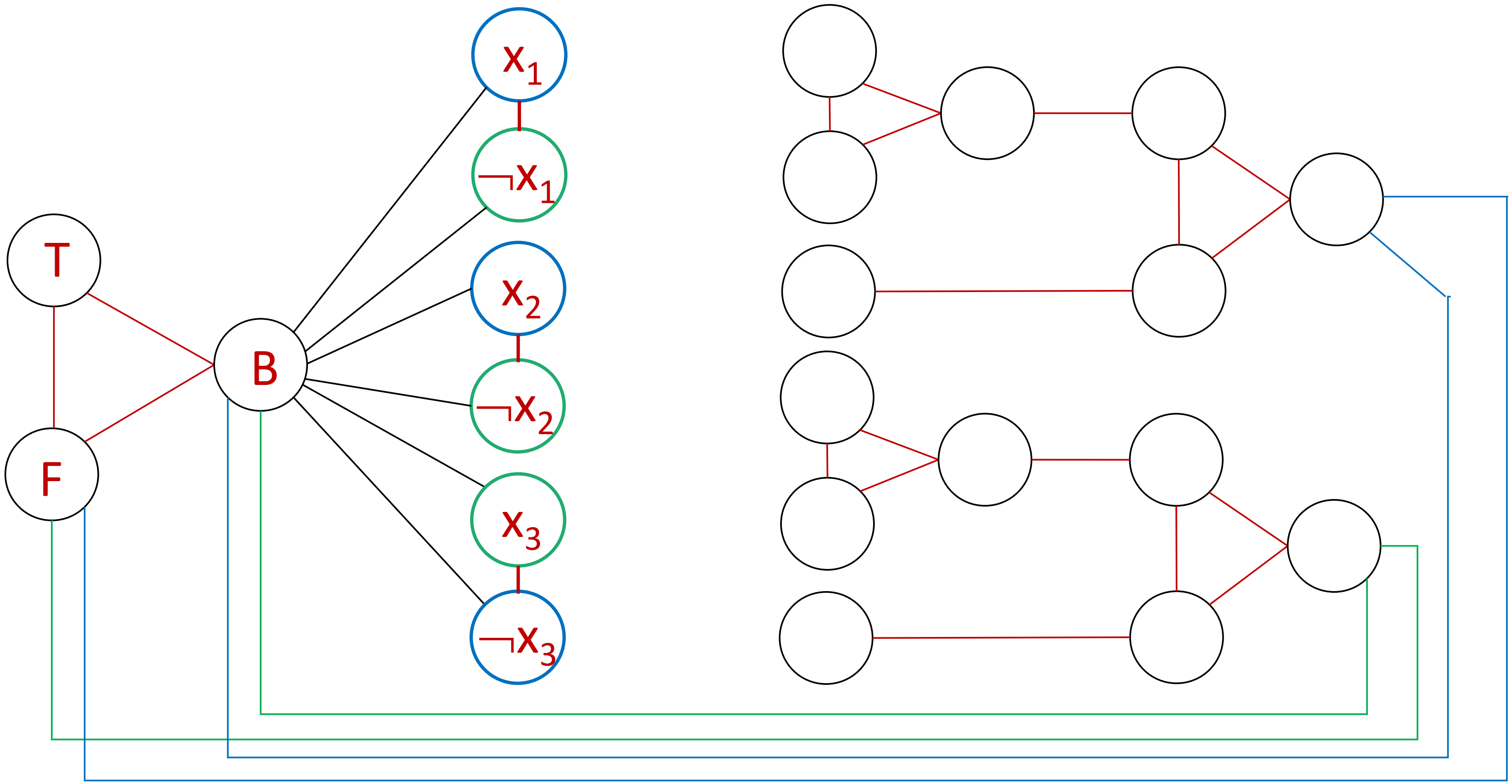
Το Πρόβλημα 3-Coloring είναι NP-πλήρες

- **Παράδειγμα:** $\varphi = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2 \vee x_3 \vee \neg x_1)$



