Θεωρία Γραφημάτων

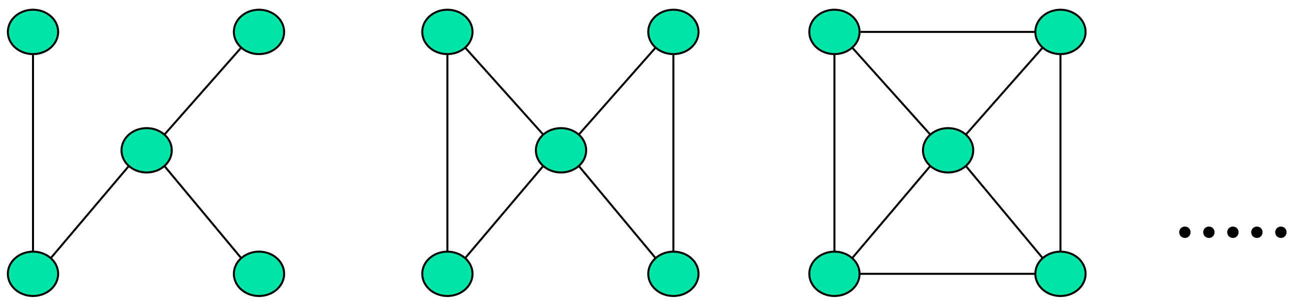
Θεμελιώσεις-Αλγόριθμοι-Εφαρμογές

Ενότητα 5

ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑ

Συνεκτικότητα

- Έννοια της συνδεσμικότητας: «Ποσότητα συνδεσμικότητας»



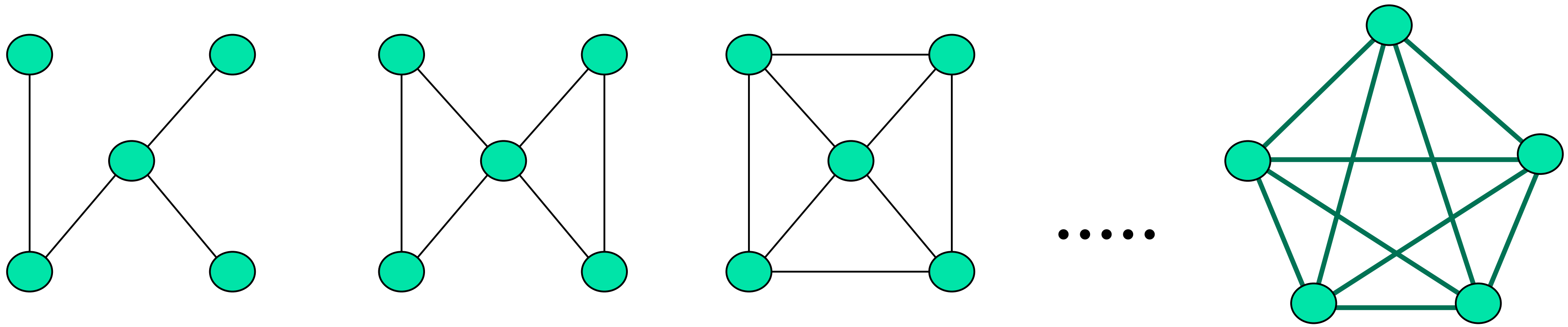
- Δένδρο T
- κόμβοι τομής
- ακμή τομής

- Γράφημα G
- ?
- ?

- Γράφημα H
- ?
- ?

Συνεκτικότητα

- Έννοια της συνδεσμικότητας: «Ποσότητα συνδεσμικότητας»



• δένδρο T
• κόμβοι τομής
• ακμή τομής

• Γράφημα G
• ?
• ?

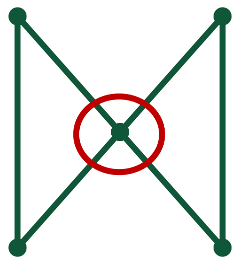
• Γράφημα H
• ?
• ?

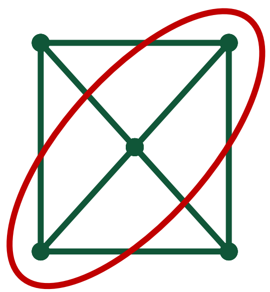
" Πολύ Καλά Συνδεδεμένο "

Συνεκτικότητα Κόμβων

- <u>Σύνολο κόμβων τομής ενός συνεκτικού γραφήματος G=(V,E)</u>

Ένα σύνολο $V' \subseteq V$ είναι σύνολο κόμβων τομής, εάν το γράφημα $G - V'$ είναι μη συνεκτικό, χωρίς να υπάρχει γνήσιο υποσύνολο του V' με την ίδια ιδιότητα



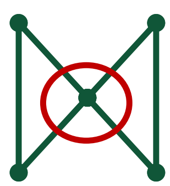


-- vertex cut set, vertex separating set.

Συνεκτικότητα Κόμβων

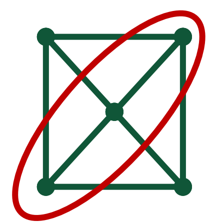
- Συνδεσμικότητα κόμβων VC(G) ενός γραφήματος G είναι το ελάχιστο k = |V′|, ώστε το γράφημα G να έχει ένα σύνολο V′ με k κόμβους τομής (vertex connectivity).

- Ένα γράφημα G λέγεται k-συνδεδεμένο αν VC(G) ≥ k.
  - k-συνδεδεμένο ⟺ η διαγραφή k κόμβων δημιουργεί μη συνεκτικό γράφημα.



1-συνδεδεμένο

(1-συνεκτικό)

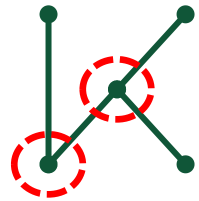


3-συνδεδεμένο

(3-συνεκτικό)

Συνεκτικότητα Κόμβων

- <u>Θεώρημα:</u> Ένας κόμβος *v* ενός δένδρου T είναι κόμβος τομής αν και μόνον αν **d(*v*) > 1**.



- Τετριμμένο γράφημα
- Μη συνεκτικό γράφημα

VC(G) = 0, αλλιώς VC(G) $\geq$ 1

Συνεκτικότητα Κόμβων

⇒ $\boxed{\text{Ένας κόμβος } v \text{ ενός δέντρου } T \text{ είναι κόμβος τομής εάνν } d(v)>1}$

Απόδειξη:

Εάν $d(v)=0 \Rightarrow G=K_1 \Rightarrow v$ δεν είναι κόμβος τομής.

Εάν $d(v)=1 \Rightarrow G-v$ είναι δένδρο $\Rightarrow$ # συνεκτικών συνιστωσών του $G-v$ = # συν. συν. του $G=1$

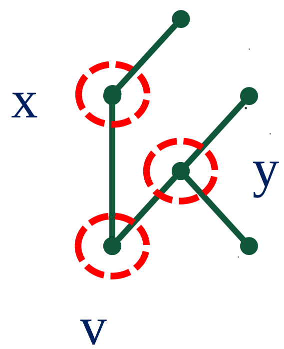
⇒ ο κόμβος v δεν είναι κόμβος τομής.

Εάν $d(v)>1 \Rightarrow$ Έστω x, y γειτονικοί κόμβοι του v.

Τότε το μονοπάτι $P=(x,v,y)$ είναι το μοναδικό μονοπάτι που συνδέει τους κόμβους x και y.

⇒ ∄ μονοπάτι $x \to y$ στο γράφημα $G-v$

⇒ ο κόμβος v είναι κόμβος τομής



Συνεκτικότητα Κόμβων

- Πόρισμα: Κάθε απλό συνδεδεμένο γράφημα έχει τουλάχιστον 2 κόμβους που δεν είναι κόμβοι τομής.

• Απόδειξη Πορίσματος:

G έχει ένα τουλάχιστον συνεκτικό δένδρο T ⇒ T έχει 2 κόμβους βαθμό 1.

Έστω v : $d(v) = 1$ ⇒ $T - v$ αποτελείται από 1 συνιστώσα.

Επειδή $T - v$ είναι συνεκτικό υπόγραφο του $G - v$ ⇒ # συνιστωσών $G - v$ $= 1$

Επομένως ο κόμβος v δεν είναι κόμβος τομής. ∃ δύο τέτοιοι κόμβοι ⇒ ...

Συνεκτικότητα Κόμβων

- <u>Θεώρημα:</u> Ένας κόμβος *v* είναι κόμβος τομής εάν-ν υπάρχουν 2 κόμβοι *u* και *w* (*u*, *w* ≠ *v*), ώστε ο κόμβος *v* να βρίσκεται σε κάθε μονοπάτι από τον *u* προς τον *w*.

(⇐) Αντίφαση, έστω ∃ u,w στο G: ο κόμβος v να βρίσκεται σε κάθε μονοπάτι u-w.
Άρα ∄ u-w στο G-v ⇒ το G-v δεν είναι συνδεδεμένο ⇒ v κόμβος τομής

(⇒) v κόμβος τομής.
Αν u,w κόμβοι σε διαφορετικές συν. του G-v ⇒ ∄ μονοπάτια από u προς w στο G-v.

Το G συνεκτικό ⇒ ∃ τέτοια μονοπάτια στο G.

Άρα v βρίσκεται σε κάθε τέτοιο μονοπάτι.

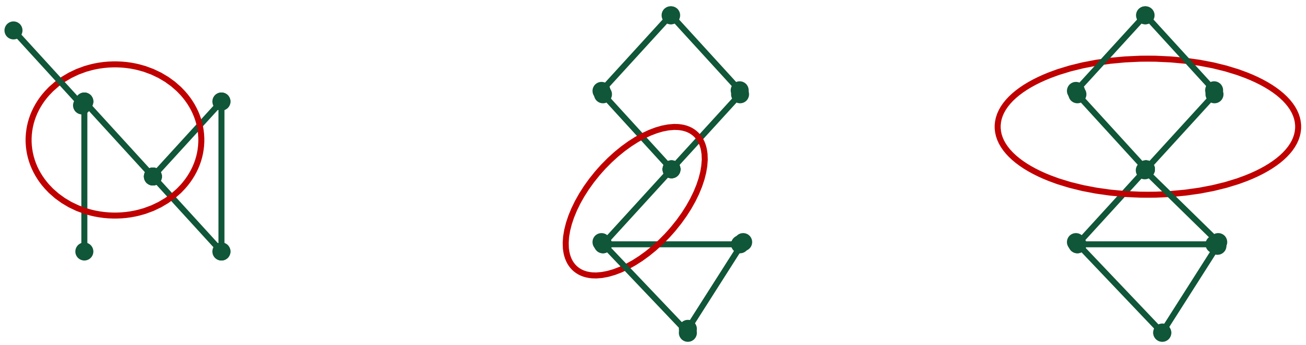
Συνεκτικότητα Ακμών

- Σύνολο ακμών τομής ενός συνεκτικού γραφήματος G=(V,E)

Ένα σύνολο $E' \subseteq E$ είναι σύνολο ακμών τομής, εάν

το γράφημα G - E′ είναι μη συνεκτικό, χωρίς να υπάρχει γνήσιο υποσύνολο του E′ με την ίδια ιδιότητα

-- edge cut set, edge separating set.



Συνεκτικότητα Ακμών

- Συνδεσμικότητα ακμών EC(G) ενός γραφήματος G είναι το ελάχιστο k = | E′ |, ώστε το γράφημα G να έχει ένα σύνολο από k ακμές τομής (edge connectivity)

- Ένα γράφημα G λέγεται k-συνδεδεμένο ως προς τις ακμές αν $EC(G) \geq k$

- Θεώρημα: Μια ακμή e είναι ακμή τομής αν και μόνον αν υπάρχουν 2 κόμβοι u και w, τέτοιοι ώστε η ακμή e να βρίσκεται σε κάθε μονοπάτι από τον κόμβο u προς στον w.

e ακμή τομής $\iff \exists\, u,w :$ $u \to \cdots \to x \to y \to \cdots \to w$

$e=(x,y)$

Συνεκτικότητα Ακμών

Θεώρημα: Η ακμή e είναι ακμή τομής εάν–ν δεν είναι ακμή κύκλου.

