Θεωρία Γραφημάτων

Θεμελιώσεις-Αλγόριθμοι-Εφαρμογές

Ενότητα 4

ΔΕΝΔΡΑ

Εισαγωγή

- Ένα γράφημα *G* είναι δένδρο αν:

1. Είναι συνδεδεμένο και δεν έχει κύκλους.
2. Είναι συνδεδεμένο και έχει n-1 ακμές.
3. Δεν έχει κύκλους και έχει n-1 ακμές.
4. Είναι συνδεδεμένος κατά ελάχιστο τρόπο.
5. Αν υπάρχει ένα <u>μόνο</u> μονοπάτι μεταξύ δύο οποιονδήποτε κόμβων.

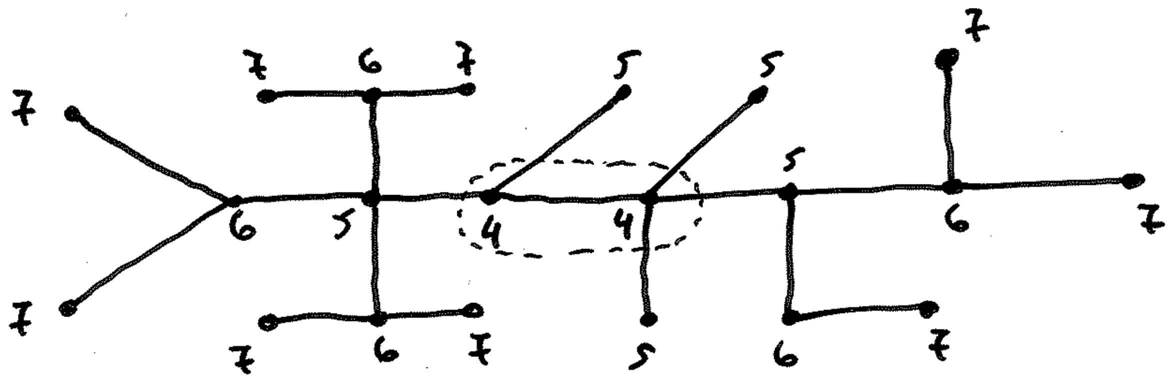
Εισαγωγή

- Εκκεντρικότητα: μέγιστη απόσταση ενός κόμβου από τον πλέον απομακρυσμένο κόμβο του γραφήματος.
- Κέντρο: υπογράφημα που επάγεται από κόμβους με την μικρότερη εκκεντρικότητα.
- Ακτίνα: η εκκεντρικότητα του κέντρου.
- Διάμετρος: το μήκος του μακριότερου (μεγαλύτερου) μονοπατιού.
- Ακτίνα ≤ Διάμετρος

Εισαγωγή

- Πόρισμα: Ένα δάσος (δένδρων) με n κόμβους και k συνιστώσες δένδρα, έχει n-k ακμές.

- Θεώρημα: Ένα δένδρο έχει κέντρο που αποτελείται από 1 ή 2 κόμβους.

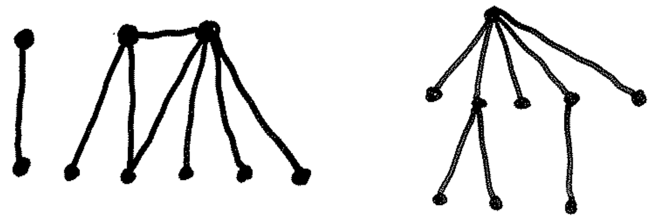


Ποσοτικά Στοιχεία

- Μη αύξουσα ακολουθία S: $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n$ ανήκει σε ένα T, μόνο εάν d_i θετικός αριθμός και ισχύει:

  $$\Sigma_{i=1..n}\, d_i = 2(n-1)$$

  Αναγκαία συνθήκη, όχι ικανή!



- Σε κάθε δένδρο υπάρχουν τουλάχιστον 2 εκκρεμείς ακμές.

Ισχύει: 2m = 2(n-1)

- Έστω $d_1, \underbrace{d_2, \ldots, d_n}_{n-1}$ και, $d_1 = 1$ και $d_i \geq 2$, $2 \leq i \leq n$
- Τότε $\sum_{i=1}^{n} d_i \geq 1 + 2(n-1) = 2n-1$
- Ισχύει, $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2m = 2(n-1) = 2n-2$

άτοπο

Δένδρο *n* κόμβων ⇒ *n*-1 ακμές

- K_1 $n=1$, $m=0$ ⇒ Ισχύει για $n=1$
- Υπόθεση: Έστω ότι ισχύει για όλα τα δέντρα με $k<n$ κόμβους, $k\geq 1$.
- Έστω T ένα δέντρο με n κόμβους και m ακμές, και $e \in T$.

- Delete e από T: ⇒ $T-e$ δύο δέντρα ⇒ T_1, T_2

$$T_1 \Downarrow n_1, m_1 \qquad T_2 \Downarrow n_2, m_2$$

- Από υπόθεση:

$$\left.\begin{array}{l} m_1 = n_1 - 1 \\ m_2 = n_2 - 1 \end{array}\right\} (1)$$

- Ισχύει:

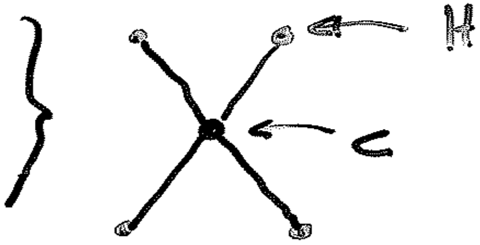
$$\left.\begin{array}{l} n = n_1 + n_2 \\ m = m_1 + m_2 + 1 \end{array}\right\} (2)$$

