Θεωρία Γραφημάτων

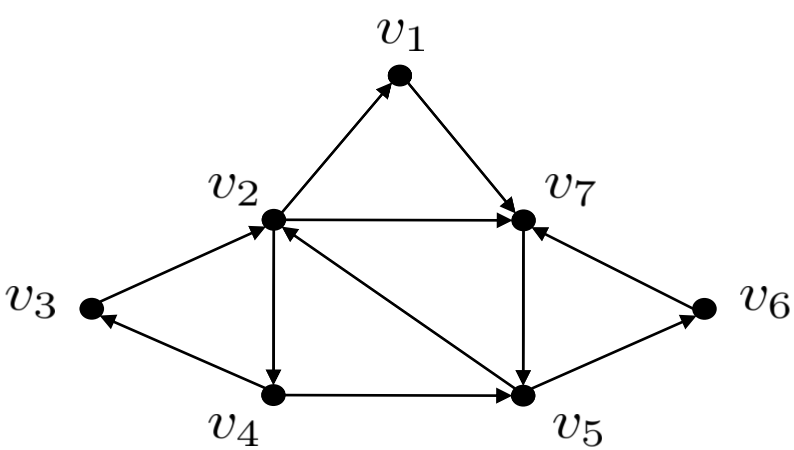
Θεμελιώσεις-Αλγόριθμοι-Εφαρμογές

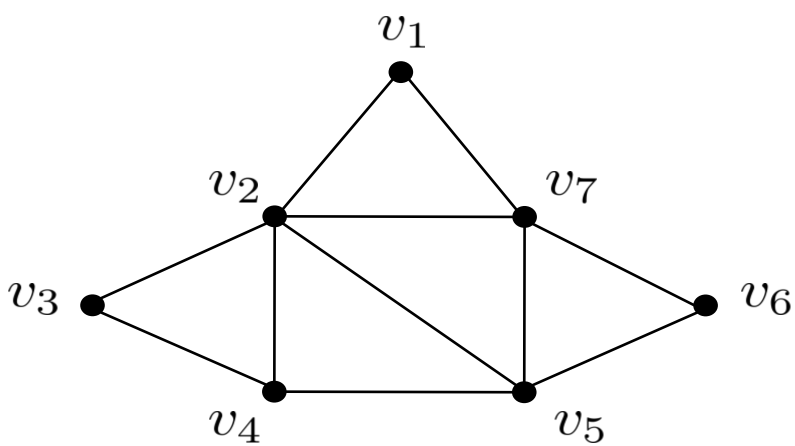
Ενότητα 3

ΜΟΝΟΠΑΤΙΑ & ΚΥΚΛΟΙ

Περίπατος – Ίχνος - Διαδρομή

- Περίπατος (walk)
- Ίχνος (trail)
- Διαδρομή ή Μονοπάτι (path)