(⇒) Έστω e ακμή τομής στο G. Επειδή # σ.σ του $G-e$ > # σ.σ του G

⇒ ∃ κόμβοι x, y που συνδέονται στο G αλλά όχι στο $G-e$.

Άρα ∃ $P: x \rightsquigarrow y$ που περνά από την e.

Έστω $e=(u,v)$ και $P: x \to \cdots \to u \xrightarrow{e} v \to \cdots \to y$

Στο γράφημα $G-e$, ο κόμβος x συνδέεται με τον u μέσω του P, το ίδιο ισχύει για τους κόμβους v και y.

Αν e ανήκει σε κύκλο C, ⇒ u, v θα συνδέονται με το μονοπάτι $C-e$ στο γράφημα $G-e$.

Άρα οι κόμβοι x, y θα συνδέονται με μονοπάτι στο γράφημα $G-e$, άτοπο.

Συνεκτικότητα Ακμών

Θεώρημα: συνέχεια απόδειξης...

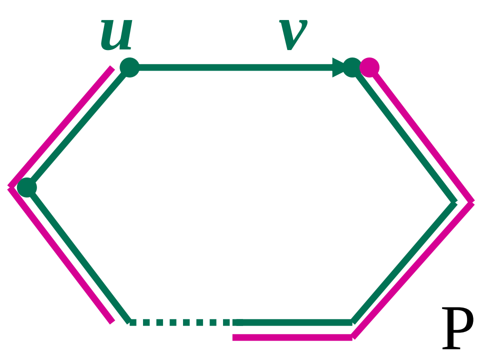
(⇐) Αντίστροφα, έστω η ακμή $e=(u,v)$ δεν είναι ακμή τομής του G. $\Rightarrow$

σ.σ του $G-e$ $=$ # σ.σ του G.

Αφού στο G $\exists$ 1 μονοπάτι από u στο v $\Rightarrow$ τα $u, v \in$ ίδια συνιστώσα του G και $G-e$.

Άρα στο $G-e$ $\exists$ P από u στο v.

Τότε η ακμή $e=(u,v)$ ανήκει στον κύκλο $P+e$ του G.



Συνεκτικότητα Ακμών

- <u>Θεώρημα:</u> Μια ακμή είναι ακμή τομής αν και μόνον αν δεν είναι ακμή κύκλου.

- <u>Θεώρημα Whitney:</u> $VC(G) \leq EC(G) \leq d(G)$.

- <u>Πόρισμα:</u> $EC(G) \leq$ floor(2m/n). $= \lfloor 2m/n \rfloor$

- <u>Θεώρημα:</u> Έστω $1 \leq l \leq n-1$. Αν $d(G) \geq (n+ l -2)/2$, τότε ο G είναι l-συνδεδεμένος.

(Chartrand - Harary, 1968)

Θεώρημα: Whitney, 1932

- Θεώρημα Whitney, 1932:

$$vc(G) \le EC(G) \le d(G)$$

- Περίπτωση: $EC(G) \le \lfloor \frac{2m}{n} \rfloor$

Ισχύει: $EC(G) \le d(G)$

Επίσης: $\sum_{v \in V} d(v) = 2m \Rightarrow n\,d(G) \le 2m$

$$\left.\begin{array}{l} EC(G) \le d(G) \\ n\,d(G) \le 2m \end{array}\right\} EC(G) \le \lfloor 2m/n \rfloor$$

Θεώρημα: Chartrand – Harary, 1968

Έστω G τάξης n και l ακέραιος, όπου $1 \le l \le n-1$.

Αν $\delta(G) \geq \frac{n+l-2}{2}$, τότε G είναι l-συνδεδεμένος.

Απόδειξη:

$\kappa(G) = n-1$

(i) $G = K_n \Rightarrow G$ $(n-1)$-συνδεδεμένος $\Rightarrow G$ είναι l-συνδεδεμένος.

(ii) $G \neq K_n$. Υποθέτουμε ότι G δεν είναι l-συνδεδεμένος. $\Rightarrow \exists$ σύνολο κορυφών S : $|S| = k < l$.

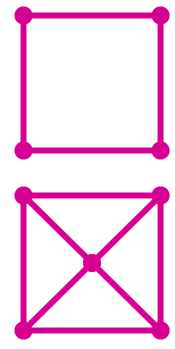
Έστω G_1 η συν. του $G - S$ με την μικρή τάξη.

Εφόσον $G - S$ είναι τάξης $n-k \Rightarrow G_1$ είναι το πολύ τάξης $\frac{n-k}{2}$.

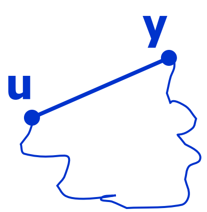
Αν $v \in G_1 \Rightarrow v$ γειτονεύει με άλλες κορυφές του G_1 και τις κορυφές του S.

Άρα $d(v) \le k + \frac{n-k}{2} - 1 = \frac{n+k-2}{2} < \frac{n+l-2}{2}$, άτοπο.

Τεμάχια Γραφημάτων

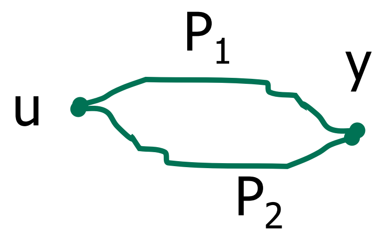


- Ένας <u>δισυνεκτικό</u> (biconnected) γράφημα δεν έχει κόμβους τομής. Ένα τέτοιο γράφημα αποτελεί ένα <u>τεμάχιο</u> (block) ή μια <u>δισυνιστώσα</u> (bicomponent).



Κάθε ακμή σε κύκλο

- <u>Εσωτερικά ξένα μονοπάτια</u> (internally disjoint paths) είναι δύο μονοπάτια με κοινούς τερματικούς κόμβους, χωρίς άλλες κοινούς κόμβους.



- <u>Θεώρημα Whitney:</u> Ένα γράφημα είναι δισυνεκτικό εάν-ν 2 οποιοιδήποτε κόμβοι του είναι συνδεδεμένοι με τουλάχιστον 2 εσωτερικά ξένα μονοπάτια.

Τεμάχια Γραφημάτων

- Πόρισμα: Αν ένα γράφημα ***G*** είναι δισυνεκτικό, τότε δύο οποιεσδήποτε κορυφές του ανήκουν σε έναν κύκλο.

- Πόρισμα: Αν ένα γράφημα ***G*** αποτελείται από ένα τεμάχιο με $n \geq 3$, τότε δύο οποιεσδήποτε ακμές του ανήκουν σε έναν κύκλο.

- Θεώρημα Menger: Ο μέγιστος αριθμός εσωτερικά ξένων μονοπατιών από ένα κόμβο u σε ένα κόμβο v ισούται με τον ελάχιστο αριθμό κόμβων που χωρίζουν τους κόμβους u και v.

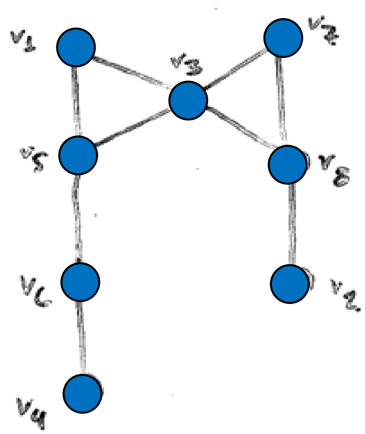
- Θεώρημα: Ένα γράφημα είναι k-συνδεδεμένο εάν-ν όλα τα ζεύγη κόμβων ενώνονται με τουλάχιστον k εσωτερικά ξένα μονοπάτια.

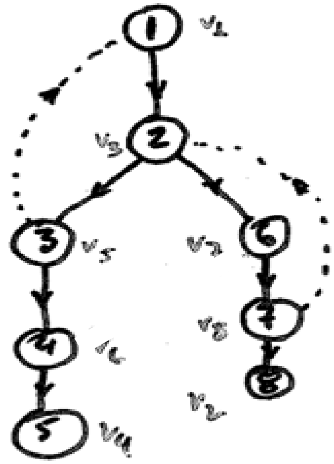
Αλγόριθμος Εύρεσης Τεμαχίων

Δύο παρατηρήσεις σχετικά με ένα κόμβο τομής *v*.

- Εάν ***v*** ρίζα DFS-δένδρου T, τότε ***v*** έχει δύο ή περισσότερα παιδία στο δένδρο T.

- Εάν ***v*** δεν είναι ρίζα DFS-δένδρου T, τότε ***v*** έχει ένα παιδί ***s***: κανένας απόγονος του ***s*** (συμπεριλαμβανομένου του ***s***) να συνδέεται με πρόγονο του ***v*** μέσω οπίσθιας ακμής.



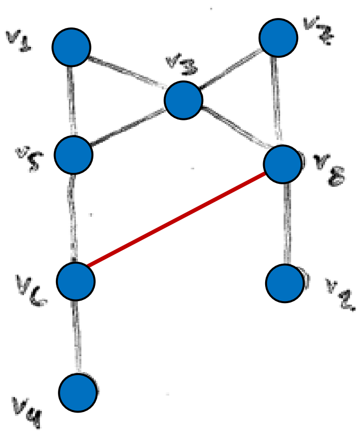


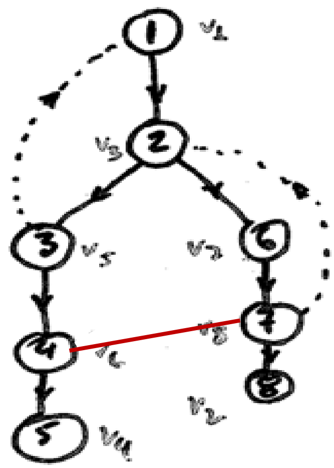
Αλγόριθμος Εύρεσης Τεμαχίων

Δύο παρατηρήσεις σχετικά με ένα κόμβο τομής *v*.

- Εάν ***v*** ρίζα DFS-δένδρου T, τότε ***v*** έχει δύο ή περισσότερα παιδία στο δένδρο T.

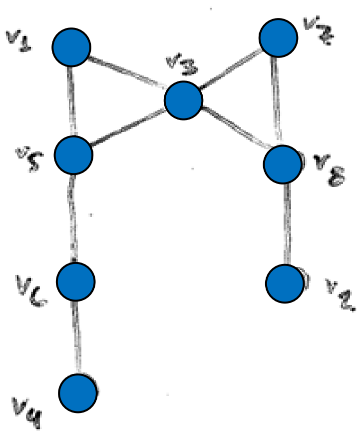
- Εάν ***v*** δεν είναι ρίζα DFS-δένδρου T, τότε ***v*** έχει ένα παιδί ***s***: κανένας απόγονος του ***s*** (συμπεριλαμβανομένου του ***s***) να συνδέεται με πρόγονο του ***v*** μέσω οπίσθιας ακμής.

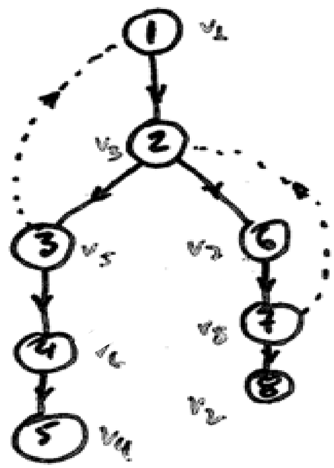




Αλγόριθμος Εύρεσης Τεμαχίων

- BFS Moore-1959-χρήση ουράς.
- DFS Hopcroft-Tarjan-1973-χρήση στοίβας.
- Χρησιμοποιούνται για επίσκεψη κόμβων, εύρεση συνιστωσών, εύρεση αποστάσεων.





Αλγόριθμος Εύρεσης Τεμαχίων

Εύρεση κόμβων τομής με DFS.