$$\Rightarrow m = (n_1-1)+(n_2-1)+1 = n_1+n_2-1 = \underline{n-1} \;!!!$$

Απαρίθμηση Δένδρων

- 1857 Cayley
- C_kH_{2k+2}, # ισομερών

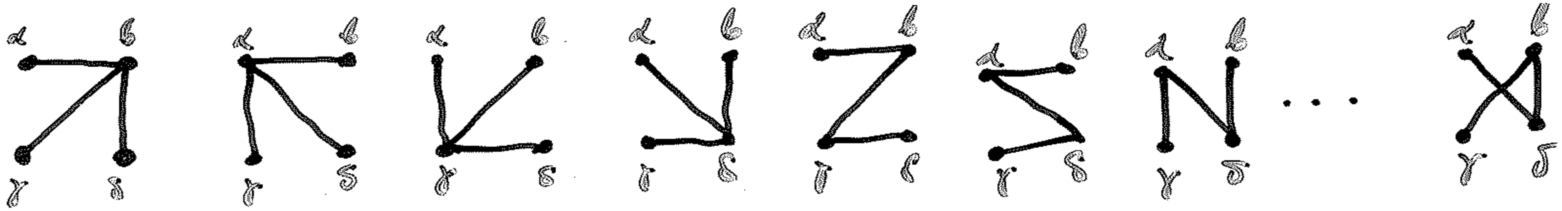
των κορεσμένων υδρογονανθράκων



$d_C = 4$
$d_H = 1$

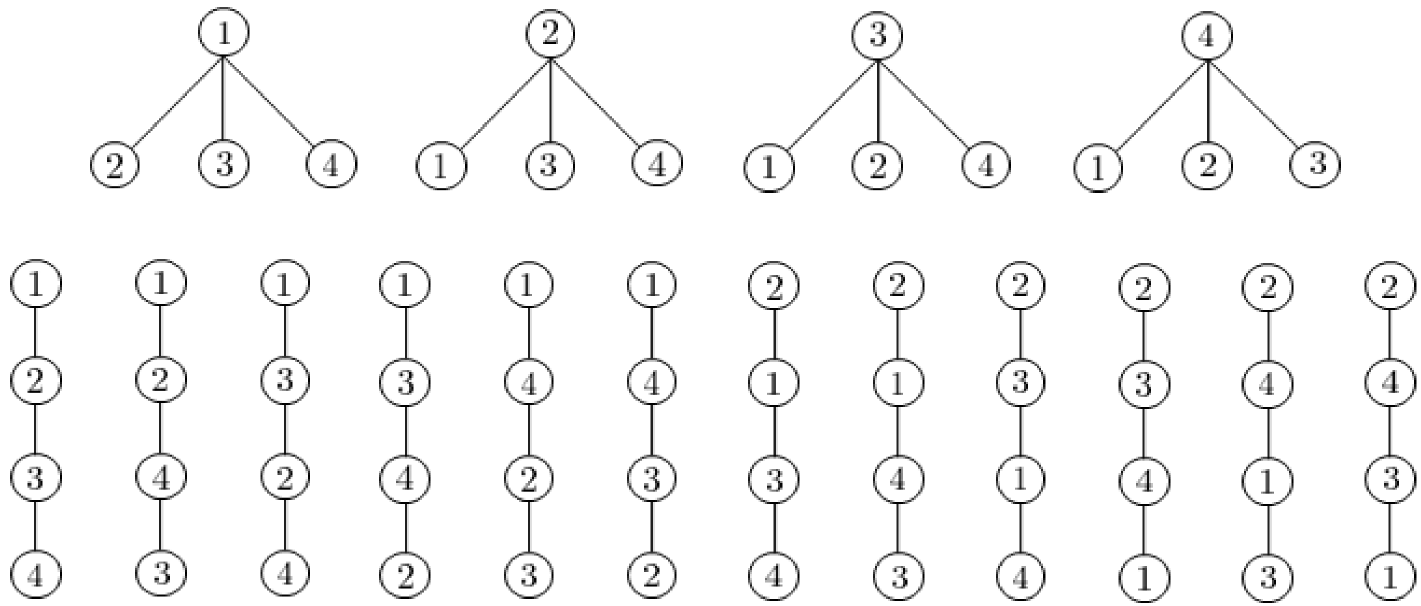
- Θεώρημα: Ο αριθμός των διακριτών δένδρων με επιγραφές που έχουν n κόμβους είναι n^{n-2} (10 αποδείξεις).

  ($K_n \Rightarrow$ πλήθος των σκελετικών δένδρων $= n^{n-2}$)



Απαρίθμηση Δένδρων

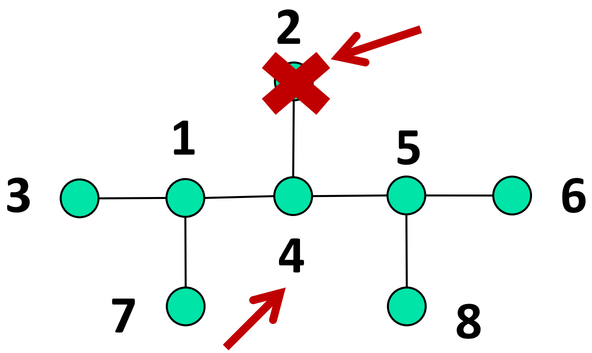
- Θεώρημα: Ο αριθμός των διακριτών δένδρων με επιγραφές που έχουν n κόμβους είναι n^{n-2} (10 αποδείξεις).



Απαρίθμηση Δένδρων

- Απόδειξη Cayley:
  - Επιγράφουμε τους κόμβους του δένδρου με 1, 2, ..., n.
  - Βρίσκουμε τον εκκρεμή κόμβο με τη μικρότερη επιγραφή, έστω a_1.
  - Τον διαγράφουμε και έστω b_1 ο γειτονικός της κόμβος.
  - Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία στο υπογράφημα που μένει.

  Έτσι, μετά από n-2 διαγραφές, το δένδρο εκφυλίζεται σε μία ακμή, και έχουμε δημιουργήσει S: (b_1, b_2, ..., b_{n-2}) .



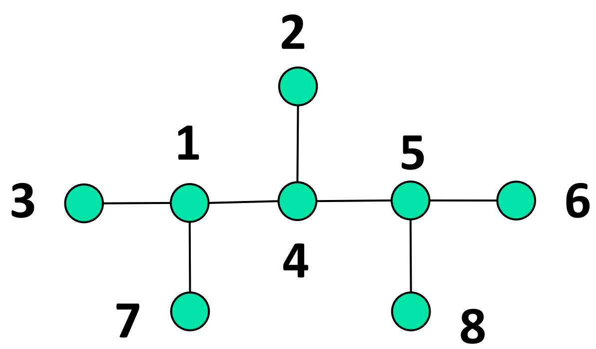
$\Rightarrow$ **S = (4, 1, 5, 3, 4, 5)**

Απαρίθμηση Δένδρων

- Απόδειξη Cayley:
  - Επιγράφουμε τους κόμβους του δένδρου με 1, 2, ..., n.
  - Βρίσκουμε τον εκκρεμή κόμβο με τη μικρότερη επιγραφή, έστω a_1.
  - Τον διαγράφουμε και έστω b_1 ο γειτονικός της κόμβος.
  - Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία στο υπογράφημα που μένει.

