Θεωρία Γραφημάτων

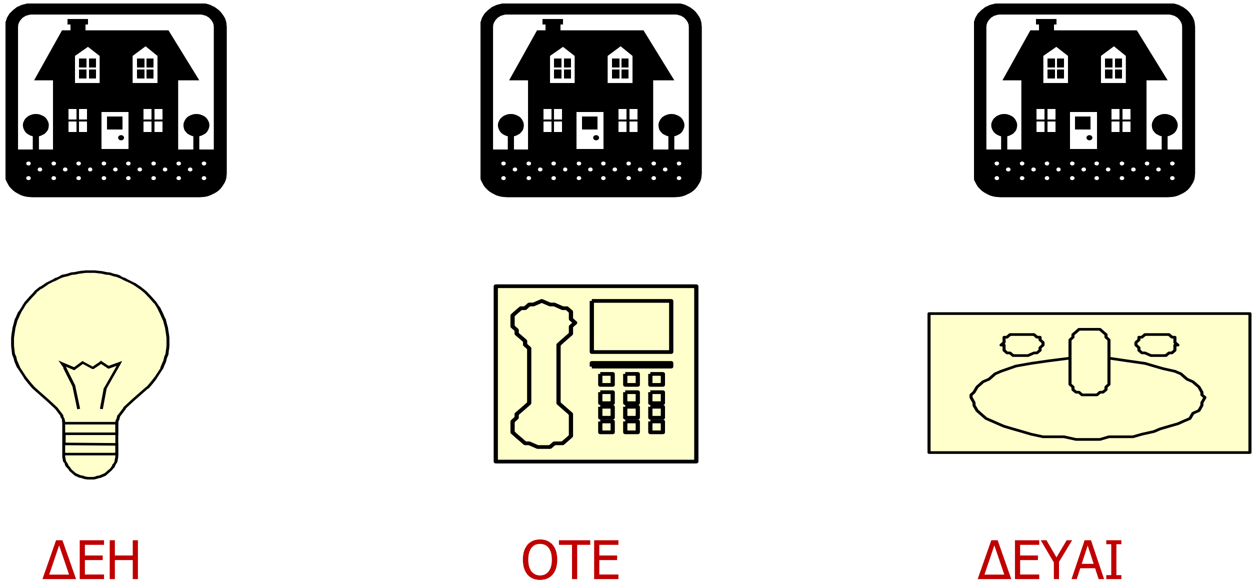
Θεμελιώσεις-Αλγόριθμοι-Εφαρμογές

Ενότητα 6

ΕΠΙΠΕΔΙΚΟΤΗΤΑ

Εφαρμογές Θεωρίας Γραφημάτων

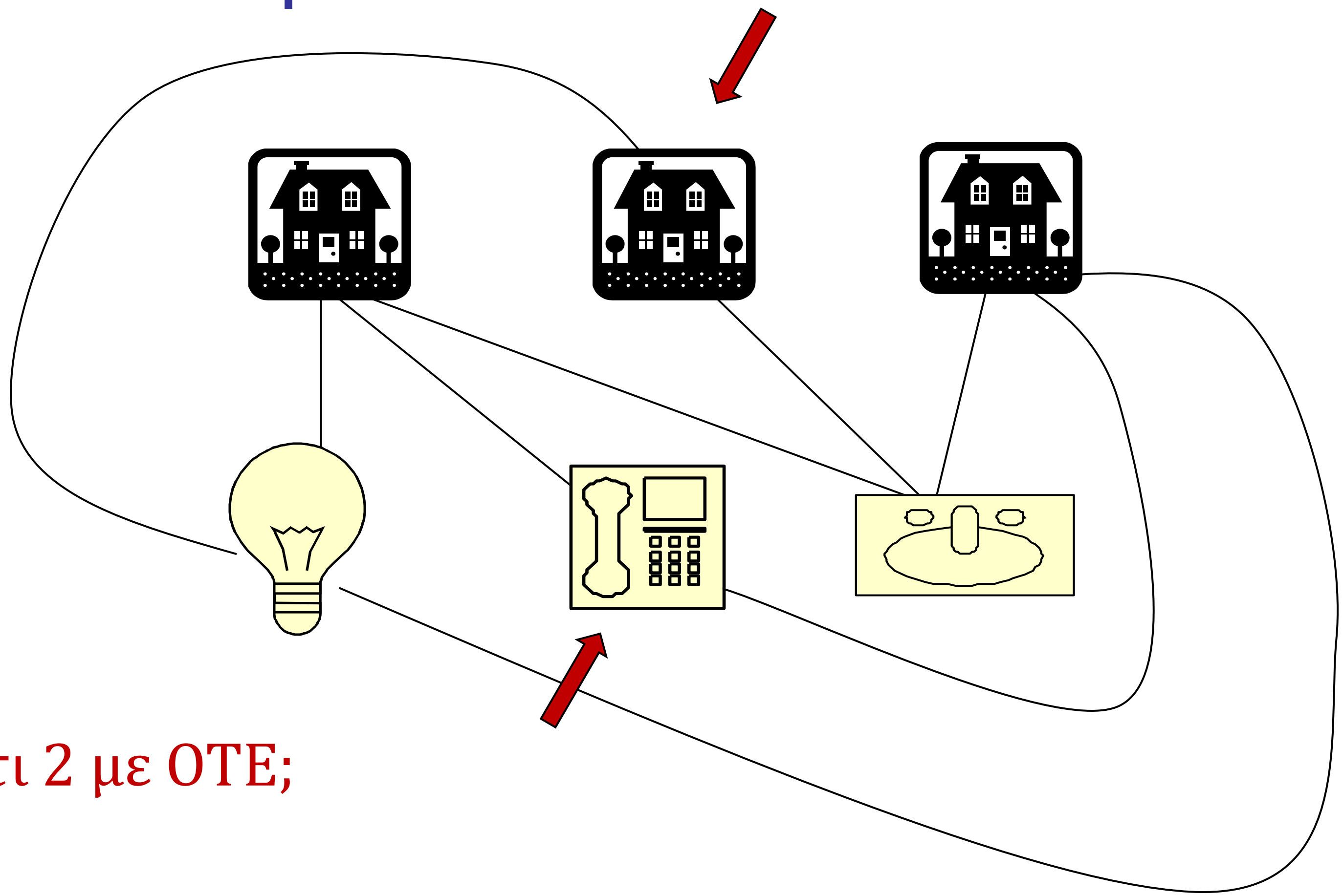
Επιπεδικότητα



Σύνδεσε όλα τα σπίτια με τις παροχές χωρίς να διασταυρωθούν οι συνδέσεις