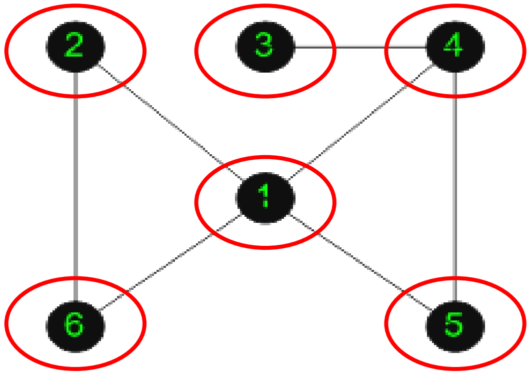
- Απαιτείται ο υπολογισμός δύο παραμέτρων: **dfi(*v*)** και ***l*(*v*)** για κάθε κόμβο ***v***.
- Η παράμετρος *l*(*v*) (από το lowpoint) είναι το ελάχιστο των τριών ποσοτήτων:

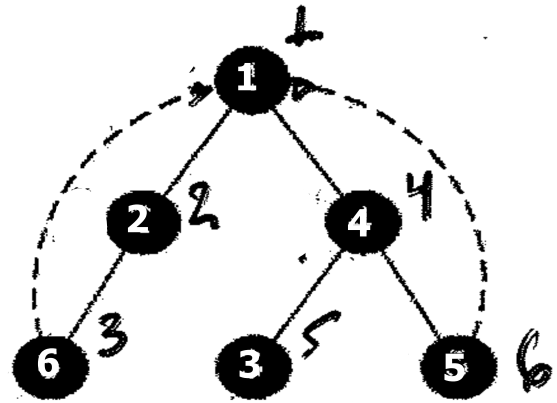
$$
l(v) = \min \begin{cases} \mathrm{dfi}(v) \\ l(s), \text{ όπου το } s \text{ είναι παιδί του κόμβου } v \\ \mathrm{dfi}(w), \text{ όπου } (v, w) \text{ είναι οπισθοακμή από τον κόμβο } v \end{cases}
$$

Αναδρομικός υπολογισμός της παραμέτρου *l*(*v*)

Αλγόριθμος Εύρεσης Τεμαχίων

- Ένας κόμβος v είναι κόμβος τομής αν:
  - Είναι ρίζα δένδρου και έχει περισσότερο από 1 παιδιά.
  - Δεν είναι ρίζα δένδρου, αλλά έχει ένα παιδί s : $\boxed{l(s) \geq dfi(v)}$





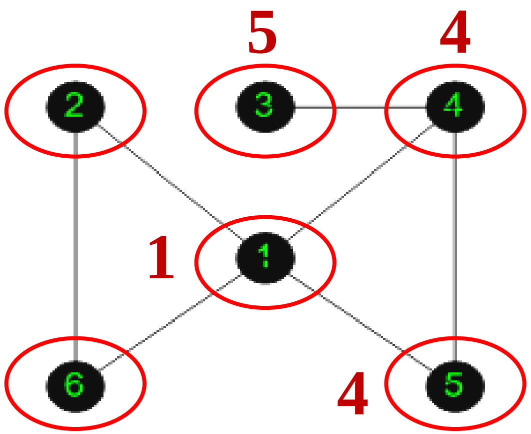
v	1	2	3	4	5	6
dfi	1	2	5	4	6	3
l						

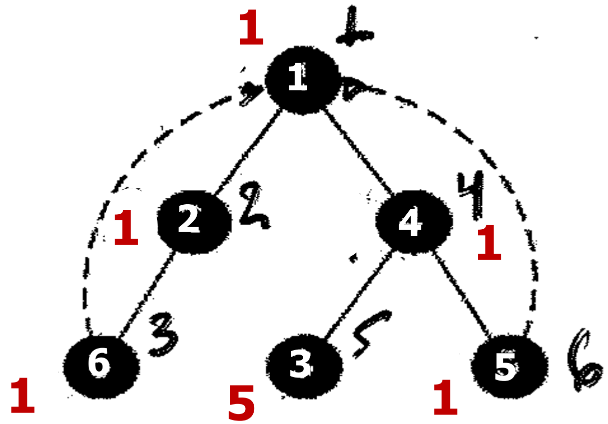
Αλγόριθμος Εύρεσης Τεμαχίων

- $$l(v)\ \begin{cases} \mathrm{dfi}(v) \\ l(s), \text{ όπου το } s \text{ είναι παιδί του κόμβου } v \\ \mathrm{dfi}(w), \text{ όπου } (v, w) \text{ είναι οπισθοακμή από τον κόμβο } v \end{cases}$$

dfi(2) = 2

dfi(6) = 3

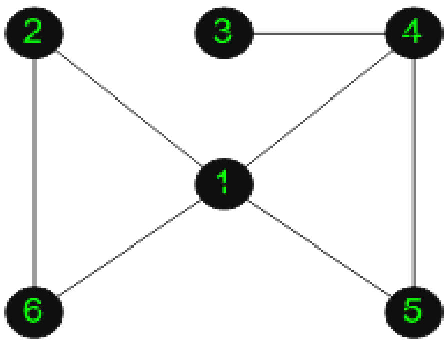


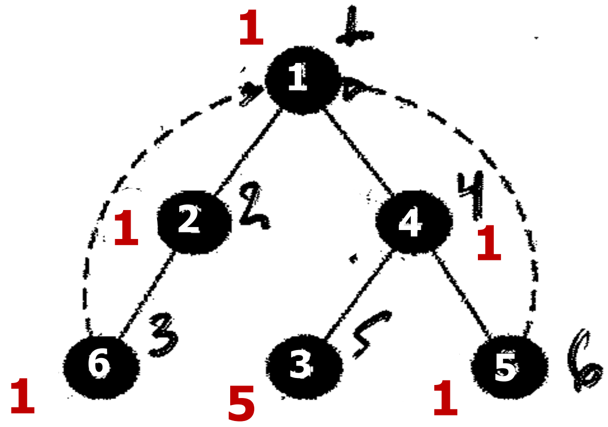


v	1	2	3	4	5	6
dfi	1	2	5	4	6	3
l						

Αλγόριθμος Εύρεσης Τεμαχίων

$$l(v) \begin{cases} \mathrm{dfi}(v) \\ l(s), \text{ όπου το } s \text{ είναι παιδί του κόμβου } v \\ \mathrm{dfi}(w), \text{ όπου } (v, w) \text{ είναι οπισθοακμή από τον κόμβο } v \end{cases}$$

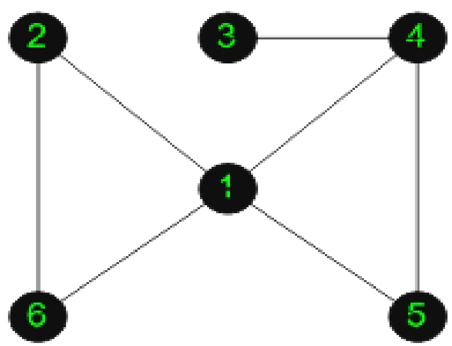


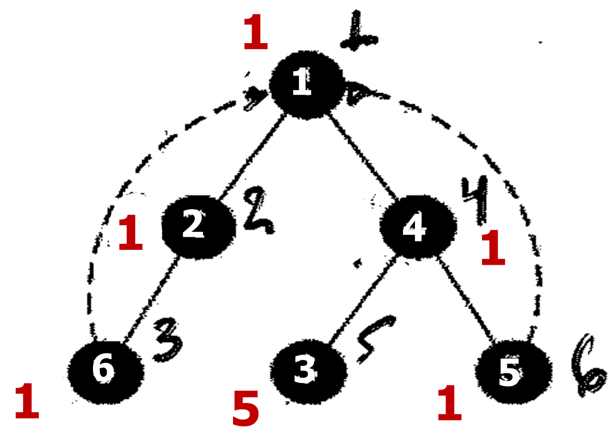


v	1	2	3	4	5	6
dfi	1	2	5	4	6	3
l	**1**	**1**	**5**	**1**	**1**	**1**

Αλγόριθμος Εύρεσης Τεμαχίων

- Ένας κόμβος *v* είναι κόμβος τομής αν:
  - Είναι ρίζα δένδρου και έχει περισσότερο από 1 παιδιά.
  - Δεν είναι ρίζα δένδρου, αλλά έχει ένα παιδί s : $\boxed{l(s) \geq \mathrm{dfi}(v)}$





v	1	2	3	4	5	6
dfi	1	2	5	4	6	3
l	**1**	**1**	**5**	**1**	**1**	**1**

v=4

dfi(4)=4

s= 3, 5

l(3) =5

l(5)=1

Αλγόριθμος Εύρεσης Τεμαχίων

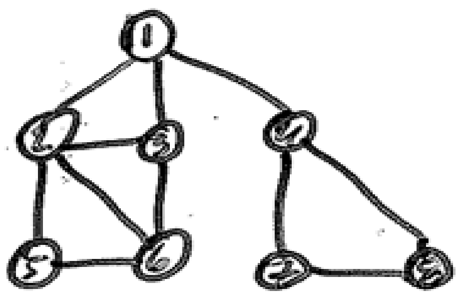
Παράδειγμα**:**

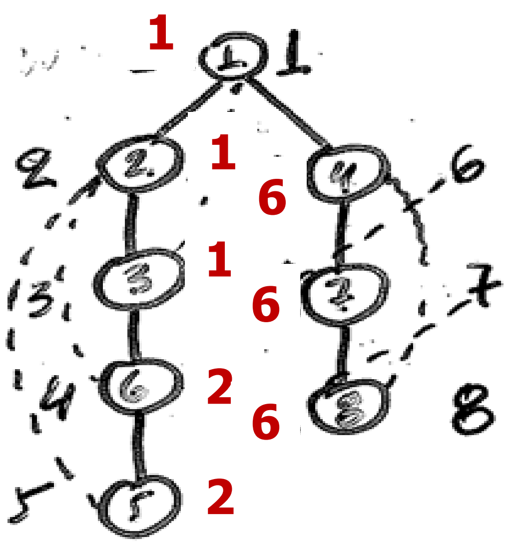
Κόμβος **6**: dfi(6) = 4 $l(5) = 2$ όχι

Κόμβος **4**: dfi(4) = 6 $l(7) = 6$ ναι

Κόμβος **7**: dfi(7) = 7 $l(8) = 6$ όχι

$l(s) \geq \mathrm{dfi}(v)$





— l(v)

— dfi(v)

— label

Κόμβοι Τομής - Θεώρημα

- Η ρίζα r ενός DFS δένδρου είναι κόμβος τομής $\Longleftrightarrow$ r έχει περισσότερα από ένα παιδιά στο DFS δένδρο.

Απόδειξη:

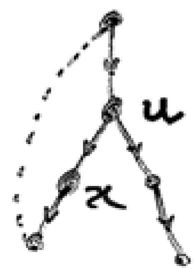
($\Leftarrow$) Εάν r έχει περισσότερα από ένα παιδιά $\Rightarrow$ G−r δεν είναι συνεκτικό (disconnected) διότι δεν υπάρχουν cross-edges στο DFS ενός μη-κατευθυνόμενου γραφήματος.

($\Rightarrow$) r ρίζα και είναι κόμβος τομής. Εάν r έχει μόνο ένα παιδί v τότε κάθε άλλος κόμβος u που ενώνεται με την ρίζα r είναι απόγονος του v $\Rightarrow$ εάν αφαιρέσουμε τον r το γράφημα παραμένει συνδεδεμένο, άτοπο.

Κόμβοι Τομής

Προσοχή!