  Έτσι, μετά από n-2 διαγραφές, το δένδρο εκφυλίζεται σε μία ακμή, και έχουμε δημιουργήσει S: $(b_1, b_2, \ldots, b_{n-2})$.

Παράδειγμα



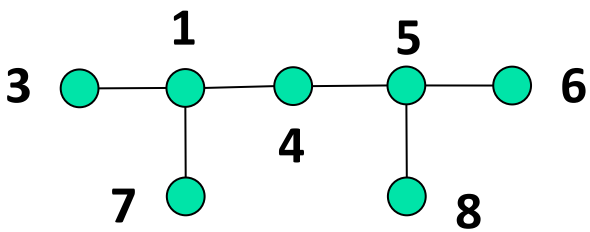
$\Rightarrow$ **S = ()**

Απαρίθμηση Δένδρων

- Απόδειξη Cayley:
  - Επιγράφουμε τους κόμβους του δένδρου με 1, 2, ..., n.
  - Βρίσκουμε τον εκκρεμή κόμβο με τη μικρότερη επιγραφή, έστω a_1.
  - Τον διαγράφουμε και έστω b_1 ο γειτονικός της κόμβος.
  - Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία στο υπογράφημα που μένει.

  Έτσι, μετά από n-2 διαγραφές, το δένδρο εκφυλίζεται σε μία ακμή, και έχουμε δημιουργήσει S: $(b_1, b_2, ..., b_{n-2})$.

Παράδειγμα



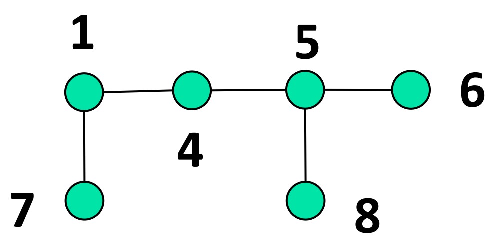
$\Rightarrow$ **S = (4)**

Απαρίθμηση Δένδρων

- Απόδειξη Cayley:
  - Επιγράφουμε τους κόμβους του δένδρου με 1, 2, ..., n.
  - Βρίσκουμε τον εκκρεμή κόμβο με τη μικρότερη επιγραφή, έστω a_1.
  - Τον διαγράφουμε και έστω b_1 ο γειτονικός της κόμβος.
  - Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία στο υπογράφημα που μένει.

  Έτσι, μετά από n-2 διαγραφές, το δένδρο εκφυλίζεται σε μία ακμή, και έχουμε δημιουργήσει S: $(b_1, b_2, ..., b_{n-2})$.

Παράδειγμα



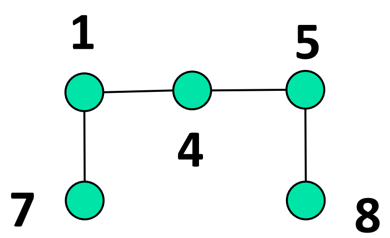
$\Rightarrow$ **S = (4, 1)**

Απαρίθμηση Δένδρων

- Απόδειξη Cayley:
  - Επιγράφουμε τους κόμβους του δένδρου με 1, 2, ..., n.
  - Βρίσκουμε τον εκκρεμή κόμβο με τη μικρότερη επιγραφή, έστω a_1.
  - Τον διαγράφουμε και έστω b_1 ο γειτονικός της κόμβος.
  - Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία στο υπογράφημα που μένει.

  Έτσι, μετά από n-2 διαγραφές, το δένδρο εκφυλίζεται σε μία ακμή, και έχουμε δημιουργήσει S: $(b_1, b_2, ..., b_{n-2})$.

Παράδειγμα



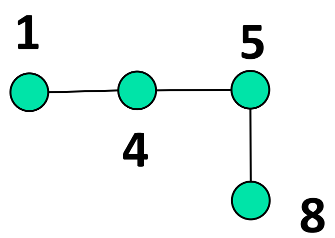
$\Rightarrow$ **S = (4, 1, 5)**

Απαρίθμηση Δένδρων

- Απόδειξη Cayley:
  - Επιγράφουμε τους κόμβους του δένδρου με 1, 2, ..., n.
  - Βρίσκουμε τον εκκρεμή κόμβο με τη μικρότερη επιγραφή, έστω a_1.
  - Τον διαγράφουμε και έστω b_1 ο γειτονικός της κόμβος.
  - Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία στο υπογράφημα που μένει.

  Έτσι, μετά από n-2 διαγραφές, το δένδρο εκφυλίζεται σε μία ακμή, και έχουμε δημιουργήσει S: $(b_1, b_2, \ldots, b_{n-2})$.

Παράδειγμα



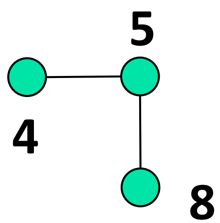
$\Rightarrow$ **S = (4, 1, 5, 1)**

Απαρίθμηση Δένδρων

- Απόδειξη Cayley:
  - Επιγράφουμε τους κόμβους του δένδρου με 1, 2, ..., n.
  - Βρίσκουμε τον εκκρεμή κόμβο με τη μικρότερη επιγραφή, έστω a_1.
  - Τον διαγράφουμε και έστω b_1 ο γειτονικός της κόμβος.
  - Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία στο υπογράφημα που μένει.

  Έτσι, μετά από n-2 διαγραφές, το δένδρο εκφυλίζεται σε μία ακμή, και έχουμε δημιουργήσει S: $(b_1, b_2, \ldots, b_{n-2})$.