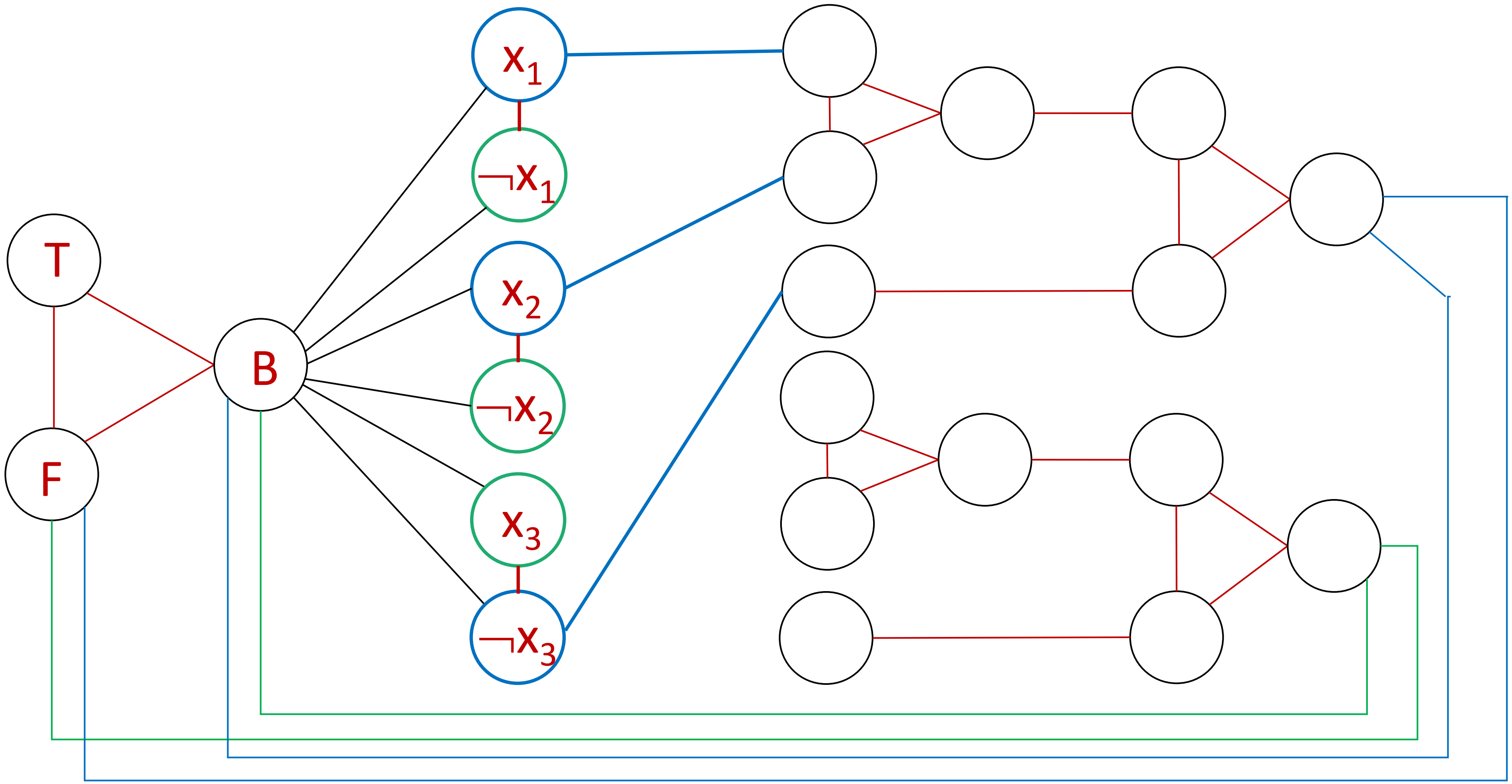
Το Πρόβλημα 3-Coloring είναι NP-πλήρες

- **Παράδειγμα:** $\varphi = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2 \vee x_3 \vee \neg x_1)$



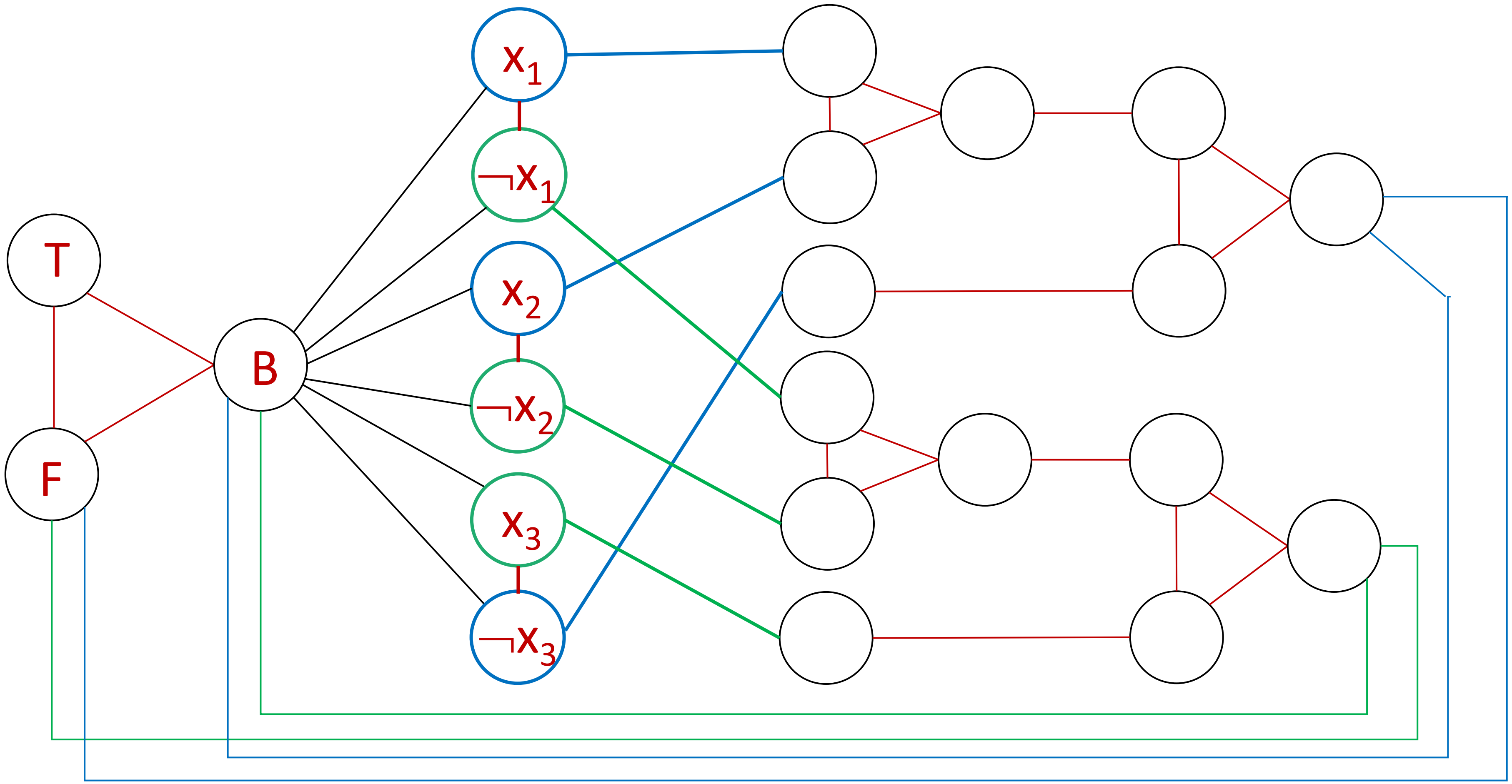
Το Πρόβλημα 3-Coloring είναι NP-πλήρες

- **Παράδειγμα:** $\varphi = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2 \vee x_3 \vee \neg x_1)$