Εφαρμογές Θεωρίας Γραφημάτων

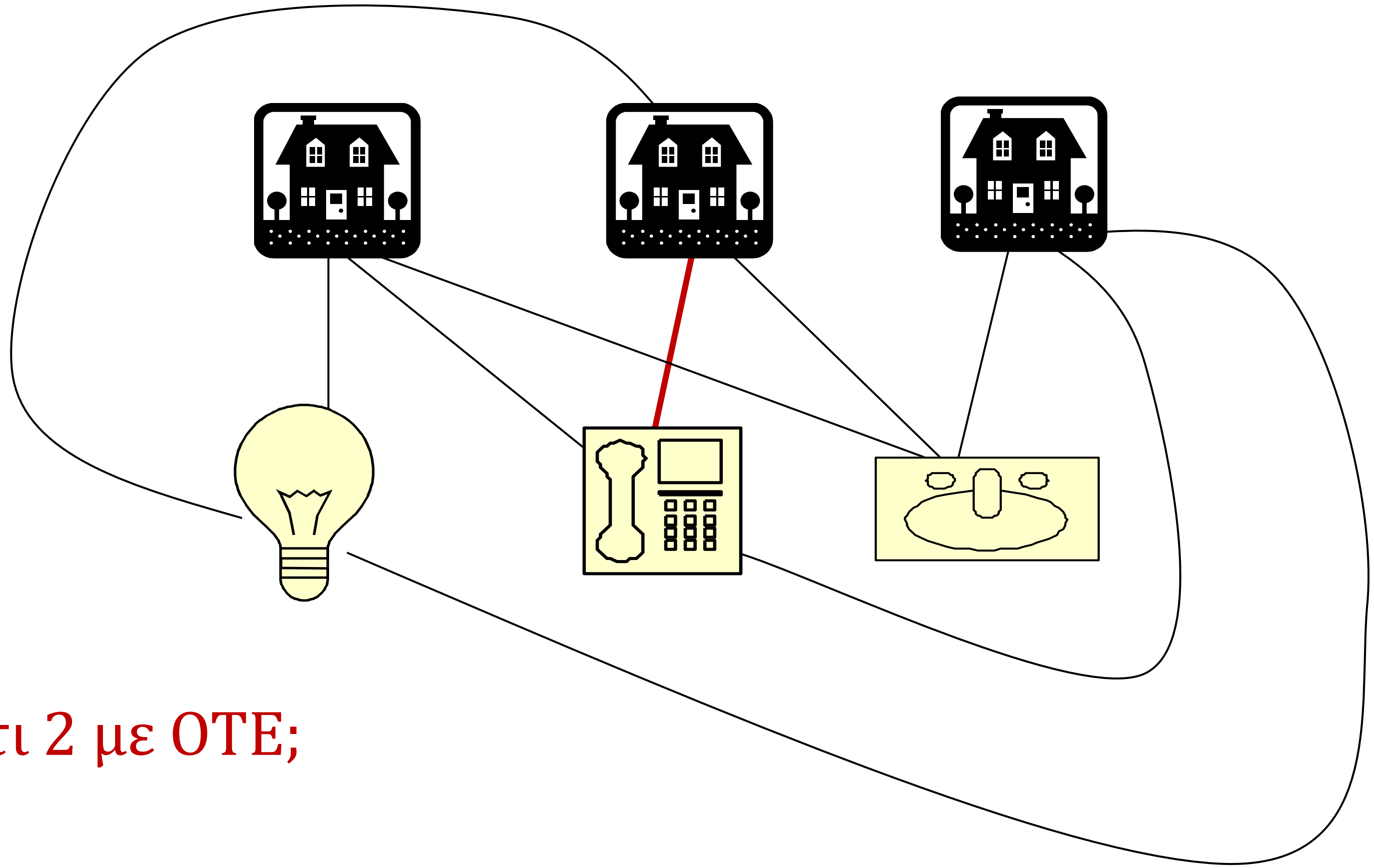
Επιπεδικότητα



Σπίτι 2 με ΟΤΕ;

Εφαρμογές Θεωρίας Γραφημάτων

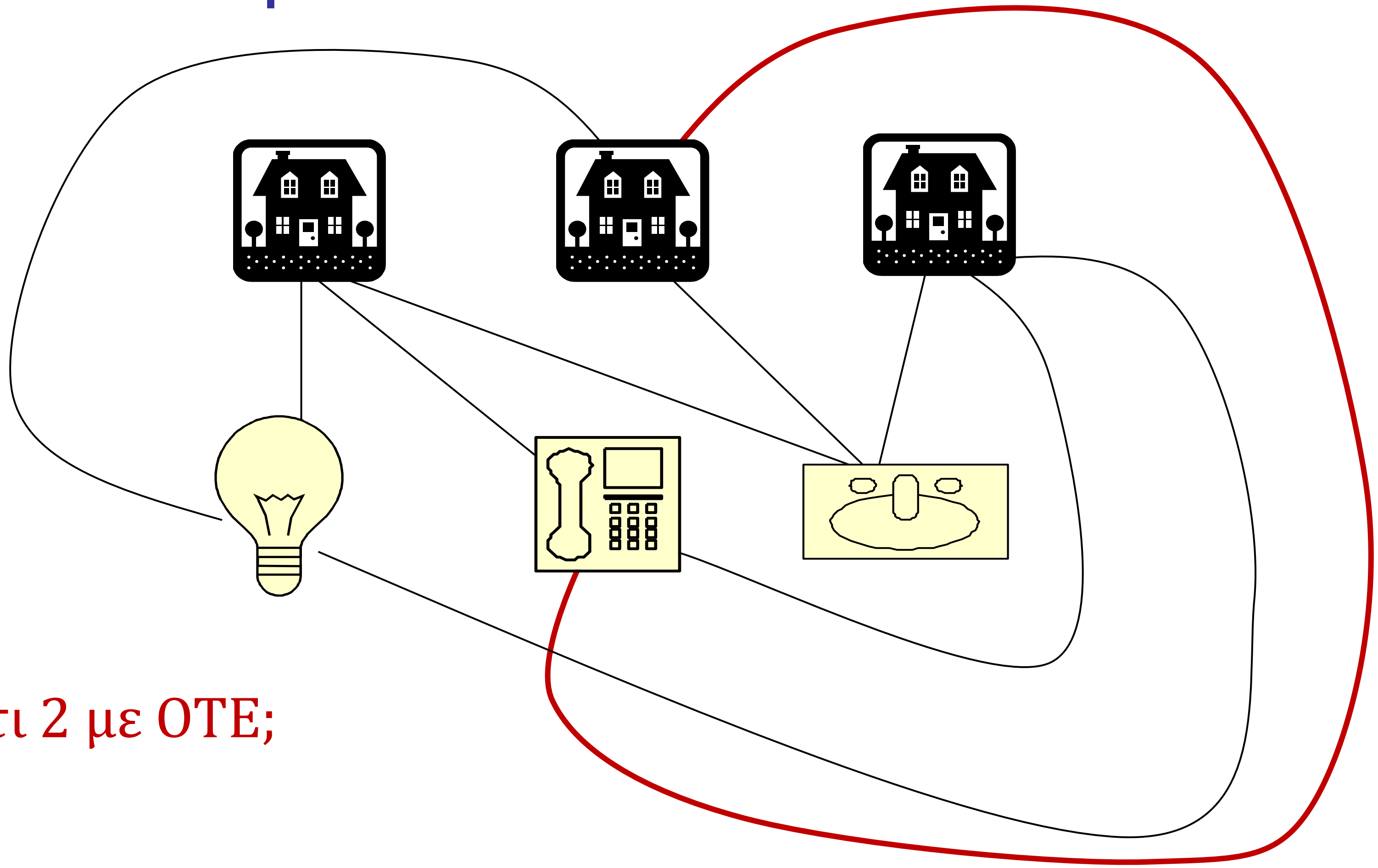
Επιπεδικότητα



Σπίτι 2 με ΟΤΕ;