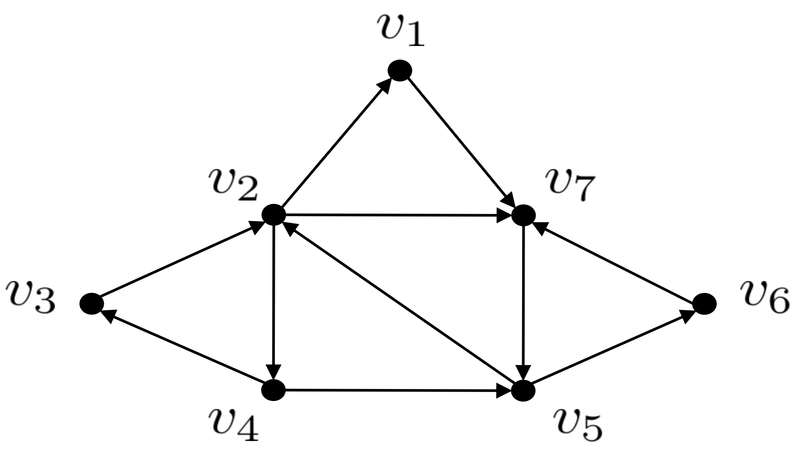
Περίπατος – Ίχνος - Διαδρομή

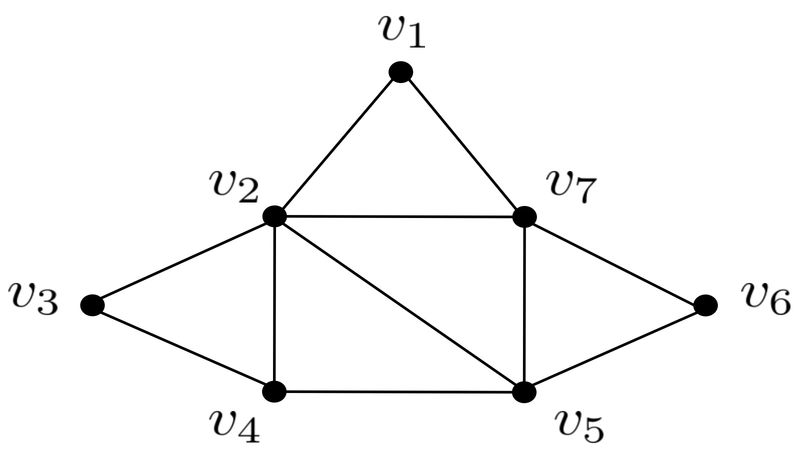
- Περίπατος (walk)

Ακολουθία κόμβων $W = (v_0, v_1, v_2, \quad \dots, v_k)$
τέτοια ώστε : $v_{i-1}v_i \in E$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, k$

- Ίχνος (trail)

- Διαδρομή ή Μονοπάτι (path)





Περίπατος – Ίχνος - Διαδρομή

- Περίπατος (walk)

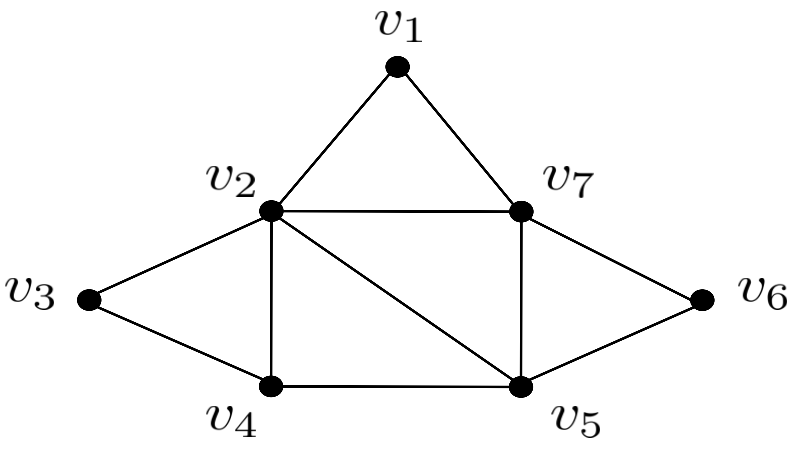
Ακολουθία κόμβων $W = (v_0, v_1, v_2, \quad \ldots, v_k)$
τέτοια ώστε : $v_{i-1}v_i \in E$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, k$

- Ίχνος (trail)

- Διαδρομή ή Μονοπάτι (path)

$$A_1 = (v_3, v_4, v_5, v_7, v_2, v_4, v_5, v_2, v_1)$$

$$A_2 = (v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_5, v_4, v_2, v_1)$$



Περίπατος – Ίχνος - Διαδρομή

- **Περίπατος (walk)**

  Ακολουθία κόμβων $W = (v_0, v_1, v_2, \quad \ldots, v_k)$
  τέτοια ώστε : $v_{i-1}v_i \in E$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, k$