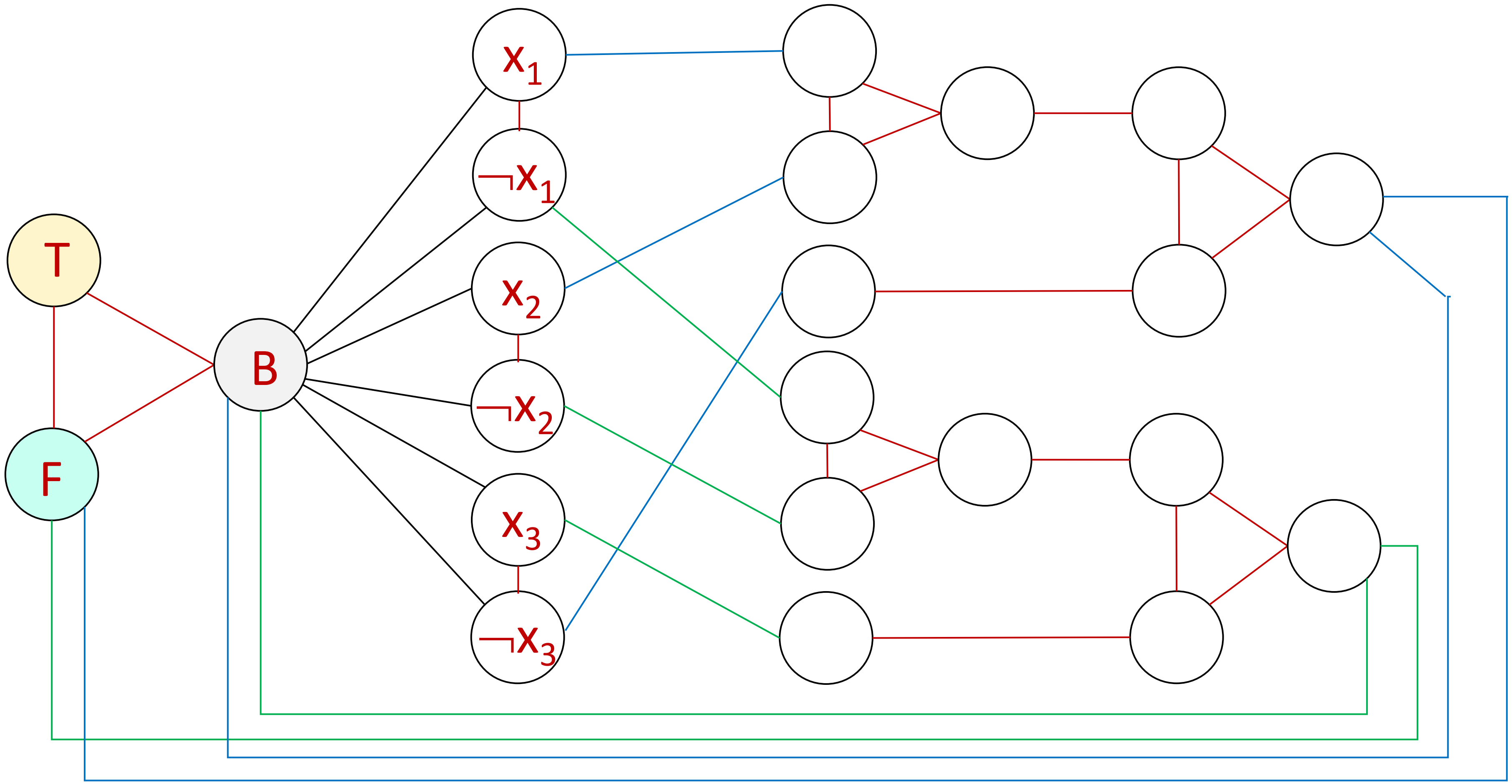
Το Πρόβλημα 3-Coloring είναι NP-πλήρες

- **Παράδειγμα:** $\varphi = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2 \vee x_3 \vee \neg x_1)$