Εφαρμογές Θεωρίας Γραφημάτων

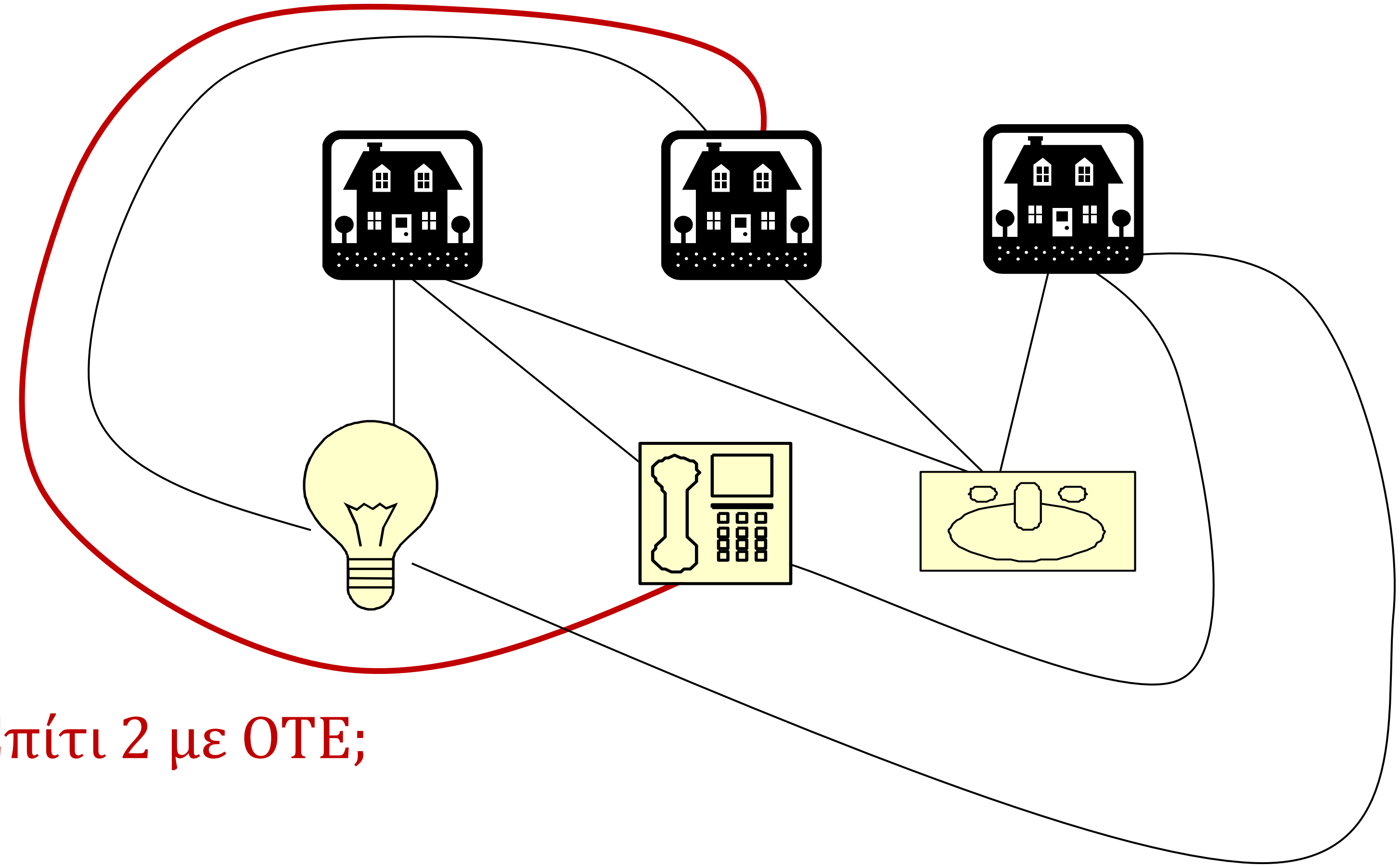
Επιπεδικότητα



Σπίτι 2 με ΟΤΕ;

Εφαρμογές Θεωρίας Γραφημάτων

Επιπεδικότητα

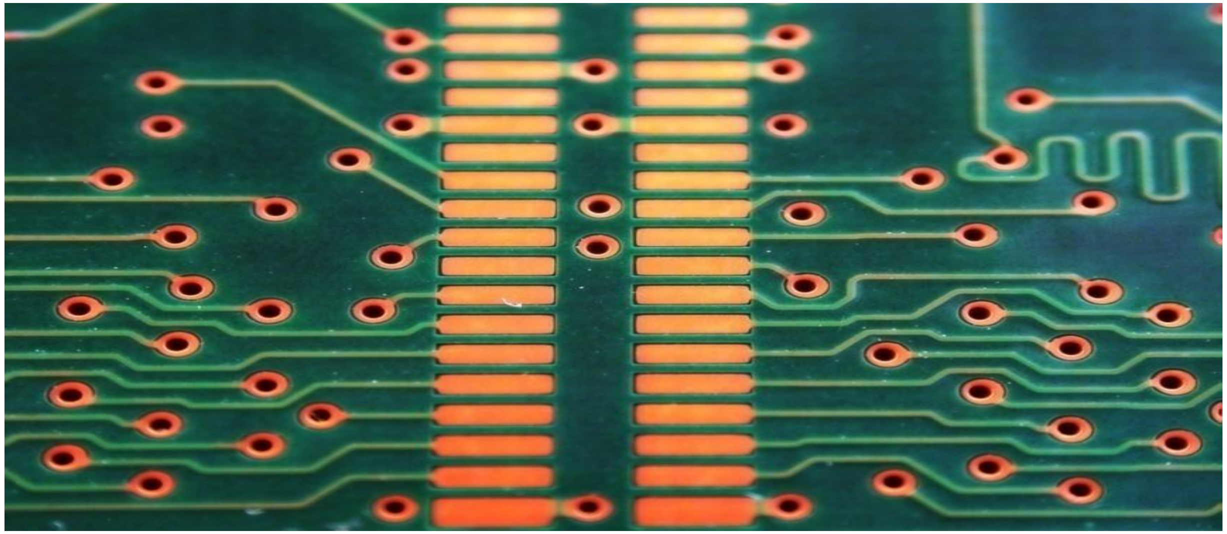


Σπίτι 2 με ΟΤΕ;

Εφαρμογές Θεωρίας Γραφημάτων

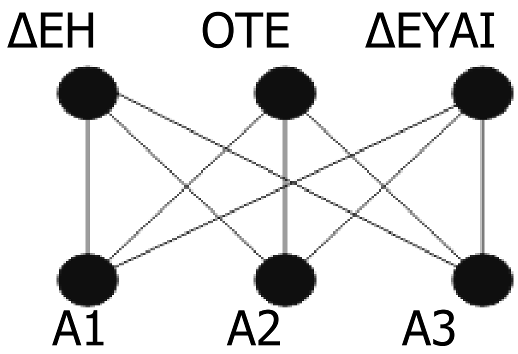
Επιπεδικότητα

- Μπορεί ένα γράφημα να σχεδιασθεί ώστε να μην υπάρχουν τεμνόμενες ακμές;



Εισαγωγή

- Γνωστό παιχνίδι του γραφήματος ανέσεων. Άλυτο!!

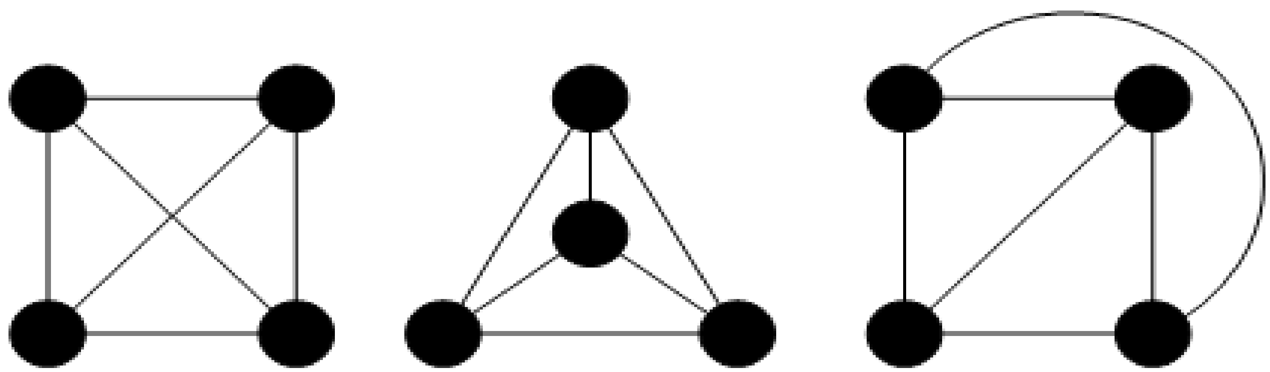


$K_{3,3}$

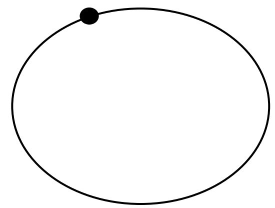
- <u>Ορισμός</u> επιπέδου και επιπεδικού (ενσωματωμένος στο επίπεδο) γραφήματος.

Εισαγωγή

- Κάθε απλό επίπεδο γράφημα μπορεί να παρασταθεί με ευθείες γραμμές.



Εισαγωγή

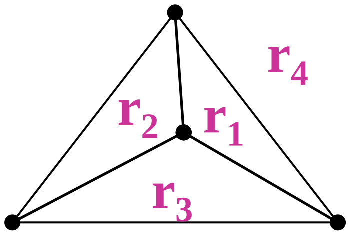


Κλειστή Καμπύλη Jordan

- Καμπύλη Jordan: συνεχής γραμμή του επιπέδου που δεν αυτοτέμνεται.