- **Ίχνος (trail)**

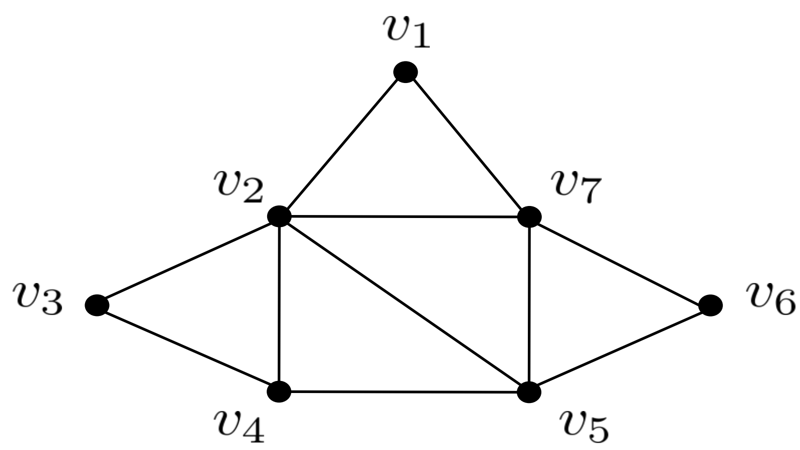
  Ένας περίπατος καμία <u>ακμή</u> του οποίου <u>δεν επαναλαμβάνεται</u>

- **Διαδρομή ή Μονοπάτι (path)**

$$A_1 = (v_3, v_4, v_5, v_7, v_2, v_4, v_5, v_2, v_1)$$

$$A_2 = (v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_5, v_4, v_2, v_1)$$

$$A_3 = (v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_5, v_2, v_1)$$



Περίπατος – Ίχνος - Διαδρομή

- **Περίπατος (walk)**

  Ακολουθία κόμβων $W = (v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k)$
  τέτοια ώστε : $v_{i-1}v_i \in E$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, k$

- **Ίχνος (trail)**

  Ένας περίπατος καμία <u>ακμή</u> του οποίου <u>δεν επαναλαμβάνεται</u>

- **Διαδρομή ή Μονοπάτι (path)**

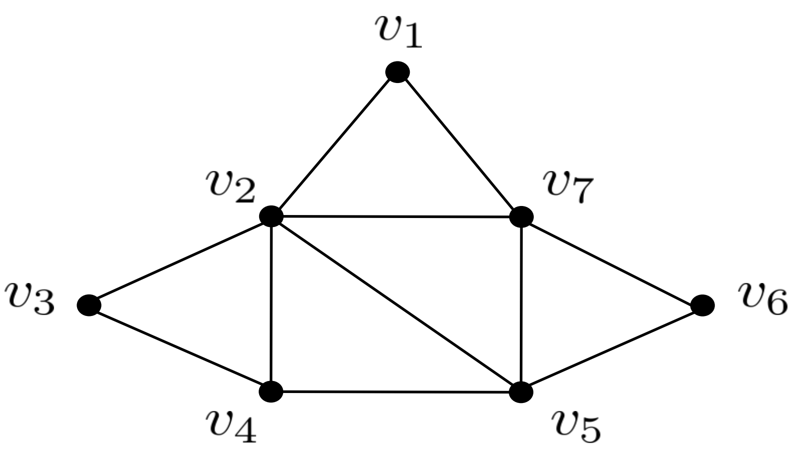
  Ένας περίπατος κανένας <u>κόμβος</u> του οποίου <u>δεν επαναλαμβάνεται</u>

$$A_1 = (v_3, v_4, v_5, v_7, v_2, v_4, v_5, v_2, v_1)$$

$$A_2 = (v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_5, v_4, v_2, v_1)$$

$$A_3 = (v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_5, v_2, v_1)$$

$$A_4 = (v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_2, v_1)$$



Περίπατος – Ίχνος - Διαδρομή

- **Περίπατος (walk)**

  Ακολουθία κόμβων $W = (v_0, v_1, v_2, \ \ \ldots, v_k)$ τέτοια ώστε : $v_{i-1}v_i \in E$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, k$