Παράδειγμα



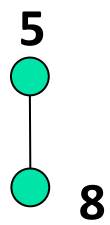
$\Rightarrow$ **S = (4, 1, 5, 1, 4)**

Απαρίθμηση Δένδρων

- Απόδειξη Cayley:
  - Επιγράφουμε τους κόμβους του δένδρου με 1, 2, ..., n.
  - Βρίσκουμε τον εκκρεμή κόμβο με τη μικρότερη επιγραφή, έστω a_1.
  - Τον διαγράφουμε και έστω b_1 ο γειτονικός της κόμβος.
  - Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία στο υπογράφημα που μένει.

  Έτσι, μετά από n-2 διαγραφές, το δένδρο εκφυλίζεται σε μία ακμή, και έχουμε δημιουργήσει S: $(b_1, b_2, \ldots, b_{n-2})$.

Παράδειγμα

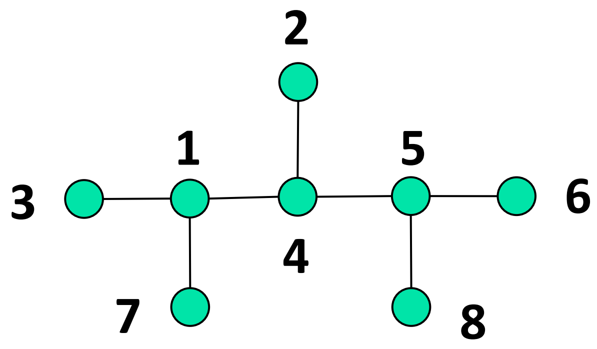


$\Rightarrow$ **S = (4, 1, 5, 1, 4, 5)**

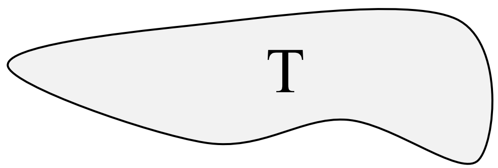
Απαρίθμηση Δένδρων

- Απόδειξη Cayley:
  - Μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα δένδρο T κατά μοναδικό τρόπο από την S = (b_1, b_2, ..., b_{n-2}) που περιέχει μη-εκκρεμείς κόμβους.

(Prüfer, 1918)



$\Rightarrow$ **S = (4, 1, 5, 1, 4, 5)**



  - Κάθε στοιχείο της ακολουθία S = (b_1, b_2, ..., b_{n-2}) μπορεί να πάρει τιμές $1 \leq b_i \leq n$ (όπου $1 \leq i \leq n\text{-}2$) $\Rightarrow$ n^{n-2}.

Απαρίθμηση Δένδρων

- Απόδειξη Cayley:
  - Μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα δένδρο T κατά μοναδικό τρόπο από την $S = (b_1, b_2, ..., b_{n-2})$ που περιέχει μη-εκκρεμείς κόμβους.

(Prüfer, 1918)

Έστω, $L = (1, 2, \ldots, n)$.

Επιλέγουμε από την L

την μικρότερη επιγραφή, έστω l_1, που δεν ανήκει στην S.

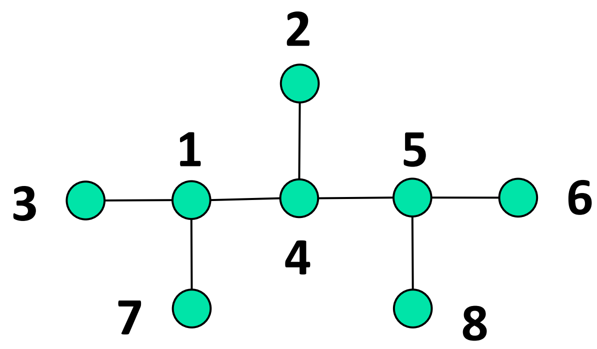
Η ακμή (l_1, s_1) ανήκει στο T.

Διαγράφουμε l_1 από L και $s1$ από S.

Επαναλαμβάνουμε με τις νέας ακολουθίες L και S.

Απαρίθμηση Δένδρων

- Απόδειξη Cayley:



L = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)

S = (4, 1, 5, 1, 4, 5)

(2, 4) (3, 1) (6, 5) (7, 1) (1, 4) (4, 5) (5, 8)

Επιλέγουμε από την L την μικρότερη επιγραφή, έστω l_1, που δεν ανήκει στην S.
Η ακμή (l_1, s_1) ανήκει στο T.
Διαγράφουμε l_1 από L και $s1$ από S.
Επαναλαμβάνουμε με τις νέας ακολουθίες L και S.

Απαρίθμηση Δένδρων

- Απόδειξη Cayley:

L = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)

S = (4, 1, 5, 1, 4, 5)

Παράδειγμα

Επιλέγουμε από την L την μικρότερη επιγραφή, έστω l_1, που δεν ανήκει στην S.
Η ακμή (l_1, s_1) ανήκει στο T.
Διαγράφουμε l_1 από L και $s1$ από S.
Επαναλαμβάνουμε με τις νέας ακολουθίες L και S.

Απαρίθμηση Δένδρων

- Απόδειξη Cayley:

L = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)

S = (4, 1, 5, 1, 4, 5)

Παράδειγμα

Επιλέγουμε από την L την μικρότερη επιγραφή, έστω l_1, που δεν ανήκει στην S.
Η ακμή (l_1, s_1) ανήκει στο T.
Διαγράφουμε l_1 από L και $s1$ από S.
Επαναλαμβάνουμε με τις νέας ακολουθίες L και S.

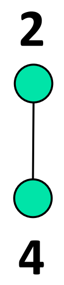
Απαρίθμηση Δένδρων

- Απόδειξη Cayley:

L = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)

S = (4, 1, 5, 1, 4, 5)

(2, 4)



Παράδειγμα

Επιλέγουμε από την L την μικρότερη επιγραφή, έστω l_1, που δεν ανήκει στην S.
Η ακμή (l_1, s_1) ανήκει στο T.
Διαγράφουμε l_1 από L και $s1$ από S.
Επαναλαμβάνουμε με τις νέας ακολουθίες L και S.