- Περιοχή = όψη = παράθυρο (r or f)

του G που περιέχει το σημείο x είναι το σύνολο των σημείων του επιπέδου που μπορούν να ενωθούν με το x μέσω μιας Jordan που δεν τέμνει τις ακμές του G

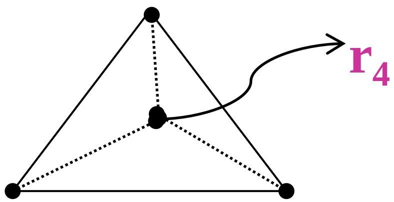


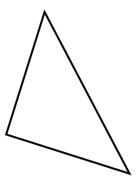
- Εξωτερική, άπειρη, απεριόριστη, εξώτερη περιοχή.

r_4

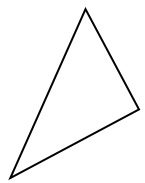
- Εξωτερικός επιπεδικός γράφος: όλες οι κορυφές εφάπτονται στην άπειρη περιοχή.

Περιθώριο

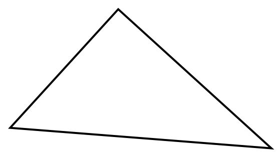




ή



ή



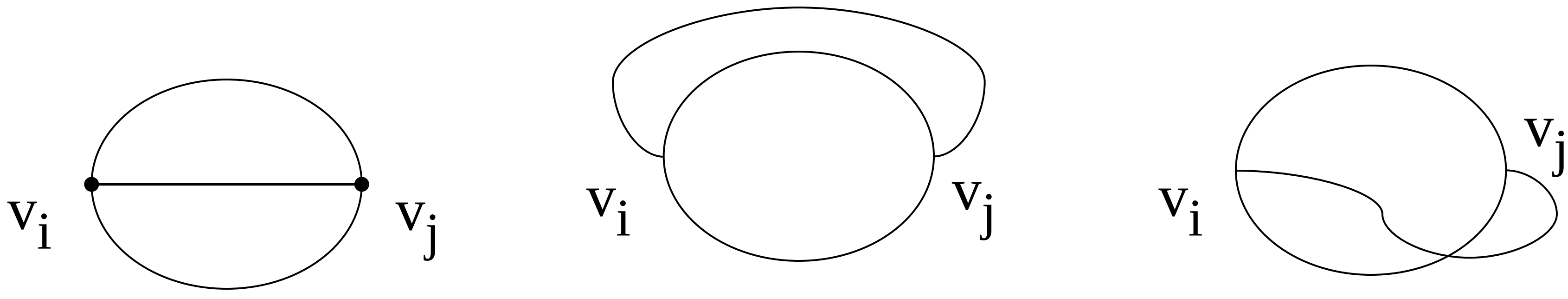
Εισαγωγή

- Δοθείσης μιας μέγιστης καμπύλης Jordan L και δύο σημείων της, έστω v_i και v_j, κάθε καμπύλη Jordan που ενώνει τα σημεία αυτά πρέπει:

  α) να βρίσκεται εντός της L, ή

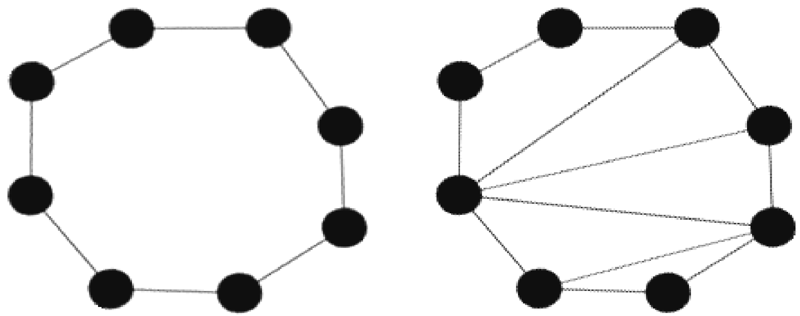
  β) να βρίσκεται εκτός της L, ή

  γ) να τέμνει την L σε κάποια σημεία διαφορετικά από τα v_i και v_j.



Θεωρήματα Euler & Kuratowski

- <u>Θεωρήματα Euler (1752):</u> $\boxed{n + r = m + 2}$ (επαγωγή).
- <u>Πόρισμα:</u> $\boxed{n + r = m + k + 1}$
- <u>Μέγιστος εξώτερος</u> (τριγωνοποιημένος ή outerplaner) – εξωτερικός επίπεδος γράφος τέτοιος ώστε εισάγοντας μια νέα ακμή γίνεται μη επίπεδος).



Θεώρημα Euler: $n + r = m + 2$

Επαγωγή με βάση το πλήθος m των ακμών του γραφήματος G.

Αν $m=0$, τότε $n=1$ και $r=1$

Έστω ότι το Θ. ισχύει για ένα συνδεδεμένο γράφημα με $m-1$ ακμές.

Εισάγουμε μια νέα ακμή e.

Τότε:

(α) η e είναι βρόχος $\Rightarrow$ $r \to r+1$ και $n \to n$.

(β) η e συνδέει δύο υπάρχουσες κόμβους $\Rightarrow$ $r \to r+1$ και $n \to n$

(γ) η e είναι προσπίπτουσα σε μία μόνο κορυφή=κόμβο $\Rightarrow$ $n \to n+1$ και $r \to r$

Σε οποιαδήποτε περίπτωση ισχύει η αλήθεια του θεωρήματος.

Θεώρημα Euler: n + r = m + 2

Πόρισμα: G επίπεδο γράφημα με k συνιστώσες n+r = m+k+1

- $n_1 + r_1 = m_1 + 2$

  $n_2 + r_2 = m_2 + 2$

  $\vdots$

  $n_k + r_k = m_k + 2$

$r = r_1 + r_2 + \cdots + r_k - (k-1)$

- Summing, $\Rightarrow$ $n + r + (k-1) = m + 2k \Rightarrow$

  $n + r = m + k + 1$

Θεωρήματα Euler & Kuratowski

- Λήμμα: Για κάθε απλό επίπεδο συνδεδεμένο γράφημα ισχύει:

$$2m = \Sigma_{i=1..m-n+2}\, d(r_i) = \Sigma_{j=d(G)..D(G)}\, j\, n(j)$$

$d(r_i)$ = # ακμών που περικλείουν ή ορίζουν την i-th περιοχή

$n(j)$ = # κόμβων βαθμού j

- Πόρισμα: Για κάθε μέγιστο επίπεδο γράφο ισχύει:

$$\boxed{m = 3n-6}$$

- Πόρισμα: Για κάθε απλό συνδεδεμένο επίπεδο γράφο ισχύει:

$$\boxed{m \leq 3n-6}$$

Θεωρήματα Euler & Kuratowski

Για κάθε απλό συνδεδεμένο γράφημα G ισχύει η σχέση:

$$\boxed{2m = \sum_{i=1}^{m-n+2} d(r_i) = \sum_{j=\delta(G)}^{\Delta(G)} j\, n(j)}$$

Απόδειξη: Θεωρώντας οτι κάθε ακμή προσμετράται δύο φορές σε κάθε περιοχή και σε κάθε πλευρά.

Επίσης, $m+2=n+r \Rightarrow r=m-n+2$

Θεωρήματα Euler & Kuratowski

- Αν G είναι μέγιστος επίπεδος γράφος με $n \geq 3$, τότε:

$$\boxed{m = 3n - 6}$$

Απόδειξη:

- Έστω r το πλήθος των περιοχών.
- Σε ένα μέγιστο επίπεδο γράφημα <u>κάθε περιοχή</u> περικλείεται από ένα τρίγωνο.
- Άρα, για τό # των ακμών ισχύει: $2m = 3r \Rightarrow \boxed{r = 2m/3}$
- Τύπος Euler:

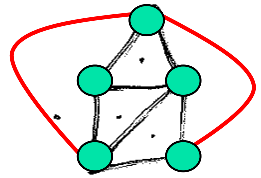
$$n + r = m + 2$$

$$n + 2m/3 = m + 2$$

$$m = 3n + 6$$

Θεωρήματα Euler & Kuratowski

- Για κάθε απλό συνδεδεμένο και επίπεδο γράφημα G με $n \geq 3$, ισχύει: $\boxed{m \leq 3n - 6}$



$2m = 14 \geq 3r = 12$

Απόδειξη:

Ισχύει $2m = \sum_{i=1}^{m-n+2} d(r_i)$.