- **Ίχνος (trail)**

  Ένας περίπατος καμία <u>ακμή</u> του οποίου <u>δεν επαναλαμβάνεται</u>

- **Διαδρομή ή Μονοπάτι (path)**

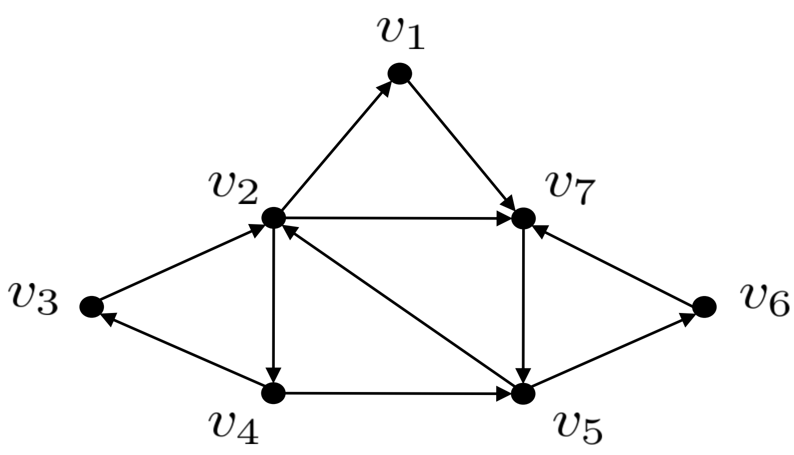
  Ένας περίπατος κανένας <u>κόμβος</u> του οποίου <u>δεν επαναλαμβάνεται</u>

$$B_1 = (v_3, v_2, v_7, v_5, v_2, v_7, v_5)$$

$$B_2 = (v_3, v_2, v_7, v_5, v_2, v_4, v_3)$$

$$B_3 = (v_3, v_2, v_7, v_5, v_2, v_1, v_7)$$

$$B_4 = (v_3, v_2, v_1, v_7, v_5)$$



Περίπατος – Ίχνος - Διαδρομή

- Περίπατος (walk)

Κλειστό Ίχνος (κύκλωμα)

- Ίχνος (trail)

Ένας περίπατος καμία <u>ακμή</u> του οποίου <u>δεν επαναλαμβάνεται</u>

- Διαδρομή ή Μονοπάτι (path)

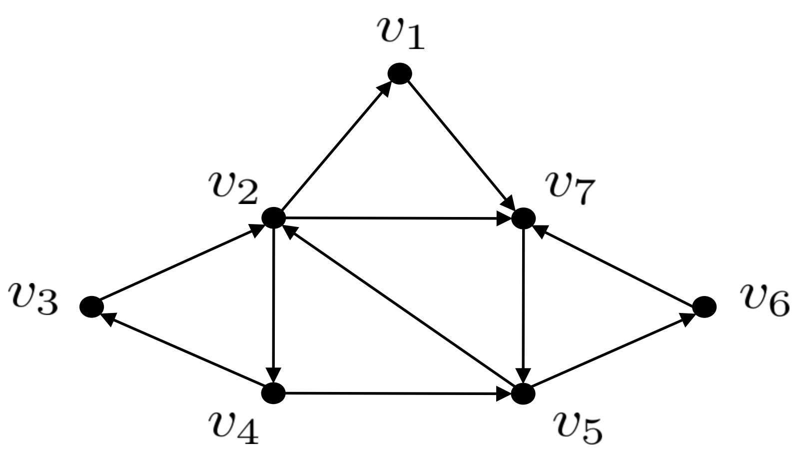
Ένας περίπατος κανένας <u>κόμβος</u> του οποίου <u>δεν επαναλαμβάνεται</u>

$$B_1 = (v_3, v_2, v_7, v_5, v_2, v_7, v_5)$$

$$B_2 = (v_3, v_2, v_7, v_5, v_2, v_4, v_3)$$

$$B_3 = (v_3, v_2, v_7, v_5, v_2, v_1, v_7)$$

$$B_4 = (v_3, v_2, v_1, v_7, v_5)$$



Περίπατος – Ίχνος - Διαδρομή

- Περίπατος (walk)
- Ίχνος (trail)
- Διαδρομή ή Μονοπάτι (path)