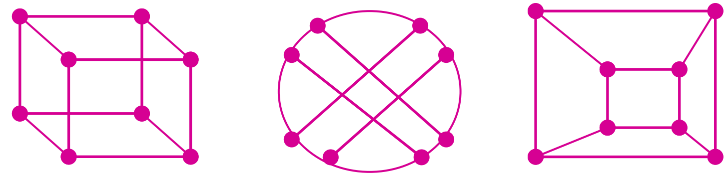
Ένας κόμβος u ≠ r είναι κόμβος τομής ⇔ δεν υπάρχει οπισθο-ακμή (back-edge) από κανένα απόγονο του u στο dfs δένδρο T σε κάποιο πρόγονό του.



u κόμβος τομής
και
∃ back-ακμή

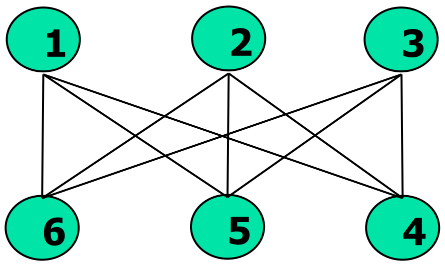
<u>Ισχύει:</u> ένας κόμβος u ≠ r είναι κόμβος τομής ⇔ ∃ παιδί u' του u στο DFS δένδρο: κανένας απόγονος του u' (συμπεριλαμβανομένου και του u') να έχει back-ακμή σε πρόγονο του u στο DFS δένδρο.

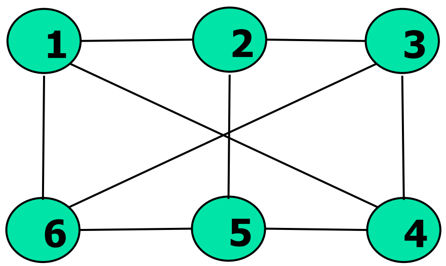
Ισομορφισμός



- $G = (V, E)$ και $G' = (V', E')$
  είναι isomorphic, το συμβολίζουμε $G \cong G'$,
  εάν $\exists$ 1-1 και επί $f: V \to V'$:

$$(x, y) \in E \iff (f(x), f(y)) \in E' \quad \forall x, y \in V$$

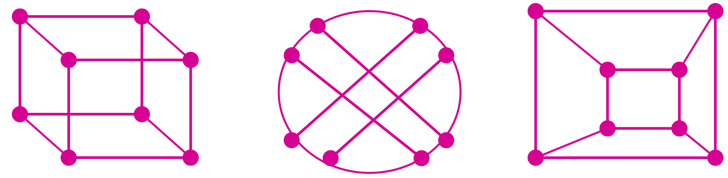




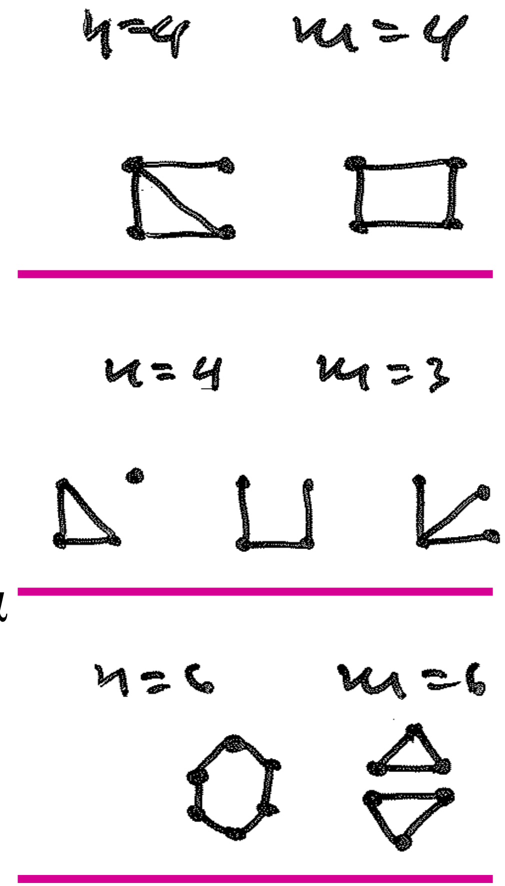
- 1, 2, 3, 4, 5, 6
- 1, 5, 3, 4, 2, 6

$(2,6) \in E \iff (5, 6) \in E'$

Ισομορφισμός

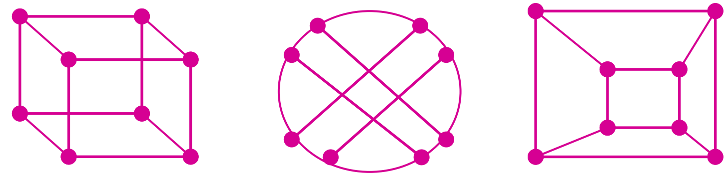


- Τεχνάσματα για την εύκολη διαπίστωση αν δύο γραφήματα δεν είναι ισομορφικά:
  1. Ίδια τάξη
  2. Ίδιο μέγεθος
  3. Ίδια ακολουθία βαθμών
  4. Ίδιος αριθμός συνιστωσών
  5. Για κάθε συνιστώσα του (4) απαντώνται θετικά οι πρώτες τρεις ερωτήσεις;
  6. Έχουν οι δύο γράφοι το ίδιο χρωματικό πολυώνυμο;



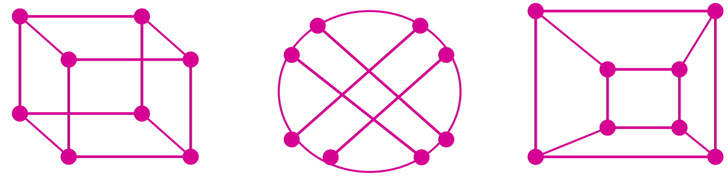
- Για n < 8, αν όλες οι ερωτήσεις απαντηθούν θετικά, τότε τα γραφήματα είναι ισομορφικά.

Ισομορφισμός



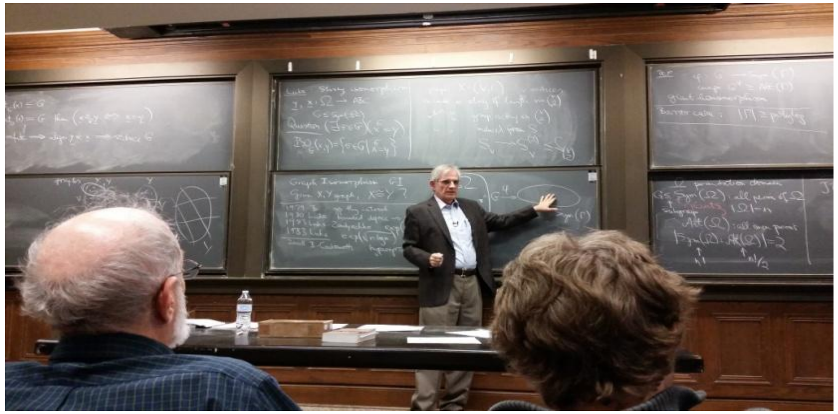
- Δεν υπάρχει αποτελεσματικός αλγόριθμος για τη διαπίστωση της ισομορφικότητας δύο γραφημάτων.
- Πρώτη λύση (η χειρότερη): Κρατούμε το ένα γράφημα σταθερό και αναδιατάσσουμε τους κόμβους του άλλου. Εκτελούμε n^2 συγκρίσεις. Άρα η πολυπλοκότητα είναι τάξης $O(n!n^2) = O(n^n)$.
- Δεύτερη λύση: Αν το γράφημα είναι αποθηκευμένο με πίνακα πρόσπτωσης, τότε αρκεί ο πίνακας του ενός γραφήματος να μετατραπεί στον πίνακα του άλλου με τη βοήθεια αντιμεταθέσεων γραμμών ή/και στηλών.
- Υπάρχουν αποτελεσματικοί αλγόριθμοι για ειδικές κατηγορίες γραφημάτων.

Ισομορφισμός

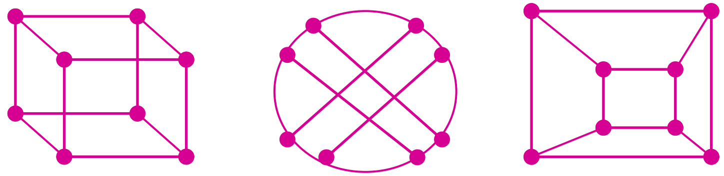


November 10, 1015 !!!

New algorithm cracks graph problem

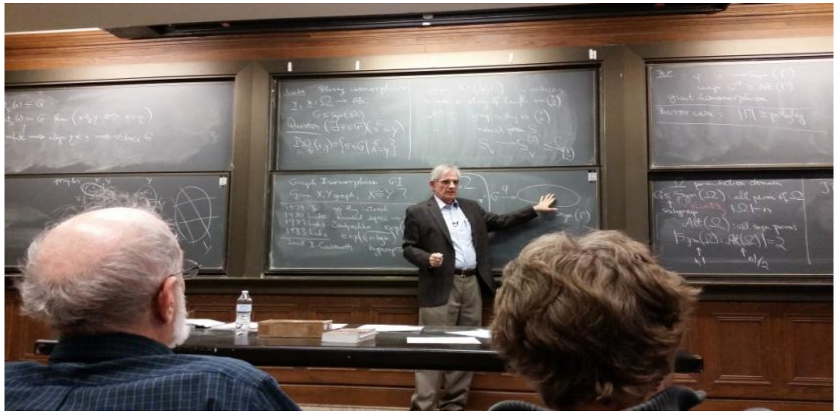


Ισομορφισμός



A Quasipolynomial Time Algorithm for Graph Isomorphism

November 12, 2015



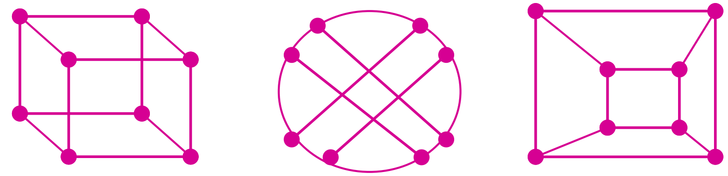
László Babai

November 10

Combinatorics and Theoretical Computer Science seminar

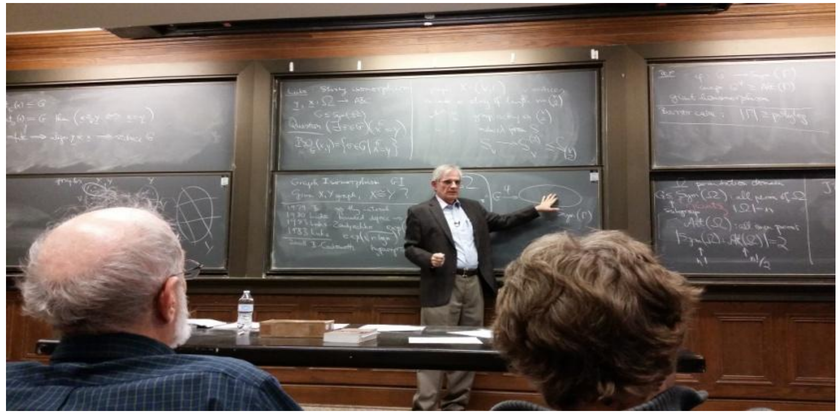
University of Chicago

Ισομορφισμός



A Quasipolynomial Time Algorithm for Graph Isomorphism

November 12, 2015



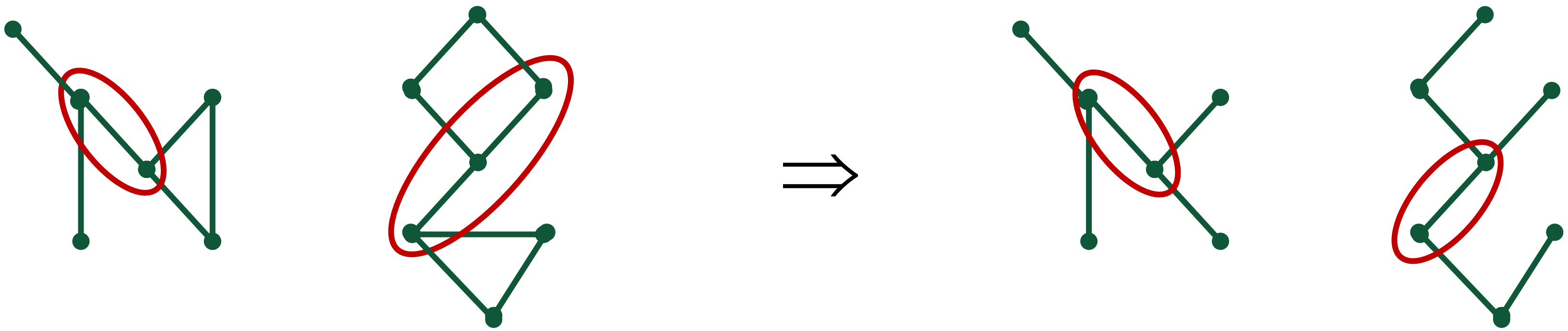
László Babai

Theorem: There is a deterministic algorithm for GI which runs in time $2^{O(\log^c(n))}$ for some constant c.