Απαρίθμηση Δένδρων

- Απόδειξη Cayley:

L = (1, ~~2~~, 3, 4, 5, 6, 7, 8)

S = (~~4~~, 1, 5, 1, 4, 5)

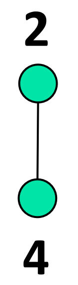
(2, 4)

Παράδειγμα

Επιλέγουμε από την L την μικρότερη επιγραφή, έστω l_1, που δεν ανήκει στην S.
Η ακμή (l_1, s_1) ανήκει στο T.
Διαγράφουμε l_1 από L και $s1$ από S.
Επαναλαμβάνουμε με τις νέας ακολουθίες L και S.

Απαρίθμηση Δένδρων

- Απόδειξη Cayley:



L = (1, ~~2~~, 3, 4, 5, 6, 7, 8)

S = (~~4~~, 1, 5, 1, 4, 5)

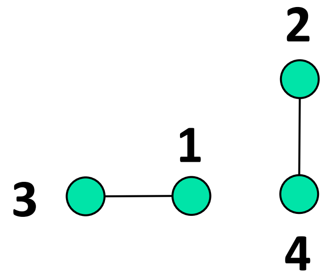
(2, 4)

Παράδειγμα

Επιλέγουμε από την L την μικρότερη επιγραφή, έστω l_1, που δεν ανήκει στην S.
Η ακμή (l_1, s_1) ανήκει στο T.
Διαγράφουμε l_1 από L και $s1$ από S.
Επαναλαμβάνουμε με τις νέας ακολουθίες L και S.

Απαρίθμηση Δένδρων

- Απόδειξη Cayley:



L = (1, ~~2~~, 3, 4, 5, 6, 7, 8)

S = (~~4~~, 1, 5, 1, 4, 5)

(2, 4)   (3, 1)

Παράδειγμα

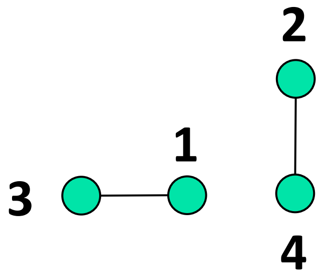
Επιλέγουμε από την L την μικρότερη επιγραφή, έστω l_1,
που δεν ανήκει στην S.
Η ακμή (l_1, s_1) ανήκει στο T.
Διαγράφουμε l_1 από L και $s1$ από S.
Επαναλαμβάνουμε με τις νέας ακολουθίες L και S.

Απαρίθμηση Δένδρων

- Απόδειξη Cayley:

L = (1, ~~2~~, ~~3~~, 4, 5, 6, 7, 8)

S = (~~4~~, ~~1~~, 5, 1, 4, 5)



(2, 4)   (3, 1)

Παράδειγμα

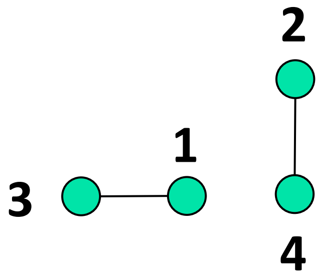
Επιλέγουμε από την L την μικρότερη επιγραφή, έστω l_1, που δεν ανήκει στην S.
Η ακμή (l_1, s_1) ανήκει στο T.
Διαγράφουμε l_1 από L και $s1$ από S.
Επαναλαμβάνουμε με τις νέας ακολουθίες L και S.

Απαρίθμηση Δένδρων

- Απόδειξη Cayley:

L = (1, ~~2, 3~~, 4, 5, 6, 7, 8)

S = (~~4, 1~~, 5, 1, 4, 5)



(2, 4) (3, 1)

Παράδειγμα

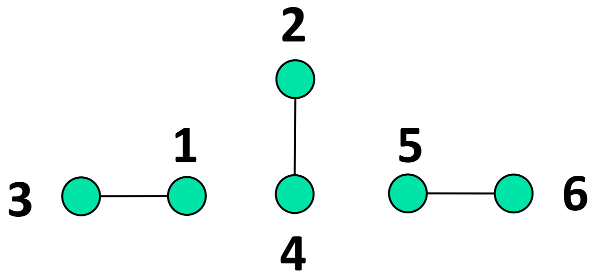
Επιλέγουμε από την L την μικρότερη επιγραφή, έστω l_1,
που δεν ανήκει στην S.
Η ακμή (l_1, s_1) ανήκει στο T.
Διαγράφουμε l_1 από L και $s1$ από S.
Επαναλαμβάνουμε με τις νέας ακολουθίες L και S.

Απαρίθμηση Δένδρων

- Απόδειξη Cayley:

L = (1, ~~2~~, ~~3~~, 4, 5, 6, 7, 8)

S = (~~4~~, ~~1~~, 5, 1, 4, 5)



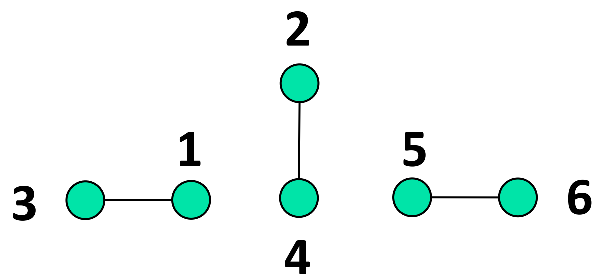
(2, 4) (3, 1) (6, 5)

Παράδειγμα

Επιλέγουμε από την L την μικρότερη επιγραφή, έστω l_1, που δεν ανήκει στην S.
Η ακμή (l_1, s_1) ανήκει στο Τ.
Διαγράφουμε l_1 από L και $s1$ από S.
Επαναλαμβάνουμε με τις νέας ακολουθίες L και S.

Απαρίθμηση Δένδρων

- Απόδειξη Cayley:



L = (1, ~~2~~, ~~3~~, 4, 5, ~~6~~, 7, 8)

S = (~~4~~, ~~1~~, ~~5~~, 1, 4, 5)

(2, 4)   (3, 1)   (6, 5)

Παράδειγμα

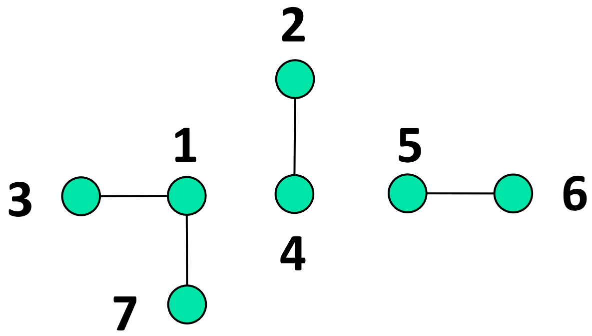
Επιλέγουμε από την L την μικρότερη επιγραφή, έστω l_1, που δεν ανήκει στην S.
Η ακμή (l_1, s_1) ανήκει στο T.
Διαγράφουμε l_1 από L και $s1$ από S.
Επαναλαμβάνουμε με τις νέας ακολουθίες L και S.