Κλειστό Ίχνος (κύκλωμα)

Κλειστή Διαδρομή (κύκλος)

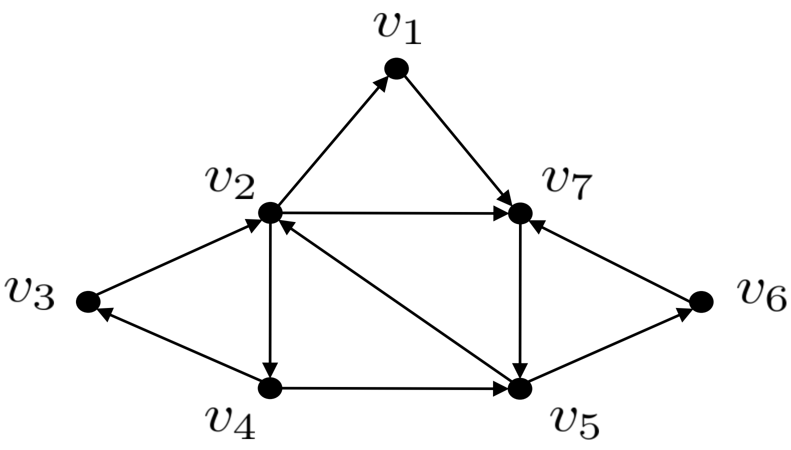
Ένας περίπατος κανένας κόμβος του οποίου δεν επαναλαμβάνεται

$$B_1 = (v_3, v_2, v_7, v_5, v_2, v_7, v_5)$$

$$B_2 = (v_3, v_2, v_7, v_5, v_2, v_4, v_3)$$

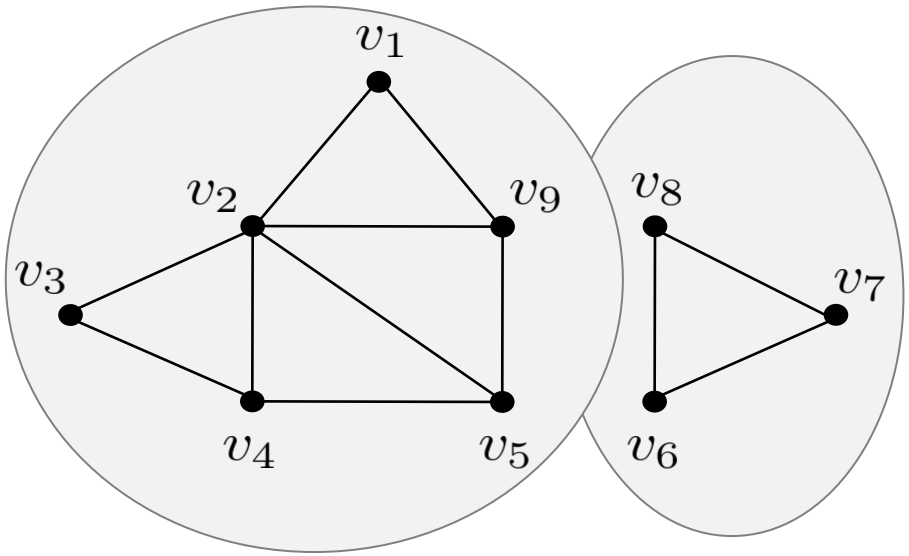
$$B_3 = (v_3, v_2, v_7, v_5, v_2, v_1, v_7)$$