Γενικευμένο Πρόβλημα Συνδέσμου

- Το πρόβλημα του συνδέσμου είναι το γνωστό πρόβλημα της εύρεσης των ελάχιστων ζευγνυόντων (σκελετικών ή γενετικών) δένδρων.

- Ένα ελάχιστο ζευγνύον δένδρο έχει συνεκτικότητα κόμβων/ακμών ίση με 1 (για $n \geq 3$).

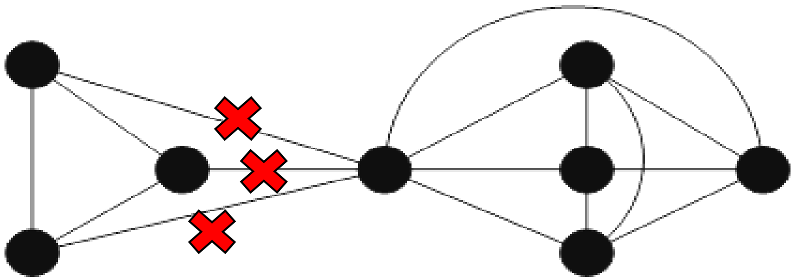


Γενικευμένο Πρόβλημα Συνδέσμου

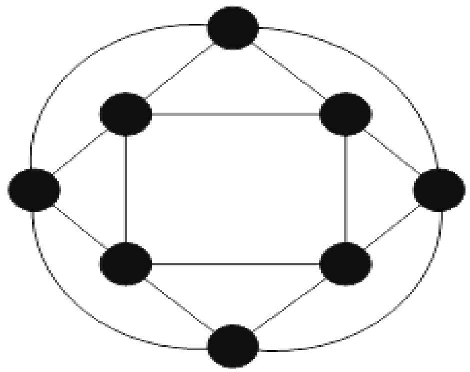
- Το γενικευμένο πρόβλημα του συνδέσμου:

  <u>Δοθέντος ενός γραφήματος, να βρεθεί το υπογράφημα ελάχιστου βάρους ώστε η συνεκτικότητα να ισούται με *l*.</u>

  Αν $l = 1$, τότε τα προβλήματα ταυτίζονται (εύρεση σκελετικού δένδρου και γενικευμένο πρόβλημα).



$VC(G) = 1 \quad EC(G) = 3$



Πιο αξιόπιστο

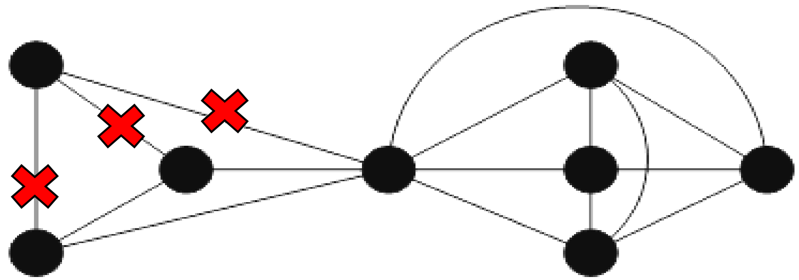
$VC(H) = EC(H) = 4$

Γενικευμένο Πρόβλημα Συνδέσμου

- Το γενικευμένο πρόβλημα του συνδέσμου:

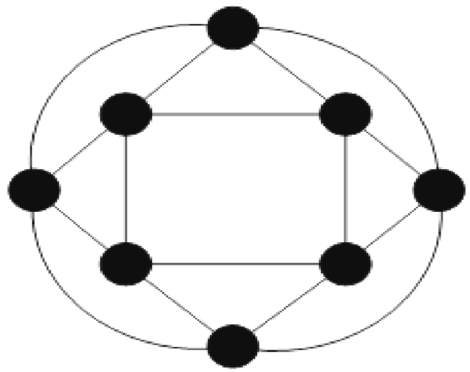
  <u>Δοθέντος ενός γραφήματος, να βρεθεί το υπογράφημα ελάχιστου βάρους ώστε η συνεκτικότητα να ισούται με *l*.</u>

  Αν $l = 1$, τότε τα προβλήματα ταυτίζονται (εύρεση σκελετικού δένδρου και γενικευμένο πρόβλημα).



$VC(G) = 1 \quad EC(G) = 3$

Πιο αξιόπιστο



$VC(H) = EC(H) = 4$

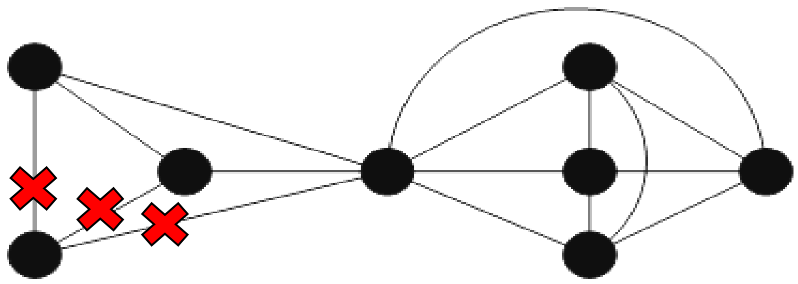
Γενικευμένο Πρόβλημα Συνδέσμου

- Το γενικευμένο πρόβλημα του συνδέσμου:

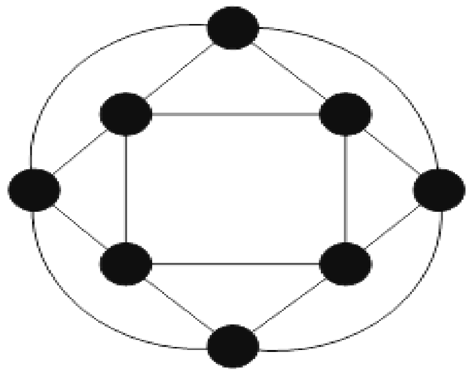
  Δοθέντος ενός γραφήματος, να βρεθεί το υπογράφημα ελάχιστου βάρους ώστε η συνεκτικότητα να ισούται με *l*.

  Αν $l = 1$, τότε τα προβλήματα ταυτίζονται (εύρεση σκελετικού δένδρου και γενικευμένο πρόβλημα).

Πιο αξιόπιστο



$\mathrm{VC}(G) = 1 \quad \mathrm{EC}(G) = 3$



$\mathrm{VC}(H) = \mathrm{EC}(H) = 4$

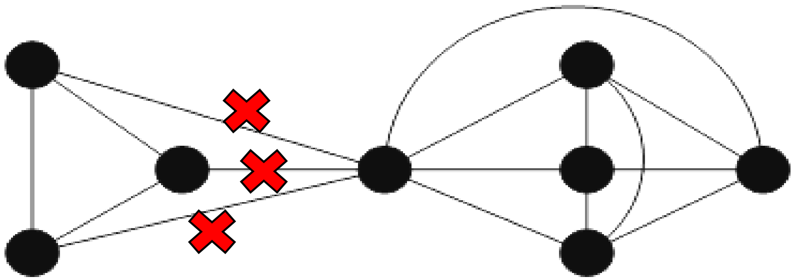
Γενικευμένο Πρόβλημα Συνδέσμου

- Το γενικευμένο πρόβλημα του συνδέσμου:

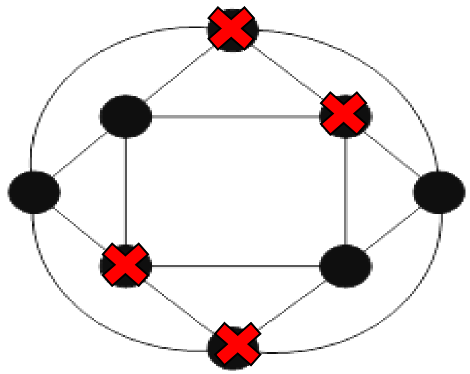
  <u>Δοθέντος ενός γραφήματος, να βρεθεί το υπογράφημα ελάχιστου βάρους ώστε η συνεκτικότητα να ισούται με *l*.</u>

  Αν $l = 1$, τότε τα προβλήματα ταυτίζονται (εύρεση σκελετικού δένδρου και γενικευμένο πρόβλημα).

Πιο αξιόπιστο



$VC(G) = 1 \quad EC(G) = 3$



$VC(H) = EC(H) = 4$

Γενικευμένο Πρόβλημα Συνδέσμου

- Έστω μη-έμβαρο πλήρες γράφημα G με *n* κόμβους.

  Πρόβλημα:

  Η εύρεση του υπογραφήματος $H_{l,n}$ του G (όχι κατ' ανάγκη επαγόμενου) με *n* κόμβους που είναι *l*-συνδεδεμένο και έχει τις λιγότερες δυνατόν ακμές.

- Ο αλγόριθμος έχει τρεις περιπτώσεις:
  - *l* άρτιο (l = 2r).
  - *l* περιττό (l = 2r+1), *n* άρτιο.
  - *l* περιττό (l = 2r+1), *n* περιττό.

Γενικευμένο Πρόβλημα Συνδέσμου

- Ο αλγόριθμος έχει τρεις περιπτώσεις:
  - *l* άρτιο (*l* = 2r):

    Το γράφημα $H_{2r,n}$ έχει κόμβους 0, 1, 2, …, n-1 και

    δύο κόμβοι **i** και **j** είναι γειτονικοί εάν διαφέρουν το πολύ **r** (mod n)

  - *l* περιττό (*l* = 2r+1), n άρτιο:

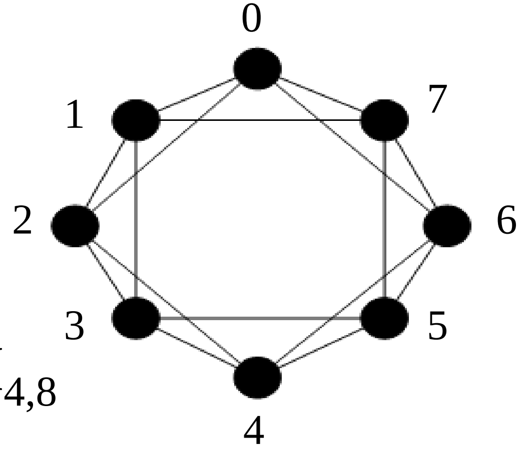
    Κατασκευάζεται το γράφημα $H_{2r+1,n}$ (εφαρμόζεται η προηγούμενη σχέση), ενώ επίσης ενώνονται οι κόμβοι **i** και **i+n/2**, για $1 \leq i \leq n/2$.

  - *l* περιττό (*l* = 2r+1), n περιττό:

    Κατασκευάζεται το γράφημα $H_{2r+1,n}$ (εφαρμόζεται η προηγούμενη σχέση), ενώ επίσης ενώνεται ο κόμβος **0** με τους **(n-1)/2** και **(n+1)/2** και τον κόμβο **i** με τον κόμβο **i+(n+1)/2**, για $1 \leq i \leq (n-1)/2$.

Γενικευμένο Πρόβλημα Συνδέσμου

- Θεώρημα: Το γράφημα $H_{l,n}$ είναι l-συνδεδεμένο.
- Θεώρημα: Ο ελάχιστος αριθμός ακμών του γραφήματος $H_{l,n}$ είναι $\lceil l \times n / 2 \rceil$.



$H_{4,8}$

l άρτιο (l = 4) => r = 2 και n = 8

Το γράφημα $H_{4,8}$ έχει κόμβους 0, 1, 2, …, 7 και δύο κόμβοι **i** και **j** είναι γειτονικοί εάν διαφέρουν το πολύ **r** (mod 8).