Απαρίθμηση Δένδρων

- Απόδειξη Cayley:

L = (1, ~~2~~, ~~3~~, 4, 5, ~~6~~, 7, 8)

S = (~~4~~, ~~1~~, ~~5~~, 1, 4, 5)



(2, 4)   (3, 1)   (6, 5)   (7, 1)

Παράδειγμα

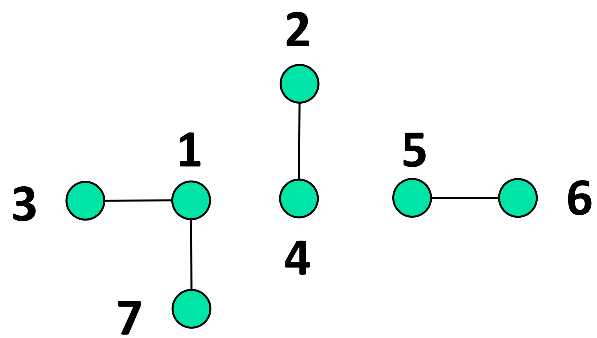
Επιλέγουμε από την L την μικρότερη επιγραφή, έστω l_1, που δεν ανήκει στην S.
Η ακμή (l_1, s_1) ανήκει στο T.
Διαγράφουμε l_1 από L και $s1$ από S.
Επαναλαμβάνουμε με τις νέας ακολουθίες L και S.

Απαρίθμηση Δένδρων

- Απόδειξη Cayley:

L = (1, ~~2, 3,~~ 4, 5, ~~6, 7,~~ 8)

S = (~~4, 1, 5, 1,~~ 4, 5)



(2, 4)   (3, 1)   (6, 5)   (7, 1)

Παράδειγμα

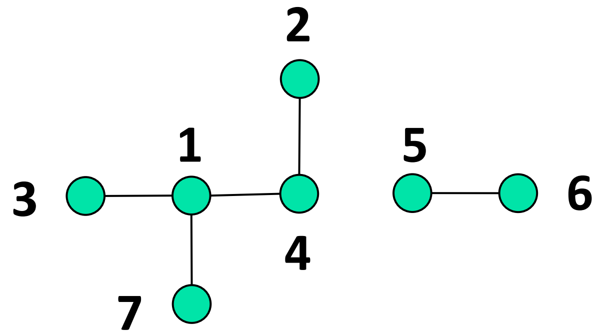
Επιλέγουμε από την L την μικρότερη επιγραφή, έστω l_1, που δεν ανήκει στην S.
Η ακμή (l_1, s_1) ανήκει στο T.
Διαγράφουμε l_1 από L και $s1$ από S.
Επαναλαμβάνουμε με τις νέας ακολουθίες L και S.

Απαρίθμηση Δένδρων

- Απόδειξη Cayley:

L = (1, ~~2, 3,~~ 4, 5, ~~6, 7,~~ 8)

S = (~~4, 1, 5, 1,~~ 4, 5)



(2, 4)   (3, 1)   (6, 5)   (7, 1)   (1, 4)

Παράδειγμα

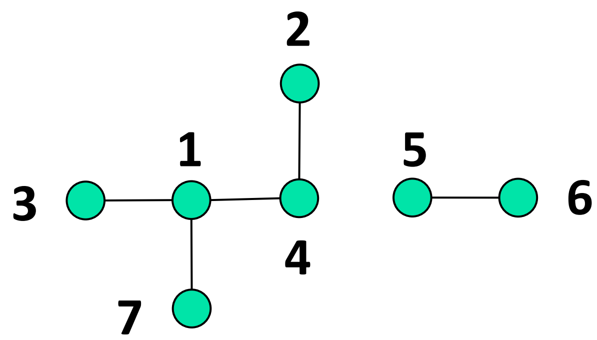
Επιλέγουμε από την L την μικρότερη επιγραφή, έστω l_1, που δεν ανήκει στην S.
Η ακμή (l_1, s_1) ανήκει στο T.
Διαγράφουμε l_1 από L και $s1$ από S.
Επαναλαμβάνουμε με τις νέας ακολουθίες L και S.

Απαρίθμηση Δένδρων

- Απόδειξη Cayley:

L = (4, 5, 8)

S = (5)



(2, 4)   (3, 1)   (6, 5)   (7, 1)   (1, 4)

Παράδειγμα

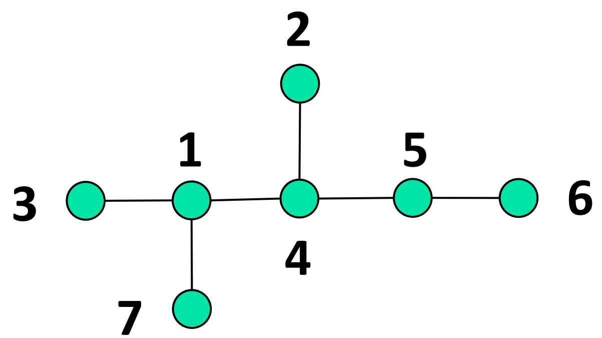
Επιλέγουμε από την L την μικρότερη επιγραφή, έστω l_1, που δεν ανήκει στην S.
Η ακμή (l_1, s_1) ανήκει στο T.
Διαγράφουμε l_1 από L και $s1$ από S.
Επαναλαμβάνουμε με τις νέας ακολουθίες L και S.