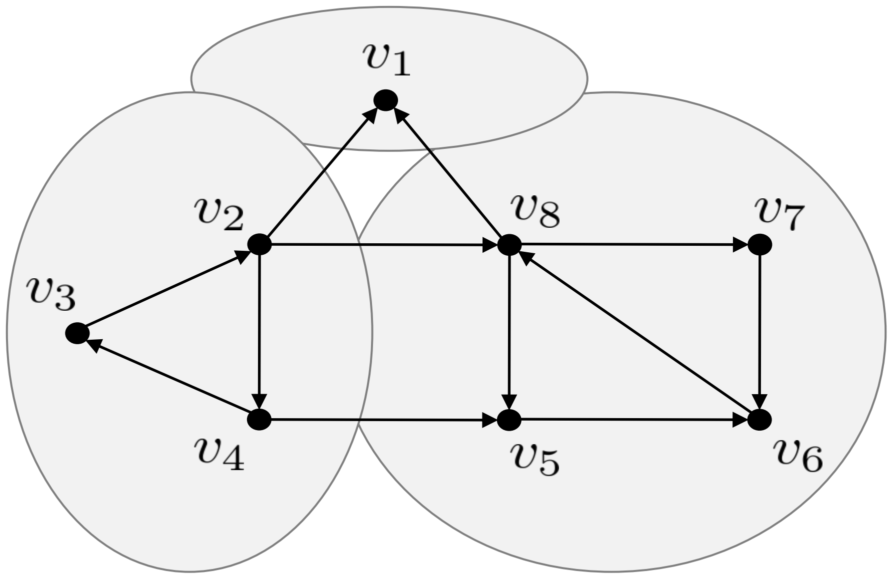
$$B_4 = (v_3, v_2, v_1, v_7, v_5)$$



Περίπατος – Ίχνος - Διαδρομή

- Συνεκτικότητα





Αποστάσεις

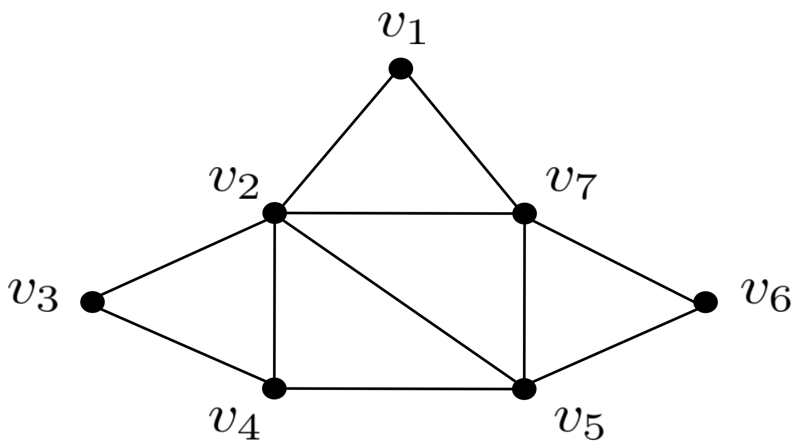
- $\boxed{\text{Μήκος}}$ Περιπάτου, Ίχνους, Μονοπατιού = $\boxed{\text{Πλήθος Ακμών}}$

$$A_1 = (v_3, v_4, v_5, v_7, v_2, v_4, v_5, v_2, v_1)$$

$$A_2 = (v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_5, v_4, v_2, v_1)$$