Κάθε περιοχή περιορίζεται από 3 τουλάχιστον ακμές

Επομένως: $\sum_{i=1}^{m-n+2} d(r_i) \geq 3r, \Rightarrow 2m \geq 3r \Rightarrow 2m \geq 3(m+2-n)$

$\underline{m \leq 3n-6}$

Εάν G μεγιστικό επίπεδο $\Rightarrow m = 3n-6$

Αλλιώς, προσθέτω ακμές $\Rightarrow$ μεγιστικό επίπεδο G'.

Σχόλιο: $n = n'$. Τότε $m \leq m'$ και $m' = 3n'-6$

Άρα $m \leq m' = 3n'-6 = 3n-6$

Θεωρήματα Euler & Kuratowski

- Πόρισμα: Για κάθε απλό συνδεδεμένο επίπεδο διμερές γράφημα ισχύει:

$$\boxed{m \leq 2n-4} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma d(ri) \geq 4r \Rightarrow \\ 2m \geq 4(m+2-n) \Rightarrow \\ 2m - 8 + 4n \geq 4m \Rightarrow \\ 2m \leq 4n - 8 \Rightarrow \\ m \leq 2n - 4 \end{array} \right.$$

- Πόρισμα: Κάθε επίπεδο γράφημα έχει μία κορυφή με $d(v) \leq 5$.
- Θεώρημα: Το γράφημα K_5 δεν είναι επίπεδο.
- Θεώρημα: Το διγράφημα $K_{3,3}$ δεν είναι επίπεδο.

Θεωρήματα Euler & Kuratowski

Πόρισμα: Κάθε επίπεδο γράφημα έχει κόμβο με $d(v) \leq 5$

- Έστω G επίπεδο γράφημα με $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.
- $\boxed{\text{Αν, } n \leq 6 \Rightarrow \nexists \text{ κόμβος με βαθμό } > 5.}$
- Άρα, υποθέτω ότι $\underline{n \geq 7}$.
- Ισχύει: $\boxed{m \leq 3n - 6}$
- Επομένως, $\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = \boxed{2m \leq 6n - 12}$
- Αν όλοι οι κόμβοι του G έχουν βαθμό ≥ 6, τότε $\boxed{\sum d(v_i) \geq 6n}$
- Όμως, $2m = \sum d(v_i) \geq 6n \implies$

$$\boxed{6n \leq 2m \leq 6n - 12 \quad \text{άτοπο.}}$$

Θεωρήματα Euler & Kuratowski

Πόρισμα – Απόδειξη 2

Ισχύει: $m \le 3n - 6$

$$\boxed{2m = \sum_{i=1}^{m-n+2} d(r_i) = \sum_{j=\delta(G)}^{\Delta(G)} j\, n(j)}$$

Επομένως:

$$\sum_i i\, n(i) \le 6n - 12$$

$$12 \le 6 \cdot \sum_i n(i) - \sum_i i\, n(i)$$

$$12 \le \sum_i (6-i)\, n(i)$$

Όμως:

$\sum_i (6-i)\, n(i)$ πρέπει να είναι > 0.

i και $n(i)$ είναι ≥ 0.

$\Rightarrow \exists\, n(i) \neq 0$ με ένα τουλάχιστον $i < 6$.

Θεωρήματα Euler & Kuratowski

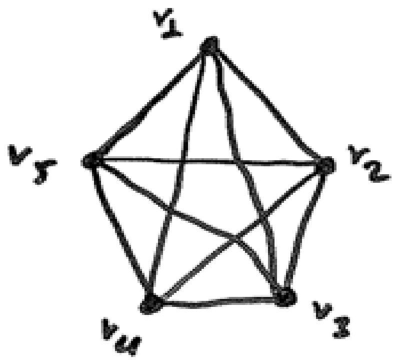
Θεώρημα: Το K_5 δεν είναι επίπεδο

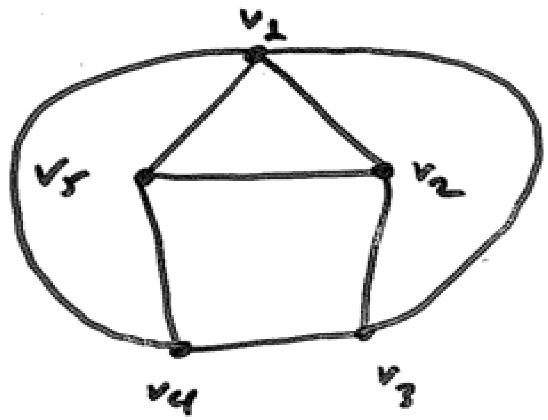
Έστω K_5 ήταν επίπεδο $\Rightarrow$

$$m \leq 3n - 6$$

Όμως ισχύει:

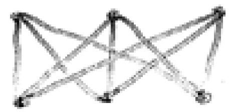
$$10 = |E(K_5)| \leq 3 \cdot 5 - 6 = 9 \text{, άτοπο.}$$





Θεωρήματα Euler & Kuratowski

Θεώρημα: Το $K_{3,3}$ δεν είναι επίπεδο



Έστω $K_{3,3}$ είναι επίπεδο.

$K_{3,3}$ δεν έχει τριγωνικές περιοχές $\Rightarrow$
κάθε περιοχή περικλείεται από πολύγωνα
με τουλάχιστον 4 κορυφές.

Άρα, $2m \geq 4r \Rightarrow$

$18 \geq 4r \Rightarrow \underline{r \leq 4}$

Από Euler : $n + r = m + 2 \Rightarrow$

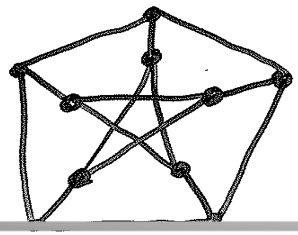
$2 = n - m + r \leq 6 - 9 + 4 = 1$. άτοπο.

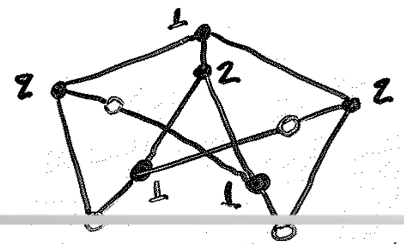
Θεωρήματα Euler & Kuratowski

- Ορισμός ομοιομορφικών/συστελώσιμων γράφων.

  G, G' ομοιμορφικοί => ο ένας προκύπτει από τον άλλου με μία η περισσότερες υποδιαιρέσεις ακμών

- Θεώρημα Kuratowski (1930): Ένας γράφος είναι επίπεδος εαν –ν δεν περιέχει υπογράφο ισομορφικό ή ομοιομορφικό προς τους K_5 και $K_{3,3}$
- Θεώρημα: Ένας γράφος είναι επίπεδος αν δεν περιέχει υπογράφο συστελώσιμο προς τους K_5 και $K_{3,3}$
- Θεώρημα: Ένας γράφος είναι ενσωματώσιμος στην επιφάνεια σφαίρας, αν είναι ενσωματώσιμος στο δάπεδο.





Ενσωμάτωση σε Πολλαπλές Επιφάνειες

- <u>Πάχος (thickness):</u> ελάχιστος αριθμός επιπέδων για την ενσωμάτωση του γράφου. Χρησιμότητα σε εκτύπωση κυκλωμάτων.

- Ισχύουν: t(επίπεδο G) = 1,

  $t(K_5) = t(K_{3,3}) = 2$,

  $t(K_9) = 3$.