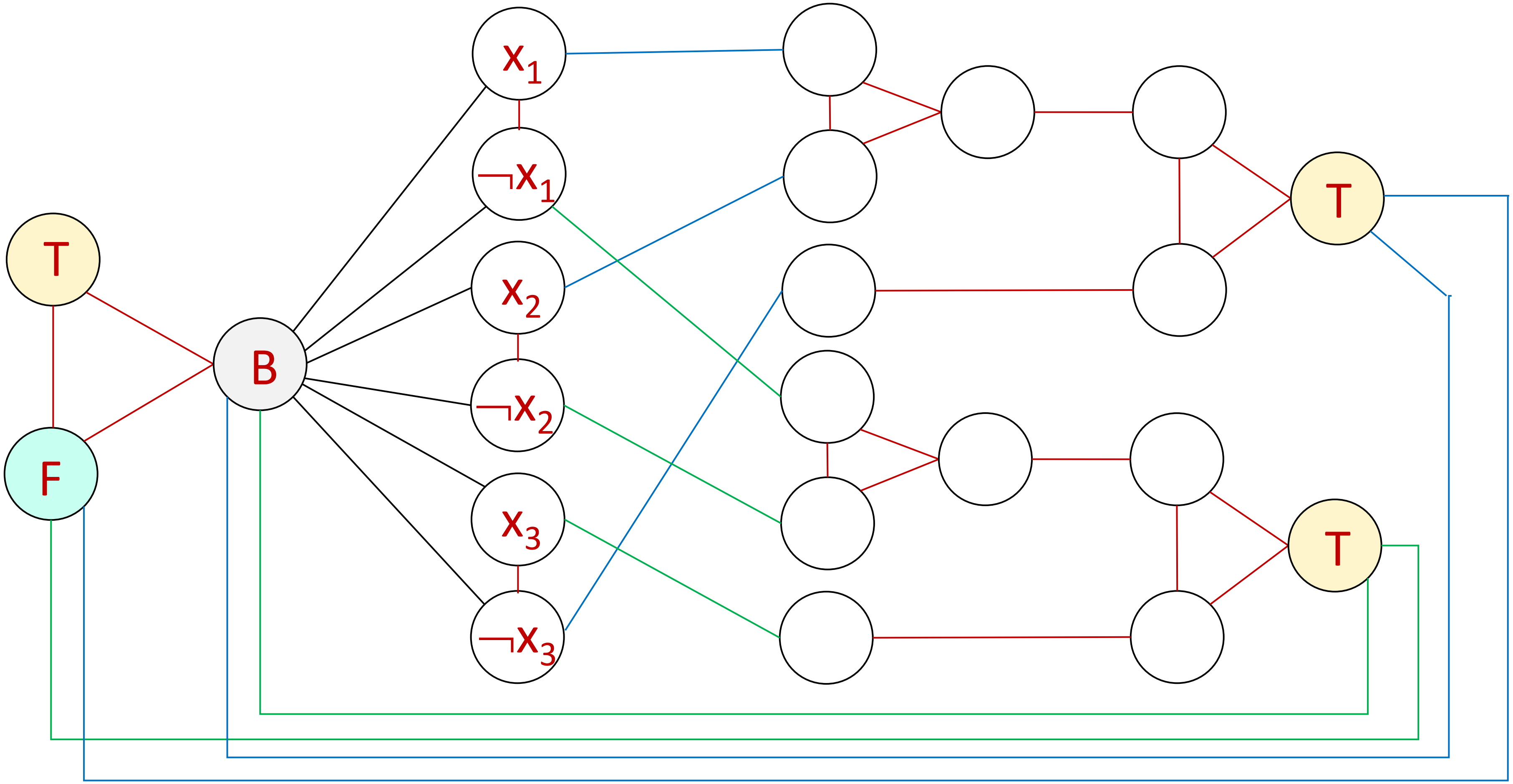
Το Πρόβλημα 3-Coloring είναι NP-πλήρες

- **Παράδειγμα:** $\varphi = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2 \vee x_3 \vee \neg x_1)$