Απαρίθμηση Δένδρων

- Απόδειξη Cayley:

L = (~~1, 2, 3,~~ 4, 5, ~~6, 7,~~ 8)

S = (~~4, 1, 5, 1, 4,~~ 5)



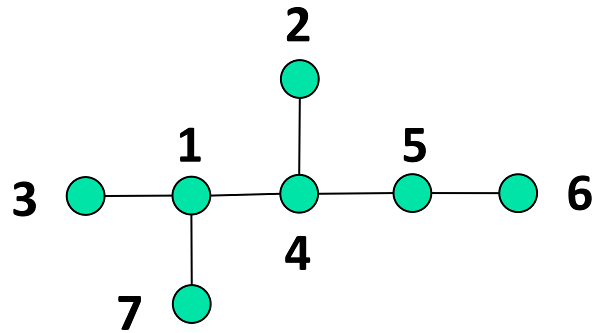
(2, 4) (3, 1) (6, 5) (7, 1) (1, 4) (4, 5)

Παράδειγμα

Επιλέγουμε από την L την μικρότερη επιγραφή, έστω l_1, που δεν ανήκει στην S.
Η ακμή (l_1, s_1) ανήκει στο T.
Διαγράφουμε l_1 από L και $s1$ από S.
Επαναλαμβάνουμε με τις νέας ακολουθίες L και S.

Απαρίθμηση Δένδρων

- Απόδειξη Cayley:



L = (~~[illegible]~~ 5, ~~[illegible]~~, 8)

S = (~~[illegible]~~)

(2, 4)   (3, 1)   (6, 5)   (7, 1)   (1, 4)   (4, 5)

Παράδειγμα

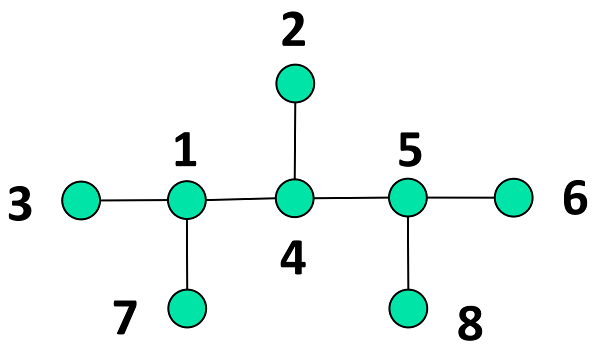
Επιλέγουμε από την L την μικρότερη επιγραφή, έστω l_1, που δεν ανήκει στην S.
Η ακμή (l_1, s_1) ανήκει στο T.
Διαγράφουμε l_1 από L και $s1$ από S.
Επαναλαμβάνουμε με τις νέας ακολουθίες L και S.

Απαρίθμηση Δένδρων

- Απόδειξη Cayley:

L =

S =



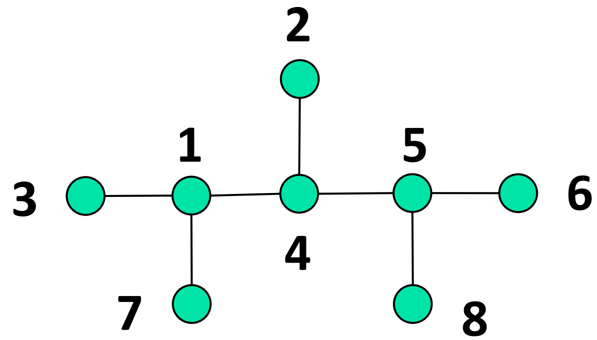
(2, 4) (3, 1) (6, 5) (7, 1) (1, 4) (4, 5) (5, 8)

Παράδειγμα

Επιλέγουμε από την L την μικρότερη επιγραφή, έστω l_1,
που δεν ανήκει στην S.
Η ακμή (l_1, s_1) ανήκει στο Τ.
Διαγράφουμε l_1 από L και $s1$ από S.
Επαναλαμβάνουμε με τις νέας ακολουθίες L και S.

Απαρίθμηση Δένδρων

- Παράδειγμα:



- Κάθε στοιχείο της ακολουθία $b_1, b_2, \ldots, b_{n-2}$, μπορεί να πάρει τιμές $1 \leq b_i \leq n$ (όπου $1 \leq i \leq n-2$) $\Rightarrow$ n^{n-2}.

- Θεώρημα: Το πλήθος των διακριτών ένριζων δένδρων (rooted trees) με n κόμβους είναι n^{n-1}.

Για κάθε ένα από τα n^{n-2} ελεύθερα δέντρα, παράγονται n διαφορετικά ριζωμένα δέντρα.

Γενετικά Δένδρα

- Θεώρημα: Κάθε συνδεδεμένο γράφημα έχει τουλάχιστον ένα γενετικό δένδρο.

  (i) G = T, οεδ.

  (ii) G ≠ T, διαγράφουμε ακμές που συμμετέχουν σε κύκλους, έως ότου απομείνουν μόνο γέφυρες.

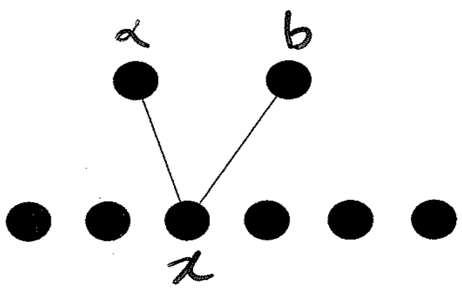
- Ερώτηση: Πόσα γενετικά δένδρα έχει ένα γράφημα;

- Θεώρημα: Σε πλήρες γράφημα K_n υπάρχουν n^{n-2} διακριτά γενετικά δένδρα.

Γενετικά Δένδρα

- Θεώρημα: Στο διμερές γράφημα $K_{m,n}$ το πλήθος των διακριτών γενετικών δένδρων είναι $m^{n-1}n^{m-1}$.

- Θεώρημα: $K_{2,n} \Rightarrow n\,2^{n-1}$



α και b ενώνονται με x κατά n διαφ. τρόπους.