Ενσωμάτωση σε Πολλαπλές Επιφάνειες

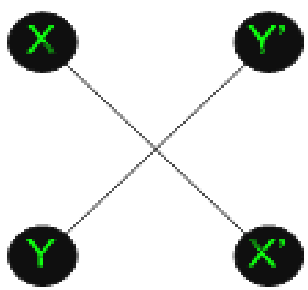
- Πόρισμα: $t(G) \geq \lceil m/(3n-6) \rceil$
- Πόρισμα: $t(\text{διγράφου } G) \geq \lceil m/(2n-4) \rceil$
- Πόρισμα: $t(K_n) \geq \lfloor (n+7)/6 \rfloor$
- Θεώρημα: $t(K_n) = 3$ αν $n = 9, 10$
  $= \lfloor (n+7)/6 \rfloor$ αλλιώς
- Πόρισμα: $t(K_{m,n}) \geq \lceil mn/2(m+n-2) \rceil$

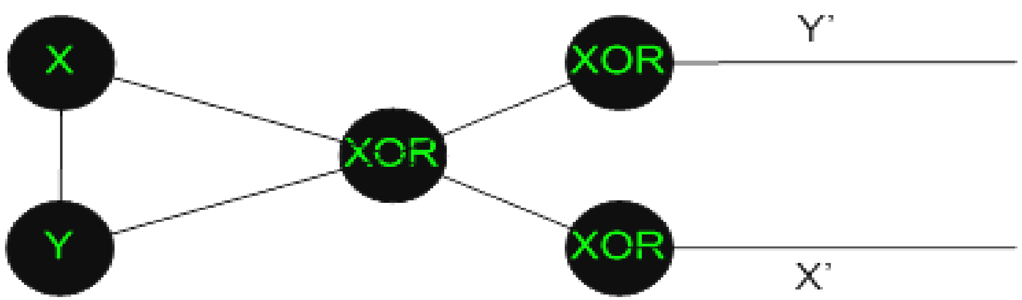
Ενσωμάτωση σε Πολλαπλές Επιφάνειες

- Αριθμός διασταυρώσεων (crossing number): ελάχιστος αριθμός τομών μη επίπεδου γράφου (όχι συνάντηση τριών ακμών σε μια διασταύρωση).
- Ισχύει: cr(επίπεδο G) = 0

$$cr(K_5) = t(K_{3,3}) = 1$$

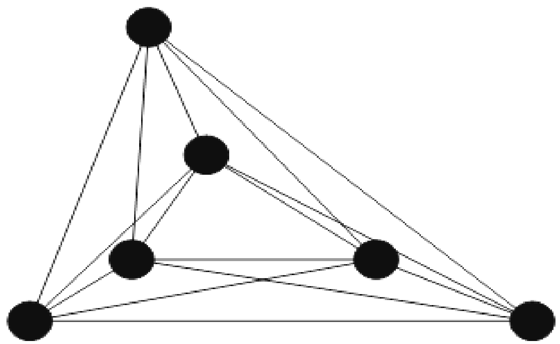
- Λύση Tarjan σε κυκλώματα





Ενσωμάτωση σε Πολλαπλές Επιφάνειες

- Θεώρημα: $cr(K_6) = 3$

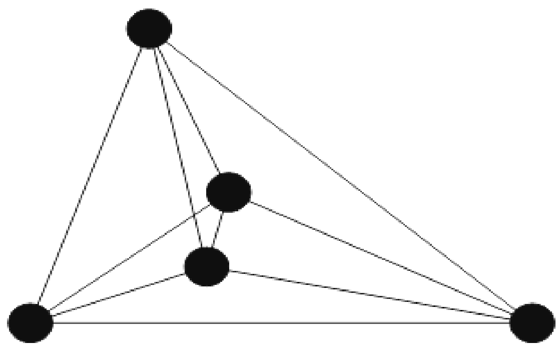


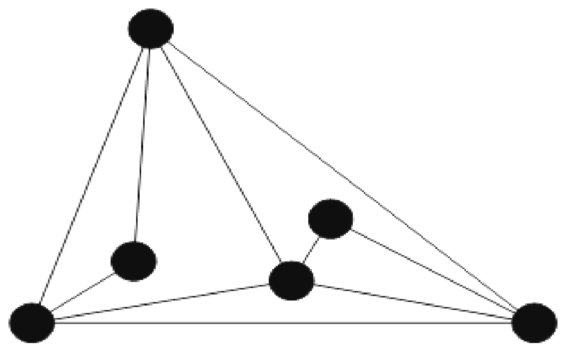
- Θεώρημα: $cr(K_n) \leq 1/4 \lfloor n/2 \rfloor \lfloor (n-1)/2 \rfloor \lfloor (n-2)/2 \rfloor \lfloor (n-3)/2 \rfloor$
- Θεώρημα: $cr(K_{n1.n2}) \leq 1/4 \lfloor n_1/2 \rfloor \lfloor (n_1-1)/2 \rfloor \lfloor n_2/2 \rfloor \lfloor (n_2-1)/2 \rfloor$

Ενσωμάτωση σε Πολλαπλές Επιφάνειες

- Αριθμός διάσπασης (splitting number): ελάχιστος αριθμός διασπάσεων μέχρι να γίνει ο γράφος επίπεδος.

- Ισχύει: $s(K_5) = 1$, $s(K_6) = 2$, $s(K_7) = 3$.





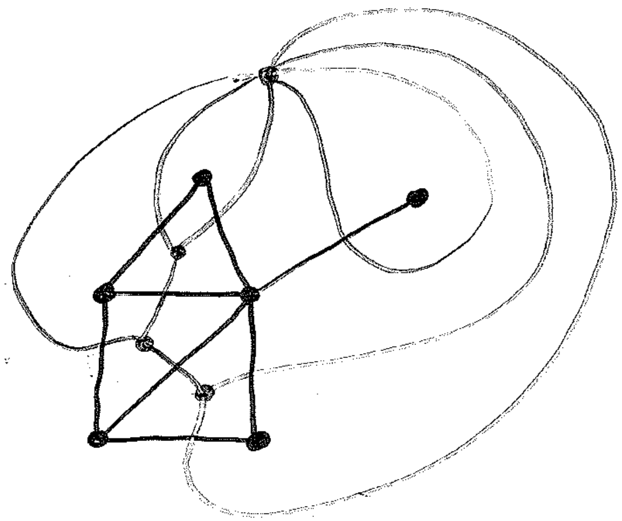
Ενσωμάτωση σε Πολλαπλές Επιφάνειες

- Θεώρημα: $s(K_n) = \lceil (n-3)(n-4)/2 \rceil$, n>=10
  $s(K_{n1,n2}) = \lceil (n_1-3)(n_2-4)/2 \rceil$, n>=2
- Ενσωμάτωση σε σαμπρέλα (torus). Τι είναι η σαμπρέλα;
- Ο K_5 ενσωματώνεται στη σαμπρέλα, ενώ ο $K_{3,3}$ ενσωματώνεται στη ζώνη (band) του Moebius. Χρησιμότητα σε τυπωμένα κυκλώματα (ανοίγουμε τρύπα και τυπώνουμε στις δύο επιφάνειες).
- Η σαμπρέλα μπορεί να θεωρηθεί σαν μια σφαίρα με λαβή Έτσι στη γενική περίπτωση έχουμε σφαίρα με πολλές λαβές. Ο αριθμός των λαβών γίνεται γένος (genus).

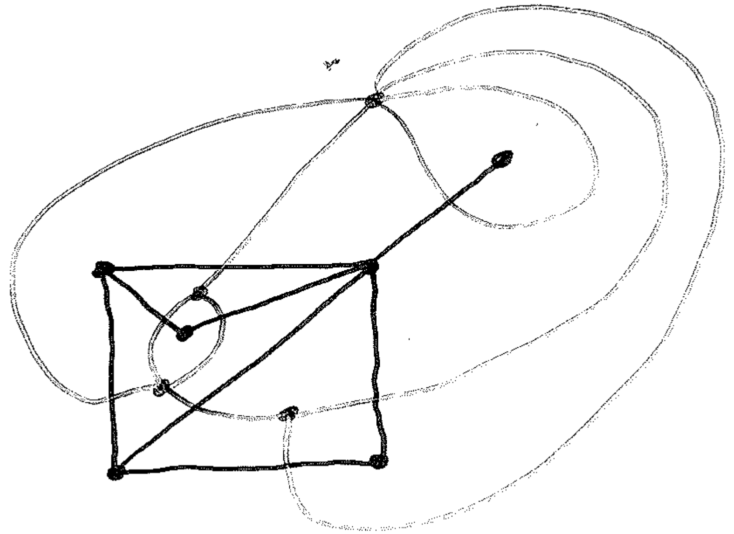
Ενσωμάτωση σε Πολλαπλές Επιφάνειες

- Θεώρημα: $n+r = m+2-2g$
- Θεώρημα: $g(G) \leq cr(G)$
- Πόρισμα: $g(G) \geq \lceil 1+(m-3m)/6 \rceil$
- Θεώρημα: $g(K_n) = \lceil (n-3)(n-4)/12 \rceil$
- Θεώρημα: $g(K_{n1,n2}) = \lceil (n_1-2)(n_2-2)/12 \rceil$