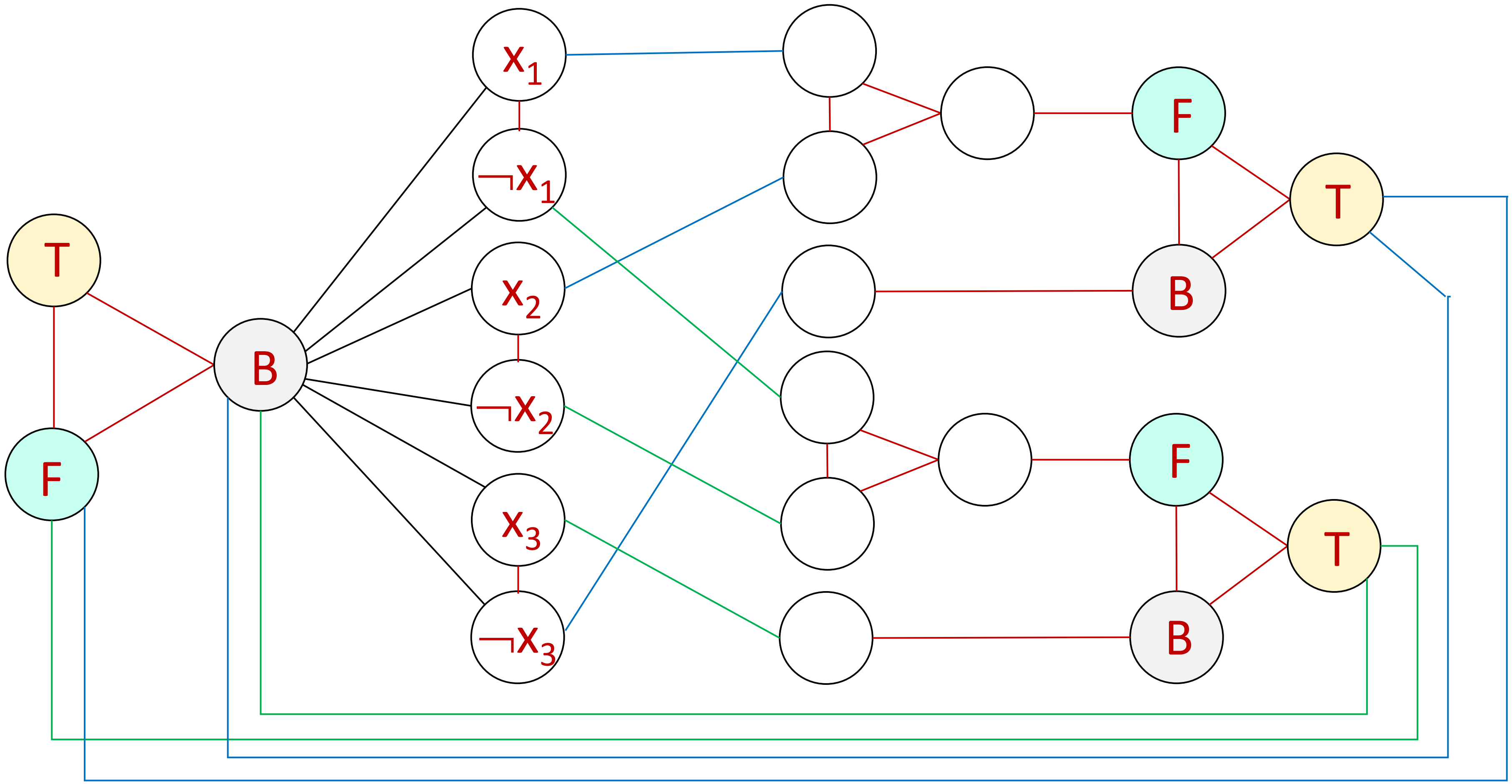
Το Πρόβλημα 3-Coloring είναι NP-πλήρες

- **Παράδειγμα:** $\varphi = (x_1 \lor x_2 \lor \neg x_3) \land (\neg x_2 \lor x_3 \lor \neg x_1)$



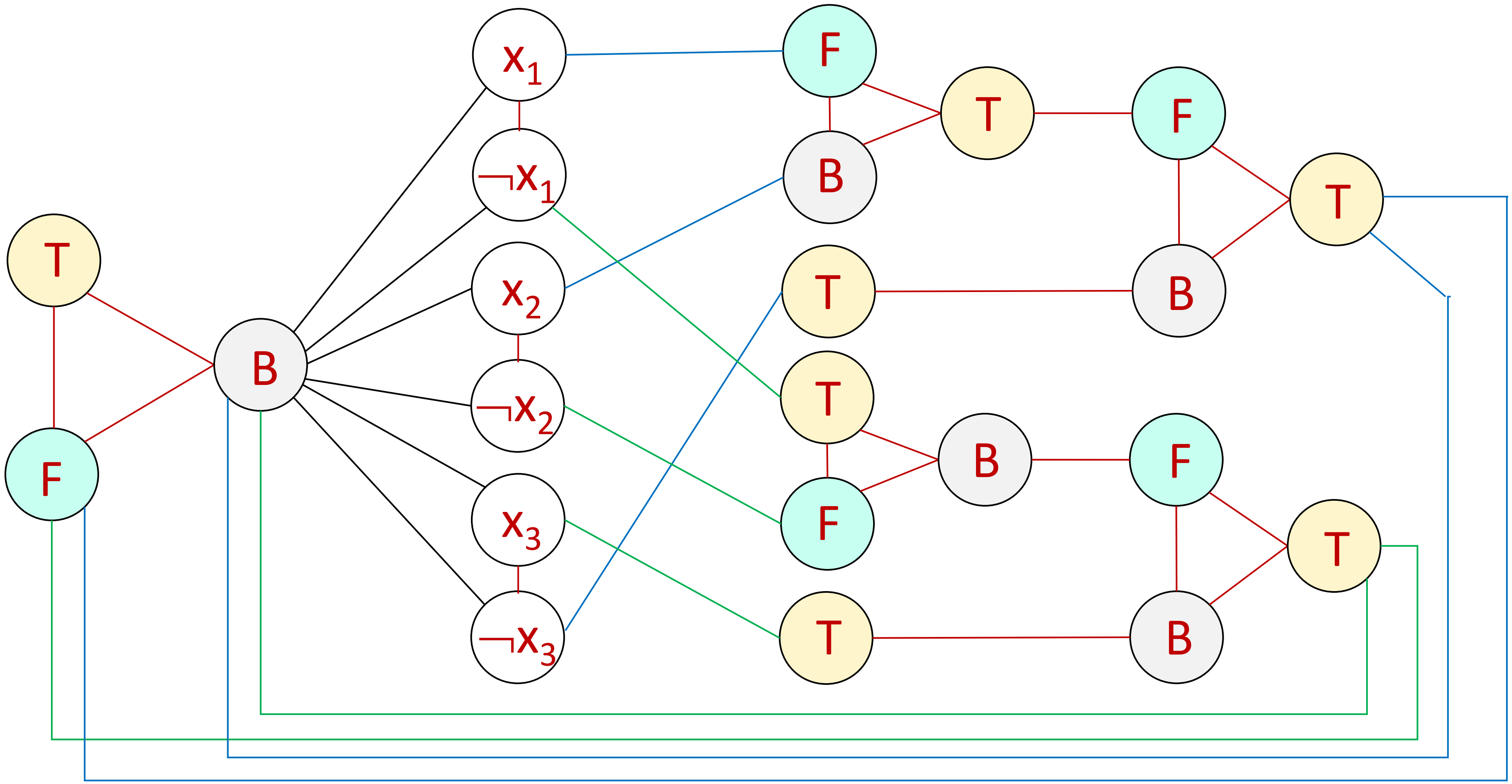
Το Πρόβλημα 3-Coloring είναι NP-πλήρες

- **Παράδειγμα:** $\varphi = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2 \vee x_3 \vee \neg x_1)$