$(0,1) \in E$ διότι $|0 - 1| \leq 2$

$(0,2) \in E$ διότι $|0 - 2| \leq 2$

$(0,3) \notin E$ διότι $|0 - 3| \leq 2$

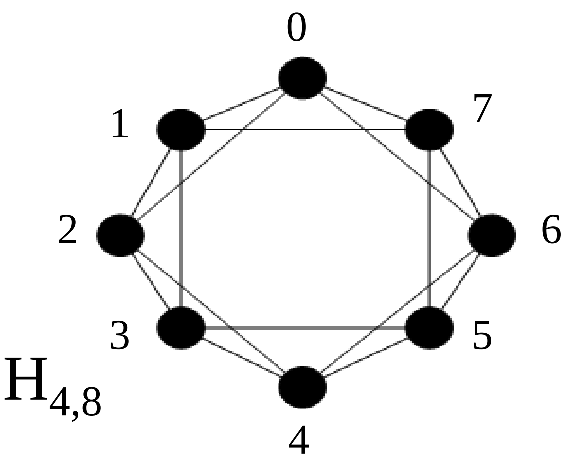
…

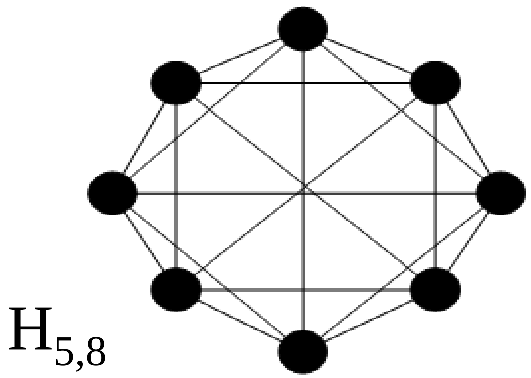
$(0,6) \in E$ διότι $|0 - 6| \leq 2$ (mod 8)

$(0,7) \in E$ διότι $|0 - 7| \leq 2$ (mod 8)

Γενικευμένο Πρόβλημα Συνδέσμου

- <u>Θεώρημα:</u> Το γράφημα $H_{l,n}$ είναι l-συνδεδεμένο.
- <u>Θεώρημα:</u> Ο ελάχιστος αριθμός ακμών του γραφήματος $H_{l,n}$ είναι $\lceil l \times n / 2 \rceil$.

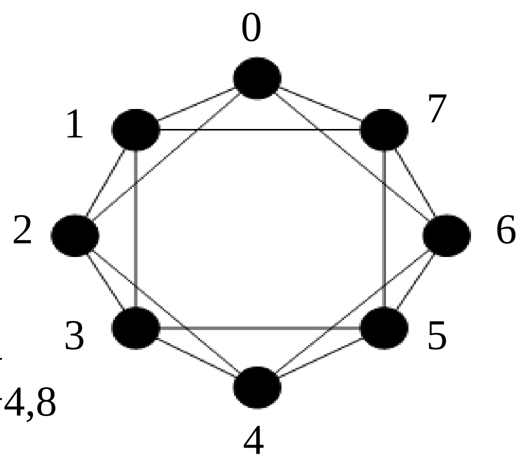




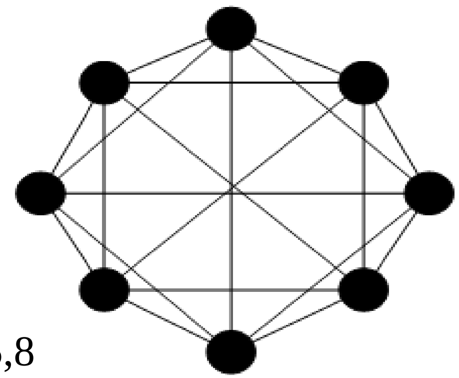
l περιττό (l = 2r+1), n περιττό:
Όπως πριν, και επίσης ενώνονται οι κόμβοι **i** και **i+n/2**, για $1 \le i \le n/2$.

Γενικευμένο Πρόβλημα Συνδέσμου

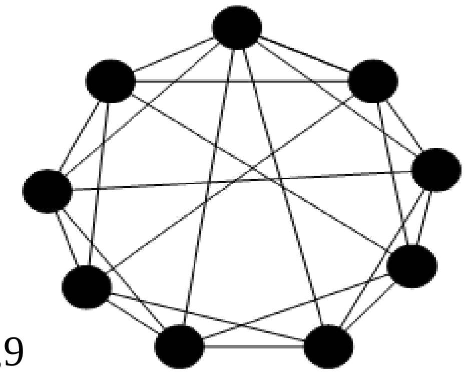
- <u>Θεώρημα:</u> Το γράφημα $H_{l,n}$ είναι *l*-συνδεδεμένο.
- <u>Θεώρημα:</u> Ο ελάχιστος αριθμός ακμών του γραφήματος $H_{l,n}$ είναι $\lceil l \times n / 2 \rceil$.



$H_{4,8}$



$H_{5,8}$



$H_{5,9}$

l περιττό (*l* = 2r+1), n άρτιο:
Όπως πριν, και επίσης ενώνονται ο κόμβος **0** με τους **(n-1)/2** και **(n+1)/2** και τον κόμβο **i** με τον κόμβο **i+(n+1)/2**, για $1 \le i \le (n-1)/2$.

Ε3 (*Ανακατασκευή Οδικού Δικτύου*)

Ε3

Η εταιρεία MS-Construction κατασκευής «οδικών δικτύων», ανέλαβε την ανακατασκευή του οδικού δικτύου ενός γεωγραφικού διαμερίσματος Δ ενός κράτους Κ, το οποίο καταστράφηκε ολοσχερώς.

Το γεωγραφικό διαμέρισμα Δ έχει n πόλεις, έστω

$$\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n \ (n \geq 1)$$

οι οποίες συνδέονται μεταξύ του **άμεσα** ή **έμμεσα** με οδούς διπλής κατεύθυνσης.

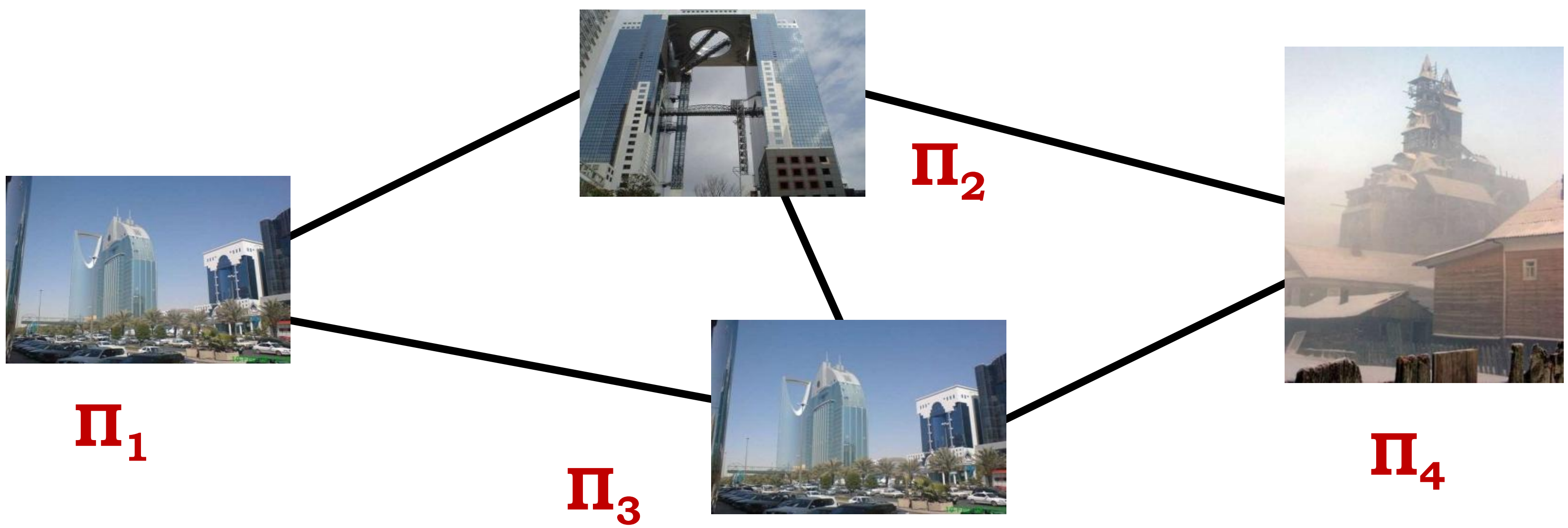
Ε3 (*Ανακατασκευή Οδικού Δικτύου*)

Ορισμός

- Η πόλη $Π_i$ συνδέεται **άμεσα** με την πόλη $Π_j$ εάν:

εάν υπάρχει οδός από την $Π_i$ στην $Π_j$ χωρίς να περνάει από κάποια

$1 \leq i, j \leq n$.



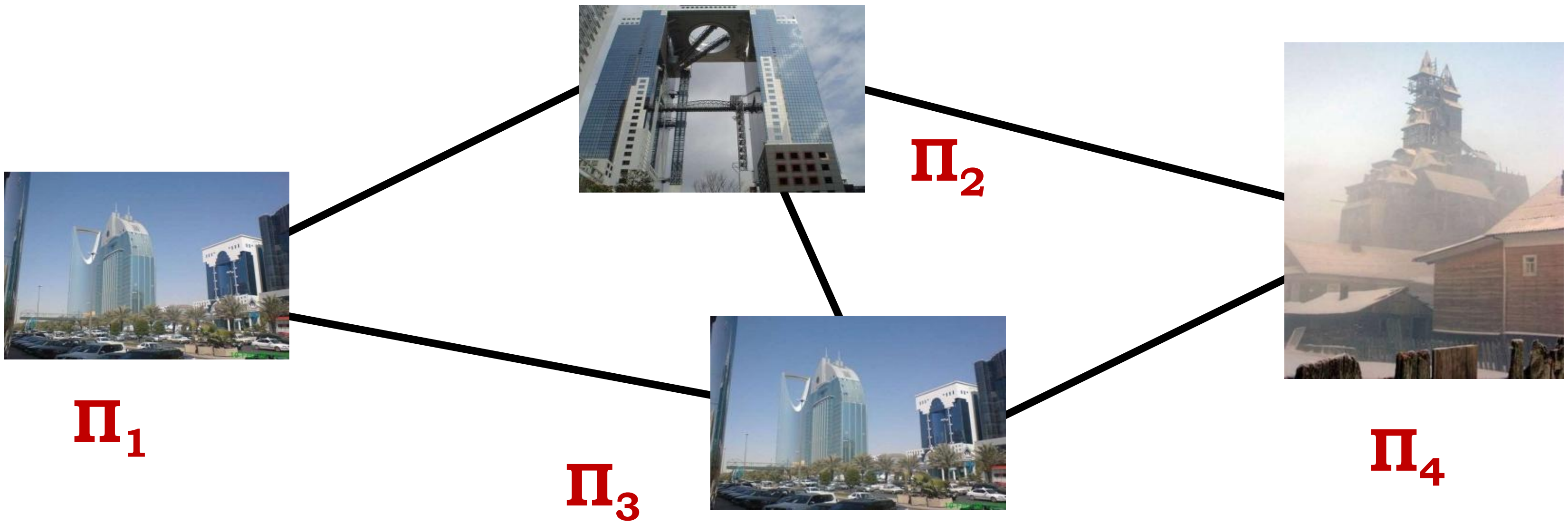
Ε3 (*Ανακατασκευή Οδικού Δικτύου*)

Ορισμός

- Η πόλη $Π_i$ συνδέεται **έμμεσα** με την πόλη $Π_j$ εάν:

η $Π_i$ συνδέεται με την $Π_j$ μέσω της $Π_k$

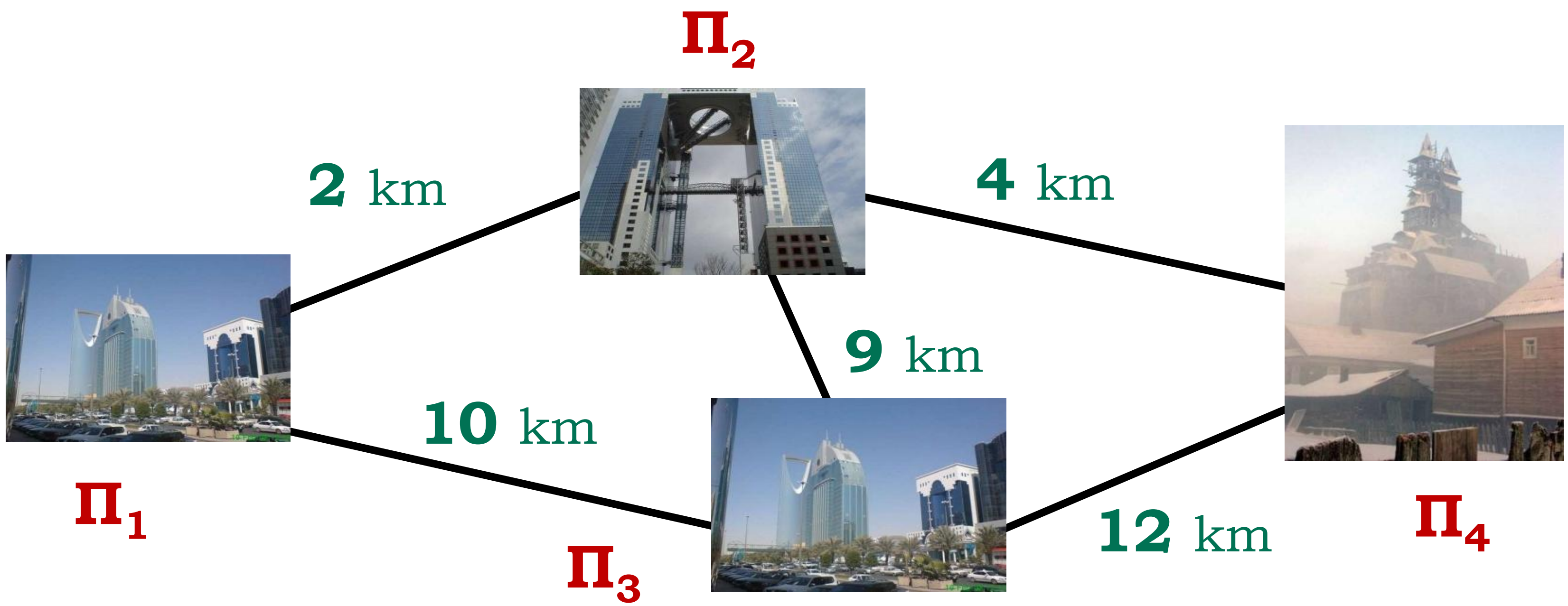
$1 \leq i, k, j \leq n$, ή γενικά μέσω κάποιας ακολουθίας πόλεων $\mathbf{X_{k1}, X_{k2}, \ldots, X_{kp}}$, $\mathbf{k_p \geq 1}$.



Ε3 (*Ανακατασκευή Οδικού Δικτύου*)

- Η εταιρεία MS-Construction όρισε την αμοιβή της ανά χιλιόμετρο, συγκεκριμένα 20.000 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο.

Σύνολο Χιλιομέτρων **37**



Ε3 (*Ανακατασκευή Οδικού Δικτύου*)

- Το κράτος Κ θέλει να αποκαταστήσει άμεσα μέρος, λόγω οικονομικών προβλημάτων, του οδικού δικτύου του διαμερίσματος Δ με τις παρακάτω τρεις προϋποθέσεις:

  (Α) Να υπάρχει οδική επικοινωνία μεταξύ όλων των πόλεων του διαμερίσματος Δ.

  (Β) Το κόστος που θα πληρώσει το κράτος στην MS-Construction να είναι το ελάχιστο δυνατό.

  (Γ) Η χιλιομετρική απόσταση της διαδρομής μεταξύ των δύο πόλεων Π_1 και Π_3 να είναι ελάχιστη.

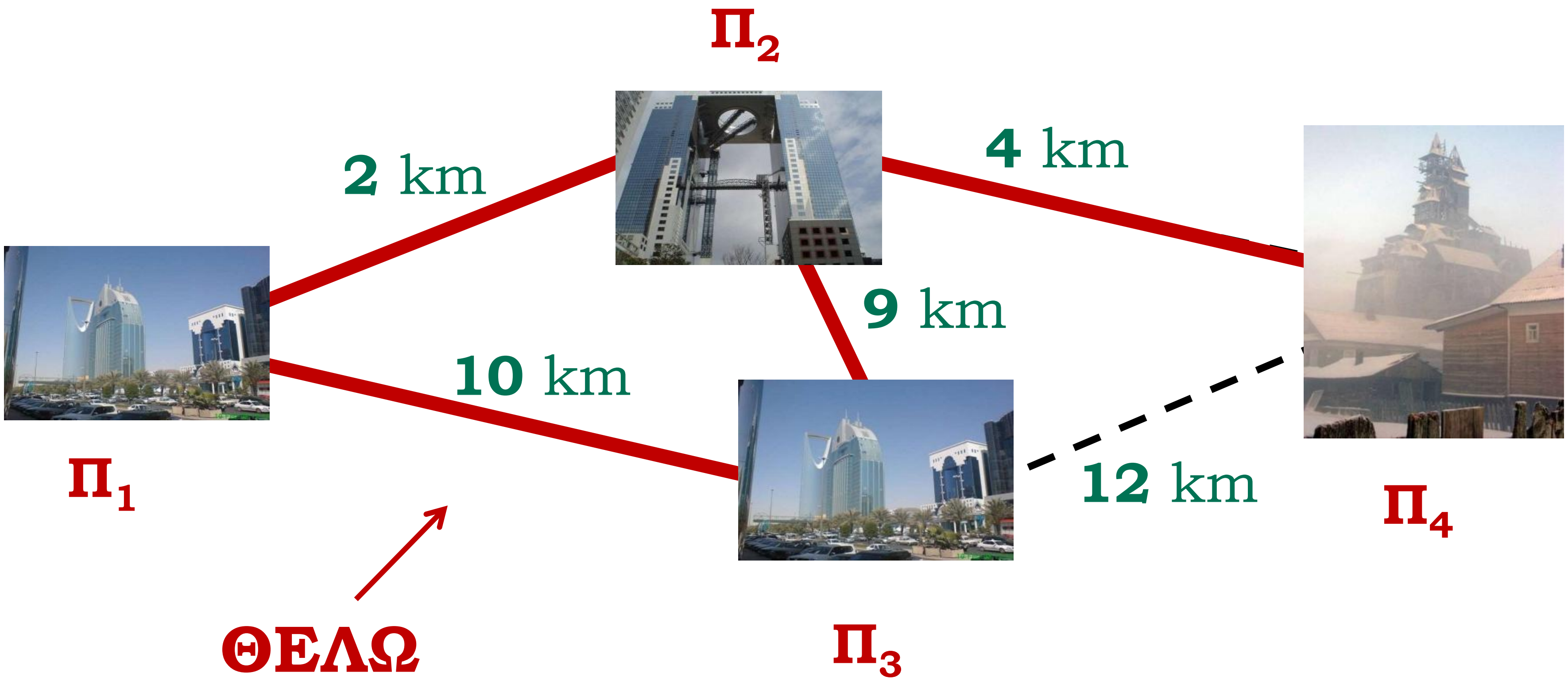
Ε3 (*Ανακατασκευή Οδικού Δικτύου*)

Ολική Επικοινωνία

ΝΑΙ

Σύνολο Κόστος Κατασκευής

15 x 20.000



Παράδειγμα

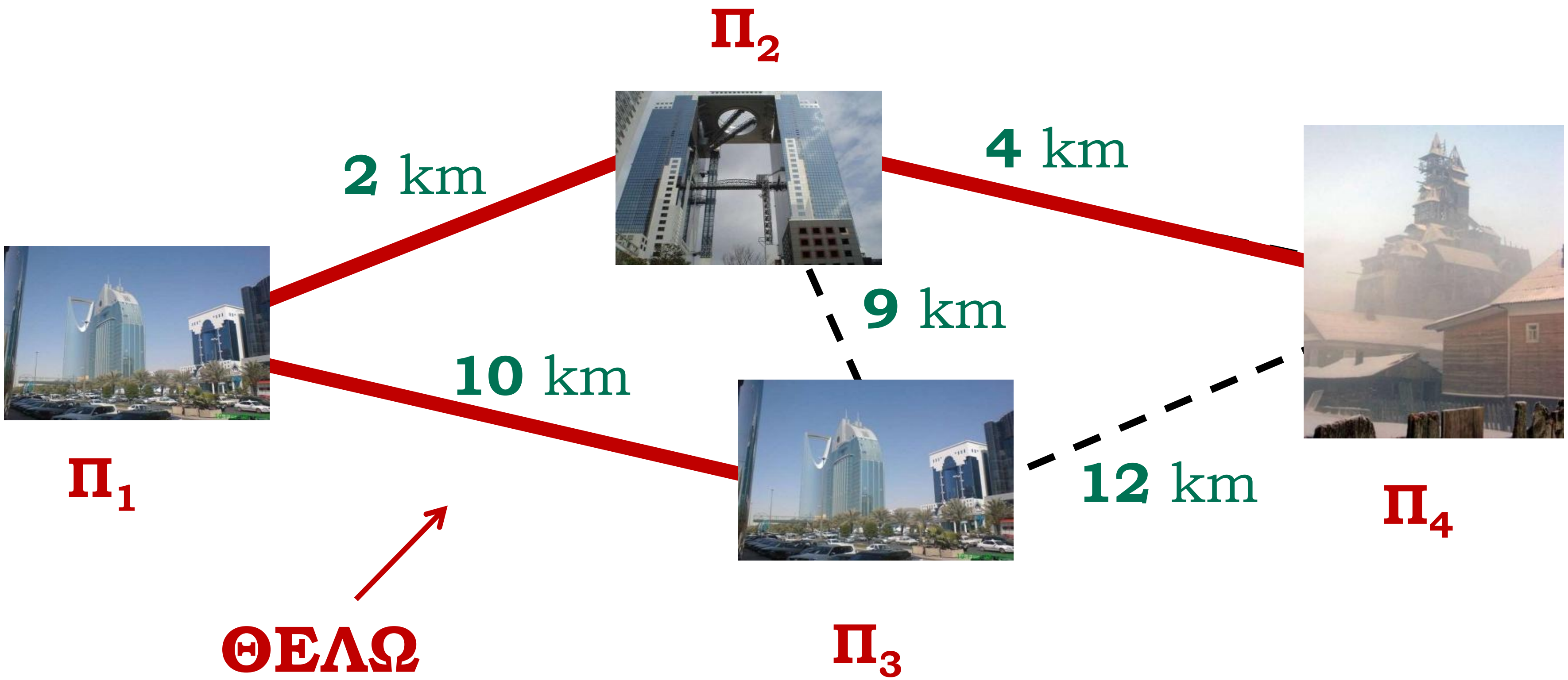
Ε3 (*Ανακατασκευή Οδικού Δικτύου*)

Ολική Επικοινωνία

ΝΑΙ

Σύνολο Κόστος Κατασκευής

16 x 20.000



Παράδειγμα

Ε3 (*Ανακατασκευή Οδικού Δικτύου*)

- Σχεδιάστε και υλοποιήστε έναν $O(n^2)$ αλγόριθμο ο οποίος ο οποίος θα υπολογίζει ένα μέρος του οδικού δικτύου του διαμερίσματος Δ που ικανοποιεί:

(1) Τις συνθήκες (Α) & (Β)

(2) Τις συνθήκες (Α) & (Β) & (Γ)

όπου:

(Α) Να υπάρχει οδική επικοινωνία μεταξύ όλων των πόλεων.