Γεωμετρικά Δυαδικά Γραφήματα



$deg(v) \neq 6 \quad \forall\, v \in V(G^*)$



$deg(v) = 6$

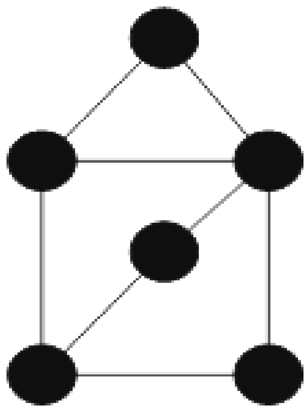
Δυαδικότητα

- Επεξήγηση κατασκευής <u>γεωμετρικού δυαδικού</u>. Από ένα γράφο μπορεί να προκύψουν πολλοί γεωμετρικοί ανάλογα με τους ισομορφικούς αρχικούς και την ενσωμάτωση.
- <u>Συνδυαστικοί δυαδικοί</u> είναι οι γράφοι στους οποίους υπάρχει αντιστοιχία μεταξύ κύκλων αφενός και αποκοπτουσών ακμών αφετέρου.
- <u>Θεώρημα:</u> Κάθε επίπεδος γράφος έχει αντίστοιχο επίπεδο συνδυαστικό.
- <u>Θεώρημα:</u> Ο γεωμετρικός του γεωμετρικού είναι ο αρχικός $(G^*)^* = G$.

Δυαδικότητα

- Θεώρημα: Ένας γράφος είναι επίπεδος αν έχει συνδυαστικό δυαδικό.

- Αυτοδυαδικός K_4



Άλλα Κριτήρια Επιπεδικότητας

- Εκτός από το Θεώρημα Euler και το Θεώρημα Kuratowski υπάρχουν άλλα δύο κριτήρια.

- Πλήρες σύνολο βασικών κύκλων S (complete set of basic circuits) είναι ένα σύνολο κύκλων όπου:
  - Κάθε κύκλος του συνόλου S μπορεί να εκφρασθεί ως άθροισμα δακτυλίου μερικών ή όλων των κύκλων του συνόλου S, και
  - Κανείς κύκλος του συνόλου S δεν μπορεί να εκφρασθεί ως άθροισμα δακτυλίου άλλων κύκλων εκτός S

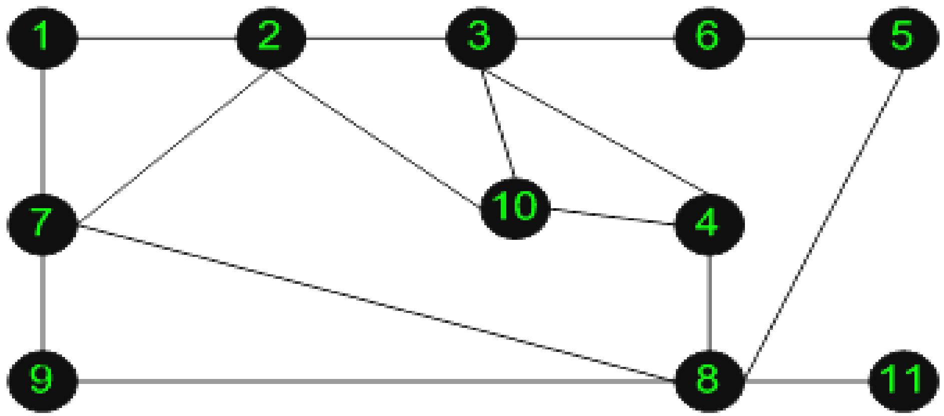
- Θεώρημα (MacLane 1937): Ένας γράφος είναι επίπεδος αν και μόνον αν υπάρχει ένα πλήρες σύνολο βασικών κύκλων S, τέτοιο ώστε καμιά ακμή του γράφου να μην εμφανίζεται σε περισσότερους από δύο κύκλους του S.

Άλλα Κριτήρια Επιπεδικότητας

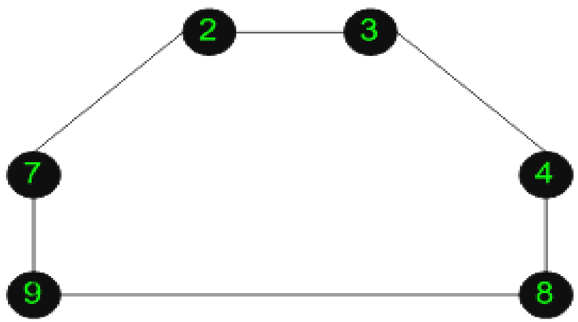
- Τα τρία θεωρήματα δεν δίνουν αποτελεσματικούς αλγόριθμους ούτε επίπεδες αναπαραστάσεις.
- Έστω γράφος G και υπογράφος G_1. Ένα <u>κομμάτι</u> (piece) P ονομάζεται <u>σχετικό</u> (relative) προς το γράφο G_1 αν είναι:
  - Μια ακμή e που δεν ανήκει στον G_1 αλλά ανήκουν οι κορυφές της.
  - Μια συνδεδεμένη συνιστώσα του $G-G_1$ συν οποιεσδήποτε ακμές προσπίπτουσες σε κορυφές της συνιστώσας.
- Ένα κομμάτι με δύο κοινές κορυφές λέγεται <u>τμήμα</u> (segment).
- Δύο τμήματα είναι <u>ασυμβίβαστα</u> (incompatible) αν τέμνονται ενσωματούμενα στην ίδια περιοχή του G_1

Άλλα Κριτήρια Επιπεδικότητας

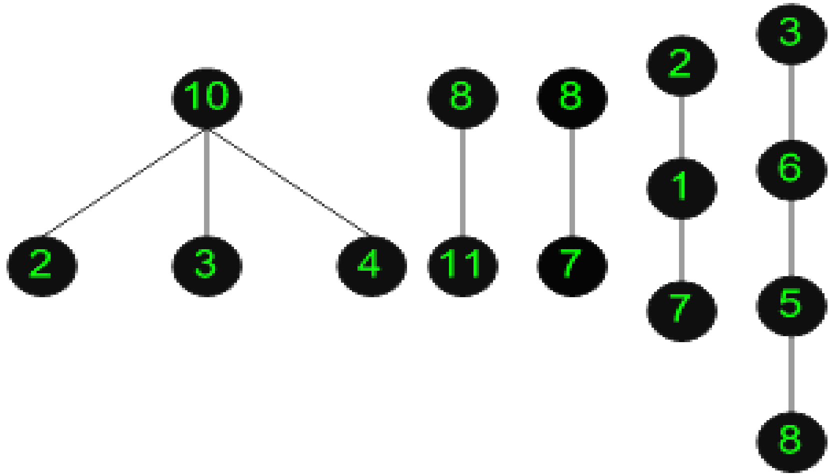
- Ο <u>βοηθητικός</u> (auxiliary) γράφος έχει κορυφές που αντιστοιχούν στα ασύμβατα τμήματα και ακμές που ενώνουν τις κορυφές αν τα τμήματα είναι ασύμβατα.