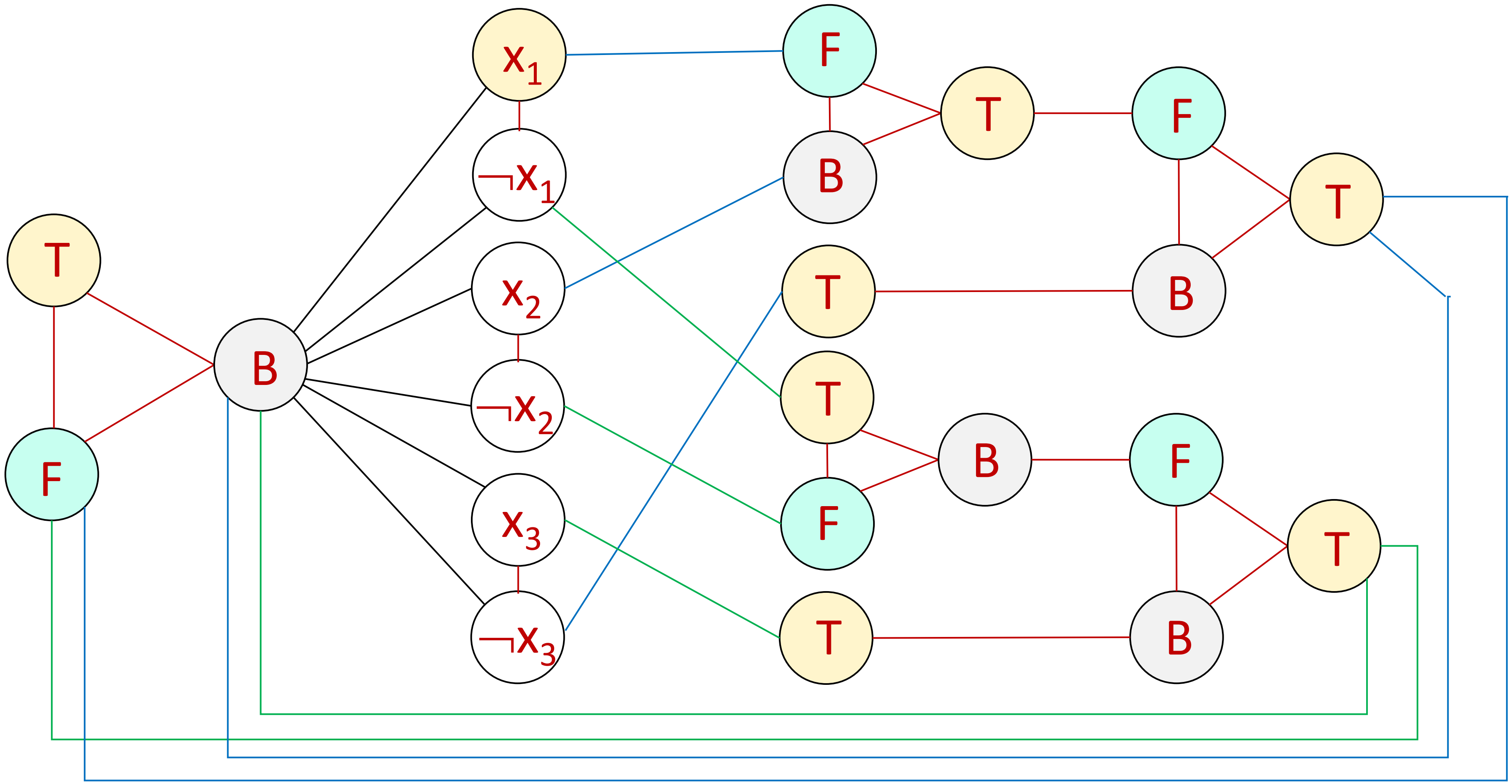
Το Πρόβλημα 3-Coloring είναι NP-πλήρες

- **Παράδειγμα:** $\varphi = (x_1 \vee x_2 \vee \neg\, x_3) \wedge (\neg\, x_2 \vee x_3 \vee \neg\, x_1)$