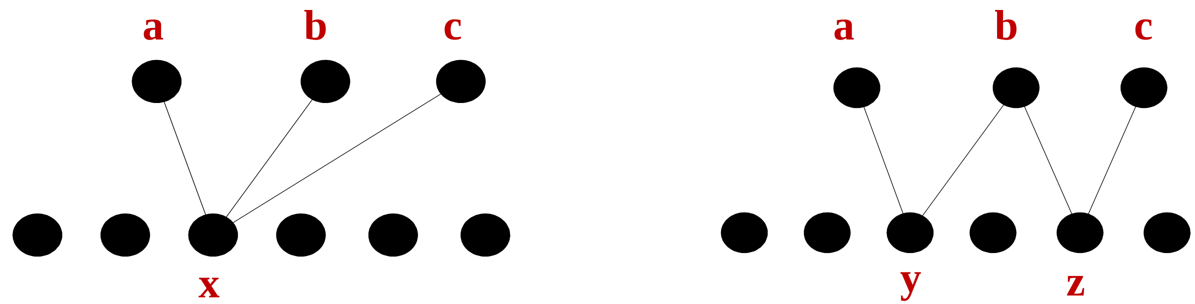
οι υπόλοιποι n-1 κορυφές να συνδεθούν είτε με α είτε με b

$$\underline{n \cdot 2^{n-1}}$$

Γενετικά Δένδρα

- Θεώρημα: $K_{3,n} \Rightarrow n^2\, 3^{n-1}$

Μονοπάτια μήκους 2



(α) (β)

Μονοπάτια μήκους 4

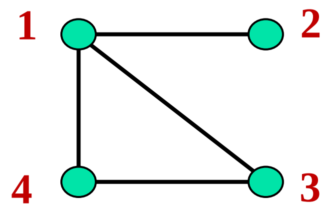
- (α): $n\, 3^{n-1}$
- (β): $6\ \ n(n-1)/2\ \ 3^{n-2}$

Από (α) + (β) = $n(n-1)\, 3^{n-1}$

- ∃ 6 περιπτώσεις με a,b,c και y,z
- Οι κόμβοι y και z μπορεί να επιλεγούν κατά $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ τρόπους

Γενετικά Δένδρα

- Θεώρημα: (Matrix-tree theorem) – Kirchoff
  - A: πίνακας γειτνίασης
  - C: πίνακας βαθμών
  - C-A: διαφορά πινάκων
  - $B_{ij}=(C-A)_{ij}$: ελάσσων πίνακας
  - $(-1)^{i+j}|B_{ij}|$: συμπαράγοντας
  - Το πλήθος των γενετικών δένδρων ισούται με συμπαράγοντα.



$$A=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&0\\1&0&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix}3&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$$

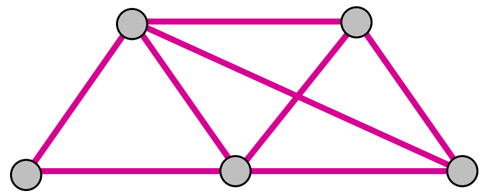
$$C-A=\begin{pmatrix}3&-1&-1&-1\\-1&1&0&0\\-1&0&2&-1\\-1&0&-1&2\end{pmatrix}$$

$$(-1)^2|B_{11}| \longleftarrow B_{11}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}$$

Γενετικά Δένδρα

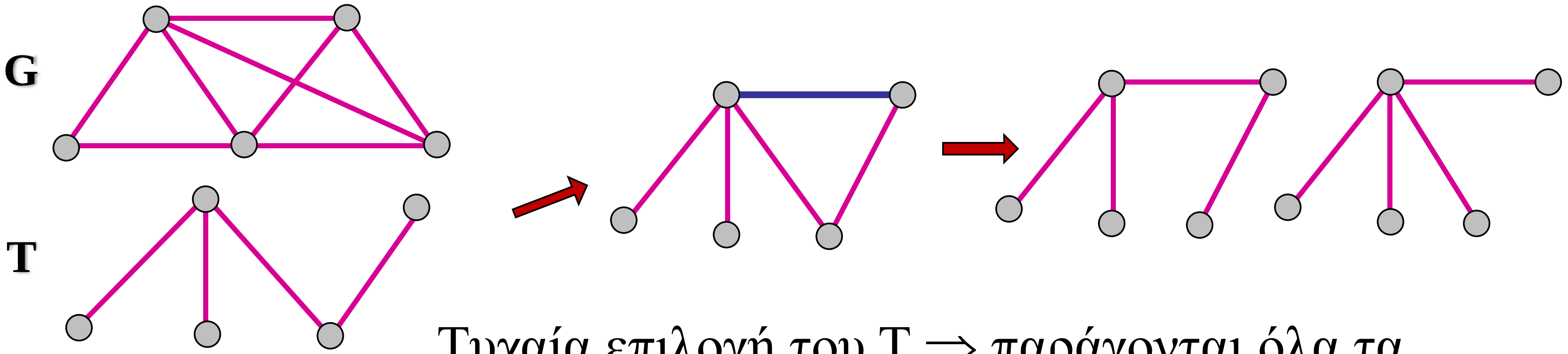
- **Θεμελιώδες Κύκλωμα:**
  - Ένας κύκλος που δημιουργείται από ένα γενετικό δένδρο και μια χορδή.
- Σύνολο χορδών: m-n+1
- G = T U $\underline{\text{T}}$
- Αριθμός θεμελιωδών κυκλωμάτων: m-n+1
- Κυκλικές εναλλαγές $\Rightarrow$ παράγουμε όλα τα γενετικά δένδρα.

G



Γενετικά Δένδρα

- Επιλέγουμε ένα σκελετικό δέντρο T
- Εισάγουμε μια ακμή ⇒ C_i θεμελιώδεις κύκλωμα
- Διαγράφοντας μια-μια ακμή του C_i παράγονται $T_1, T_2, \ldots T_K$ σκελετικά δέντρα
- Εισάγουμε νέα ακμή ⇒ C_{i+1}



Τυχαία επιλογή του T ⇒ παράγονται όλα τα σκελετικά δέντρα του G

Γενετικά Δένδρα

- Απόσταση γενετικών δένδρων είναι το πλήθος ακμών που ανήκουν στο ένα δένδρο αλλά όχι στο άλλο.
  - $dist(T_i, T_j) = dist(T_j, T_i)$
  - $dist(T_i, T_j) \geq 0$, εκτός εάν $dist(T_i, T_i) = 0$
  - $dist(T_i, T_j) \leq dist(T_i, T_u) + dist(T_u, T_j)$
- Κεντρικό λέγεται ένα γενετικό δένδρο T_0 αν

$$\max(dist(T_0, T_j)) \leq \max(dist(T, T_j))$$

για κάθε γενετικό δένδρο T του G.

- Ζυγισμένα δένδρα: Εύρεση ελάχιστου γενετικού δένδρου (αλγόριθμοι Prim & Kruskal).