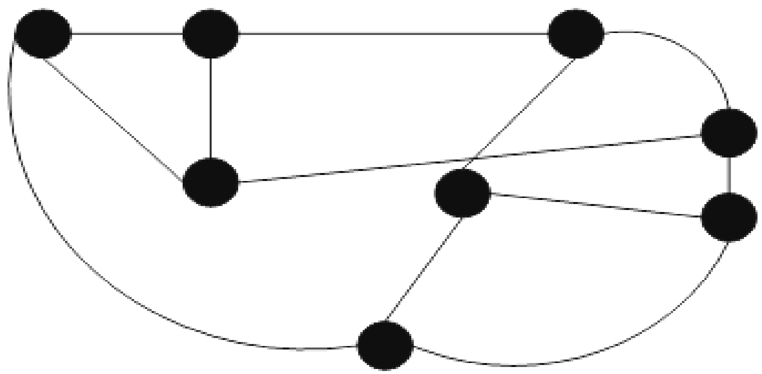
Άλλα Κριτήρια Επιπεδικότητας



κύκλος



κομμάτια
και
τμήματα



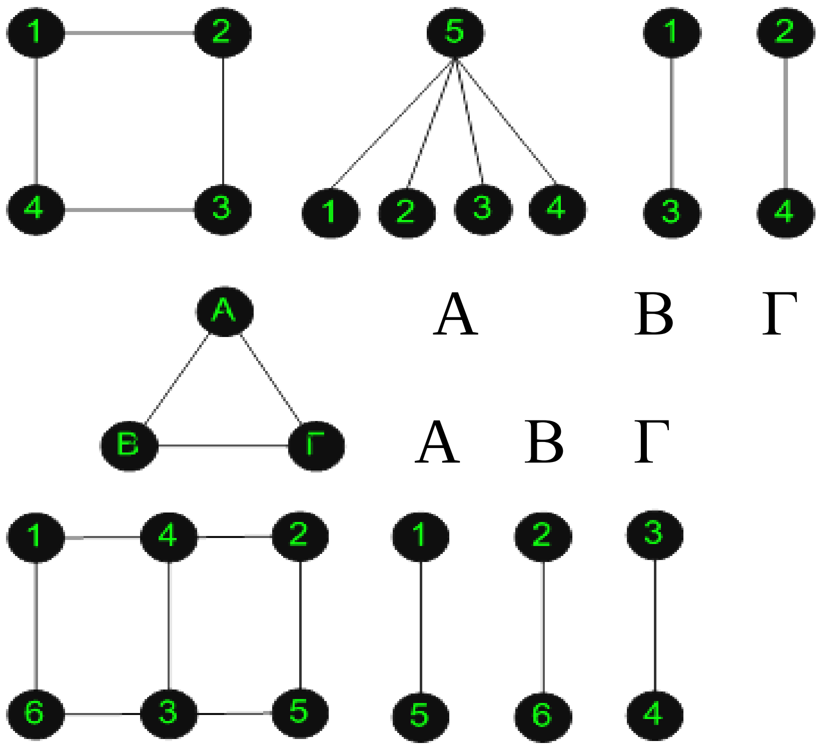
ασύμβατα

Άλλα Κριτήρια Επιπεδικότητας

- <u>Θεώρημα:</u> Ένας γράφος είναι επίπεδος, αν για κάθε κύκλο C του G ο βοηθητικός γράφος P(C) είναι διμερής.

K_5

$K_{3,3}$



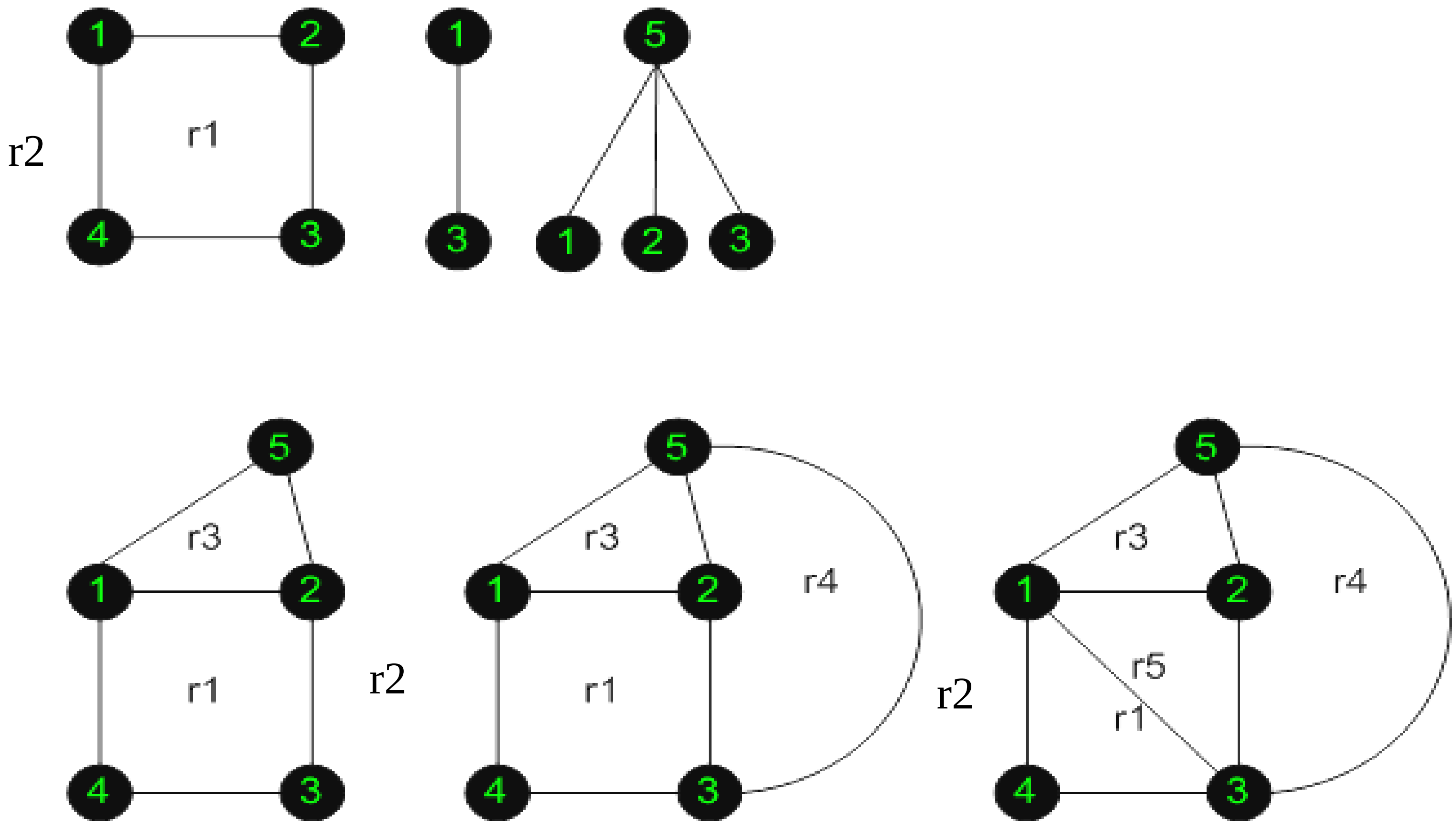
Αλγόριθμος Εύρεσης Επιπεδικότητας

- Demoucron, Malgrange, Peruiset 1964
- Προεπεξεργασία:
  1. Αν $n < 5$, $m < 9$, τότε ο γράφος είναι επίπεδος
  2. Αν $m > 3n-6$, τότε ο γράφος δεν είναι επίπεδος
  3. Θεωρούμε συνδεδεμένους γράφους
  4. Θεωρούμε 2-συνδεδεμένους γράφους (block)
  5. Θεωρούμε απλούς γράφους
  6. Παράγουμε ομοιομορφικούς γράφους χωρίς κορυφές βαθμού 2

Αλγόριθμος Εύρεσης Επιπεδικότητας

- Στρατηγικού αλγορίθμου DMP: να βρούμε μια ακολουθία ενσωματώσιμων υπογράφων σταδιακά μεγαλύτερων, ξεκινώντας από έναν κύκλο και προσθέτοντας τμήματα.
- Με βάση τον κύκλο προκύπτουν τμήματα. Για κάθε τμήμα βρίσκουμε τον αριθμό των περιοχών που μπορεί να ενσωματωθεί. Αν κάποιο τμήμα ενσωματώνεται σε μία μόνο περιοχή, τότε έχει προτεραιότητα. Σε περίπτωση ισοπαλίας, τότε διαλέγουμε στην τύχη. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται το πολύ m-n+1 φορές.

Αλγόριθμος Εύρεσης Επιπεδικότητας



Αλγόριθμος Εύρεσης Επιπεδικότητας

- Ο αλγόριθμος DMP έχει πολυπλοκότητα $O(n^4)$. Υπάρχει και ο αλγόριθμος Hopcroft-Tarjan (1974) με πολυπλοκότητα $O(n)$ που στηρίζεται στον dfs, αλλά είναι σύνθετος.