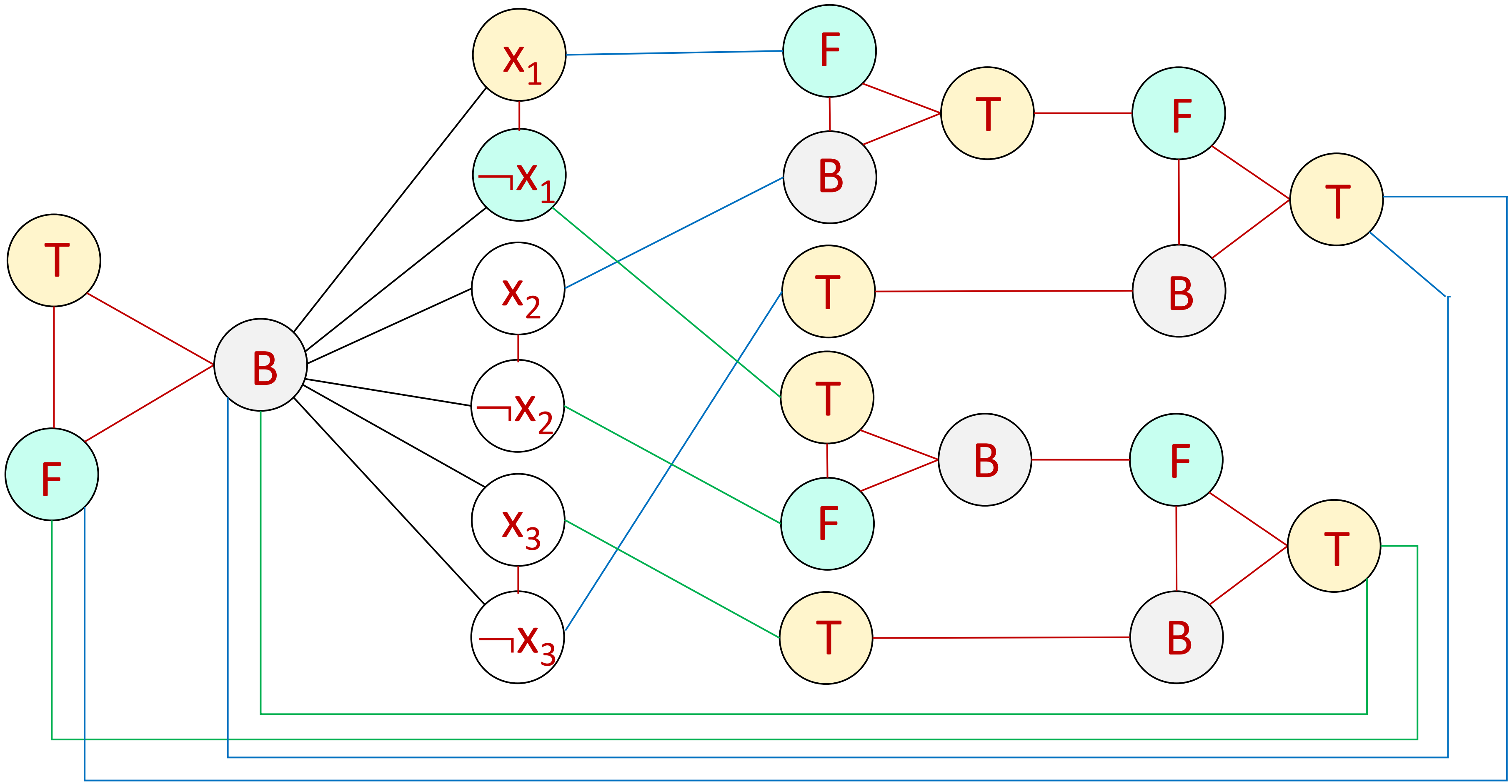
Το Πρόβλημα 3-Coloring είναι NP-πλήρες

- **Παράδειγμα:** $\varphi = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2 \vee x_3 \vee \neg x_1)$



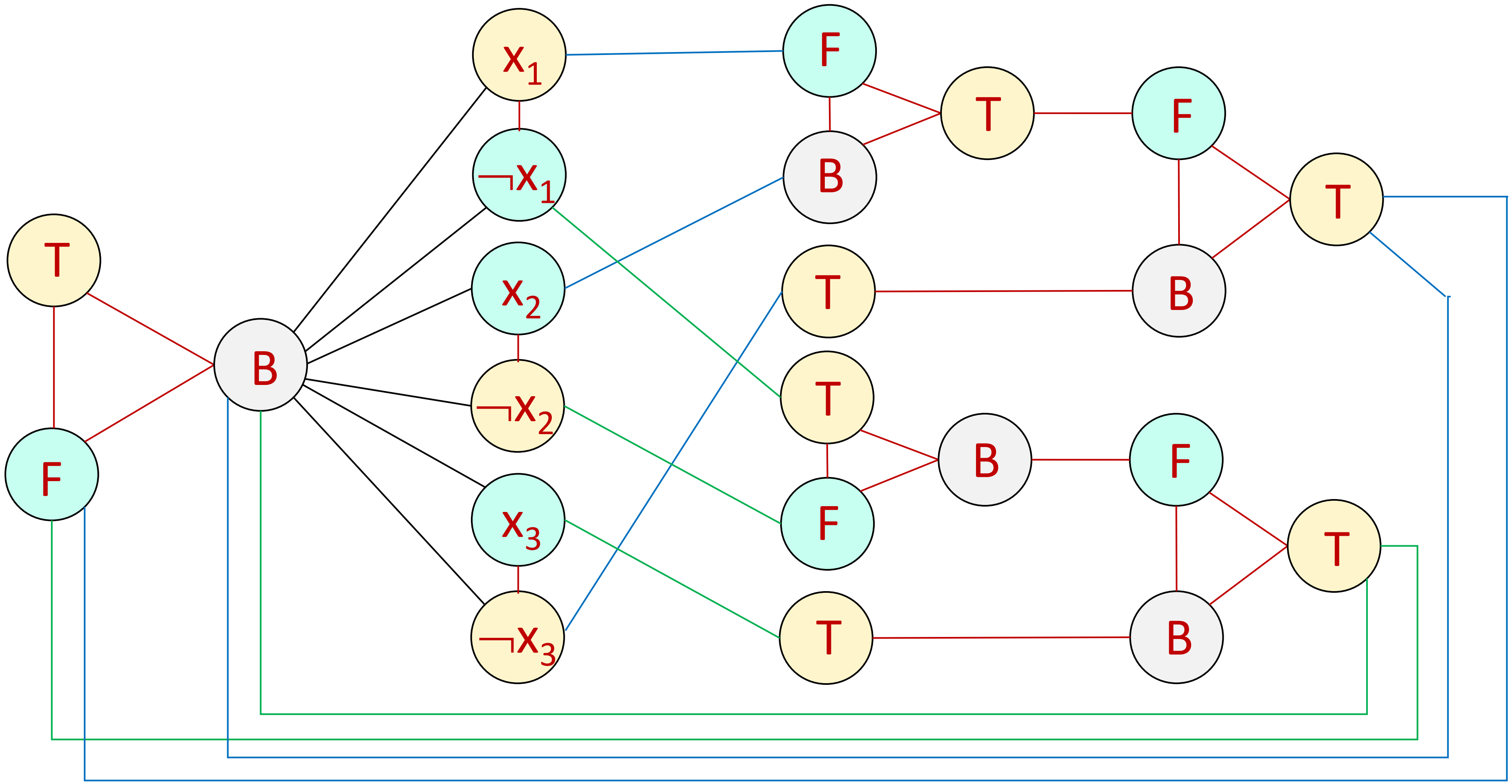
Το Πρόβλημα 3-Coloring είναι NP-πλήρες

- **Παράδειγμα:** $\varphi = (x_1 \lor x_2 \lor \neg x_3) \land (\neg x_2 \lor x_3 \lor \neg x_1)$