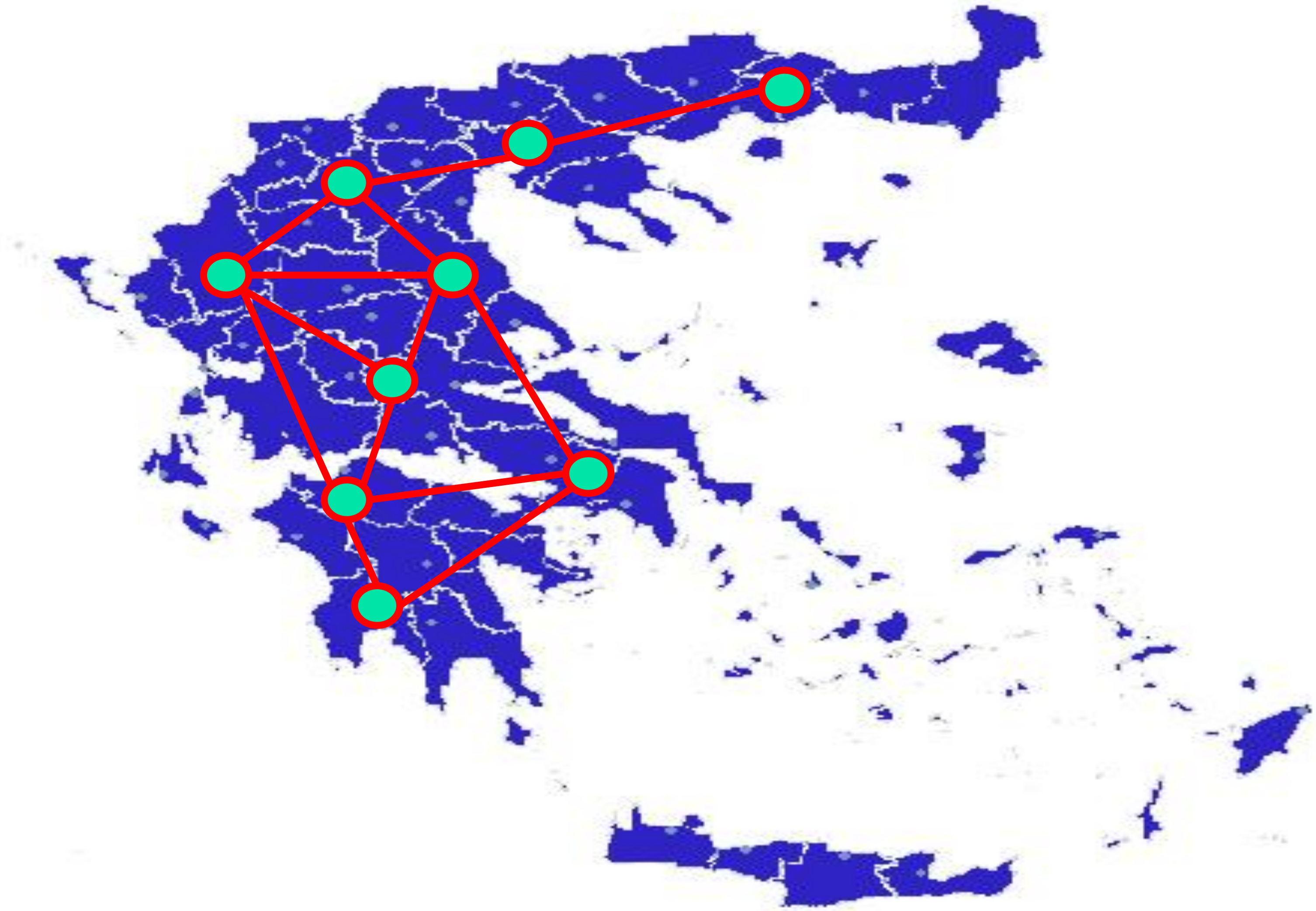
(Β) Το κόστος που θα πληρώσει το κράτος να είναι το ελάχιστο δυνατό.

(Γ) Η χιλιομετρική απόσταση της διαδρομής μεταξύ των δύο πόλεων πόλεων Π_1 και Π_3 να είναι ελάχιστη.

E3 (*Ανακατασκευή Οδικού Δικτύου*)

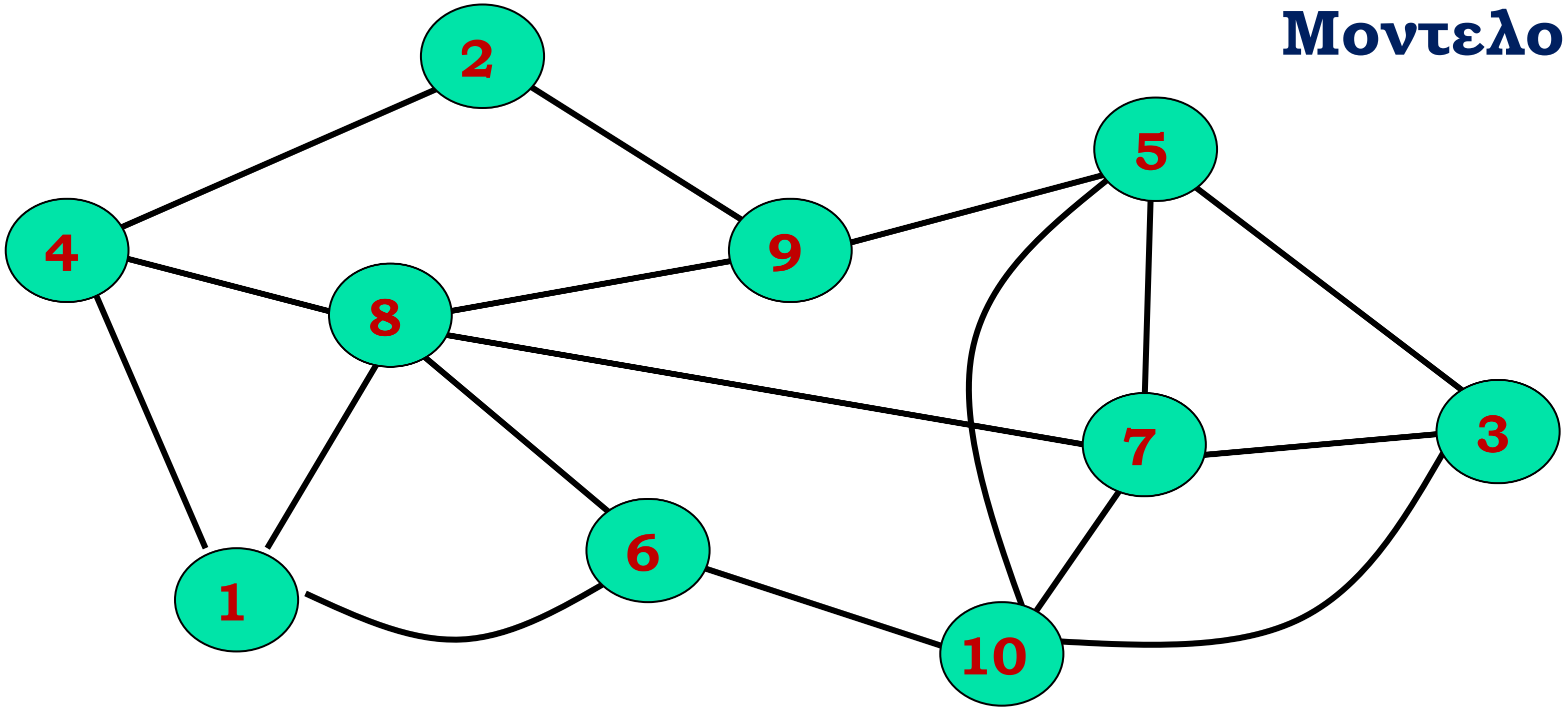
MS-Construction

E3 (*Ανακατασκευή Οδικού Δικτύου*)



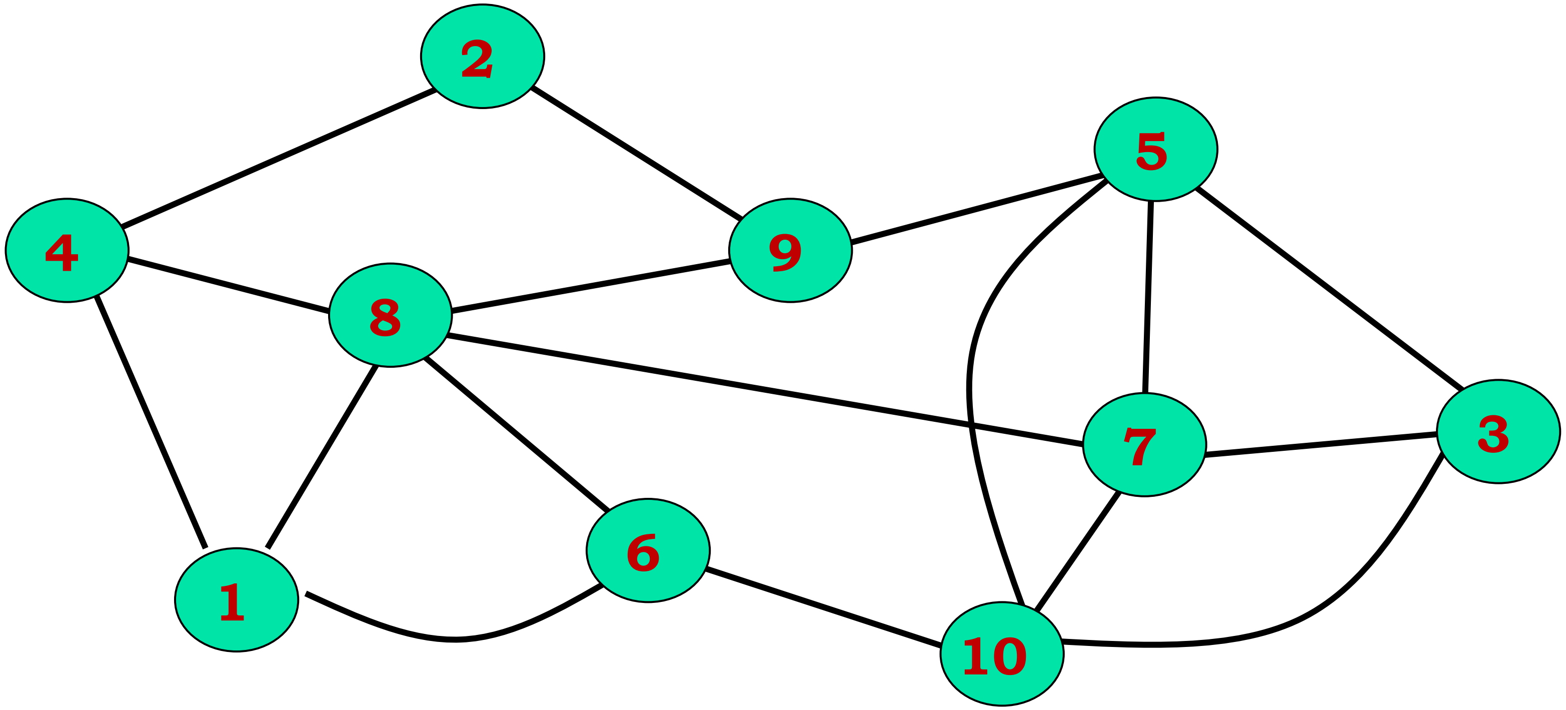
Ε3 (*Ανακατασκευή Οδικού Δικτύου*)

Μοντελοποίηση



E3 (*Ανακατασκευή Οδικού Δικτύου*)

Επίλυση



1) Αλγόριθμος MST (Kruskal ή Prim)

2) Αλγόριθμος Ελάχιστων Αποστάσεων (Dijkstra)

Ε3 (*Ανακατασκευή Οδικού Δικτύου*)

- **Αλγόριθμος O(n²):**

Πολυπλοκότητα

1) Αλγόριθμος MST

2) Αλγόριθμος Dijkstra

3) Αλγόριθμος Counting-sort

$$T(n) = O(n^2)$$