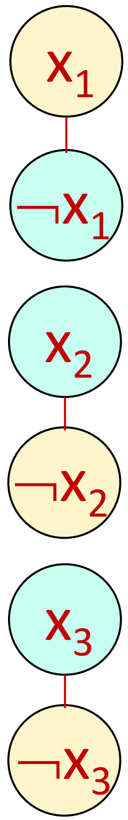
Το Πρόβλημα 3-Coloring είναι NP-πλήρες

- **Παράδειγμα:** $\varphi = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2 \vee x_3 \vee \neg x_1)$



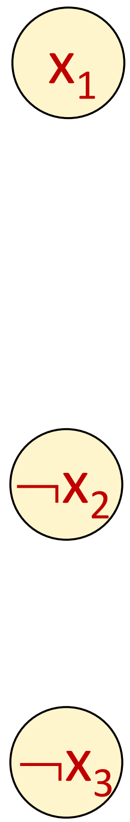
Το Πρόβλημα 3-Coloring είναι NP-πλήρες

- **Παράδειγμα:** $\varphi = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2 \vee x_3 \vee \neg x_1)$



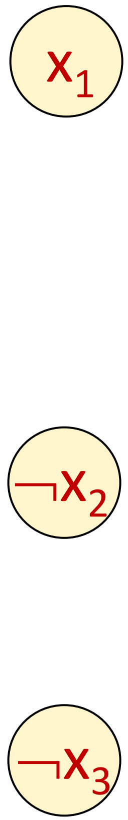
Το Πρόβλημα 3-Coloring είναι NP-πλήρες

- **Παράδειγμα:** $\varphi = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2 \vee x_3 \vee \neg x_1)$



Το Πρόβλημα 3-Coloring είναι NP-πλήρες

- **Παράδειγμα:** $\varphi = (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2 \vee x_3 \vee \neg x_1)$



x_1 = True
x_2 = False
x_3 = False

Το Πρόβλημα 3-Coloring είναι NP-πλήρες

- **Παράδειγμα:** $\varphi = \underbrace{(x_1 \lor x_2 \lor \neg x_3)}_{\text{True}} \land \underbrace{(\neg x_2 \lor x_3 \lor \neg x_1)}_{\text{True}}$

Ανάθεση τιμών αληθείας του λογικού τύπου φ

x_1 = True
x_2 = False
x_3 = False

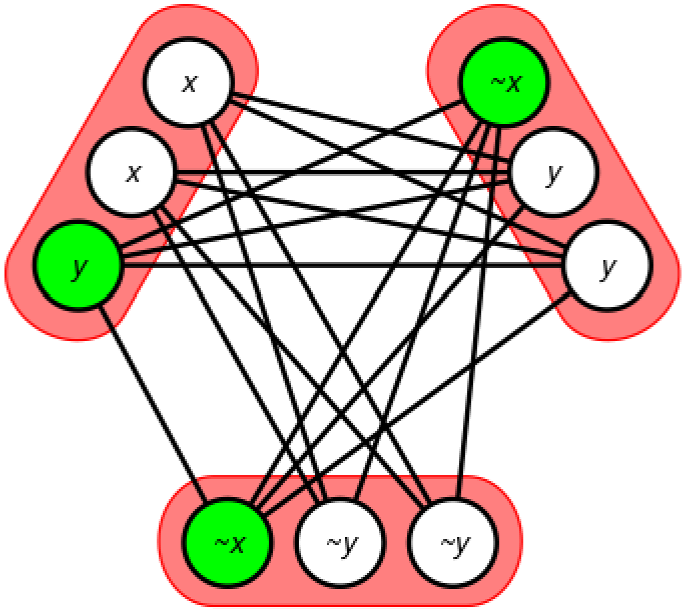
φ = True

Τέλος...

Το 3-SAT είναι ένα από τα 21 NP-πλήρη προβλήματα του Karp, και χρησιμοποιείται ως πρόβλημα αναφοράς για την απόδειξη της NP-πληρότητας άλλων προβλημάτων.

Αυτό γίνεται μέσω πολυωνυμικού-χρόνου αναγωγής από το 3-SAT σε άλλα προβλήματα.

Ένα παράδειγμα είναι το clique πρόβλημα: Δεδομένου ενός στιγμιότυπου (Boolean formula) φ του 3SAT με k όρους C_1, C_2, …, C_k (clauses) και n μεταβλητές x_1, x_2, …, x_n (variables), το αντίστοιχο γράφημα αποτελείται από ένα κόμβο για κάθε μεταβλητή και μια ακμή μεταξύ δύο μη-αντιφατικών μεταβλητών από διαφορετικούς τύπους (βλέπε Σχήμα).



Το γράφημα έχει μία k-clique εάν-ν ο λογικός τύπος είναι ικανοποιήσιμος.

Τέλος...

Ευχαριστώ

για την

Προσοχή σας !!!