$$A_3 = (v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_5, v_2, v_1)$$

$$A_4 = (v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_2, v_1)$$



- P_n = άχορδο μονοπάτι με *n* κόμβους

Αποστάσεις

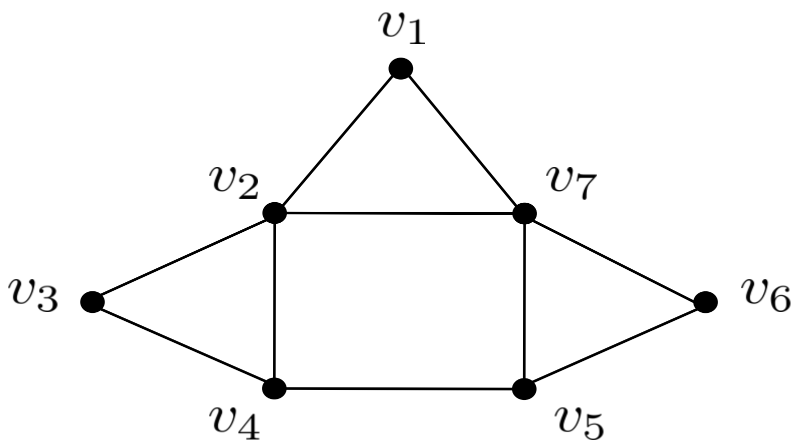
- Μήκος Περιπάτου, Ίχνους, Μονοπατιού = Πλήθος Ακμών

$$A_1 = (v_3, v_4, v_5, v_7, v_2, v_4, v_5, v_2, v_1)$$

$$A_2 = (v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_5, v_4, v_2, v_1)$$

$$A_3 = (v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_5, v_2, v_1)$$

$$A_4 = (v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_2, v_1)$$

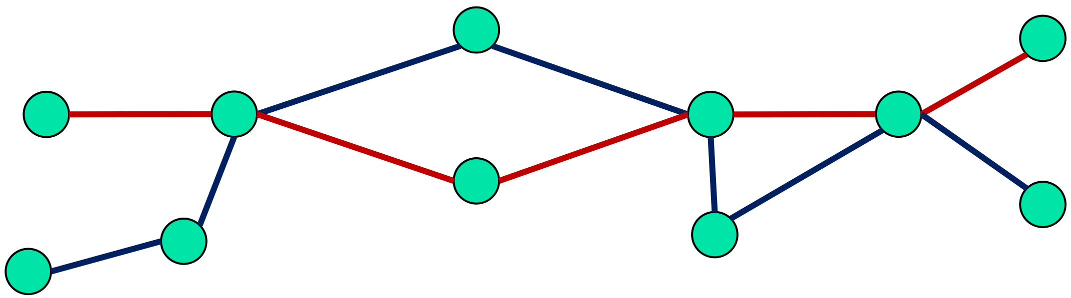


- P_n = άχορδο μονοπάτι με *n* κόμβους
- C_n = άχορδος κύκλος με *n* κόμβους

Αποστάσεις

- $\boxed{\text{Μήκος}}$ Περιπάτου, Ίχνους, Μονοπατιού = $\boxed{\text{Πλήθος Ακμών}}$

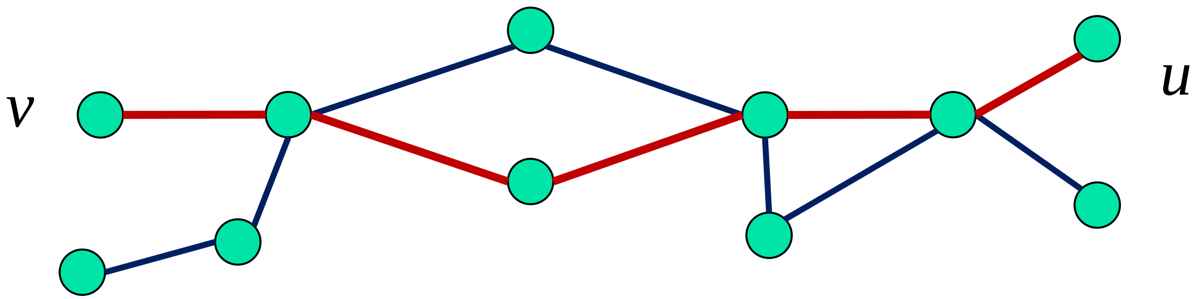
- Μονοπάτια ξένα ως προς τις ακμές (edge-disjoint paths)



Αποστάσεις

- Απόσταση δύο κόμβων *dist*(*v*, *u*)

  Μήκος της συντομότερης διαδρομής από τον κόμβο *v* στον κόμβο *u*



***dist*(*v*, *u*) = 5**

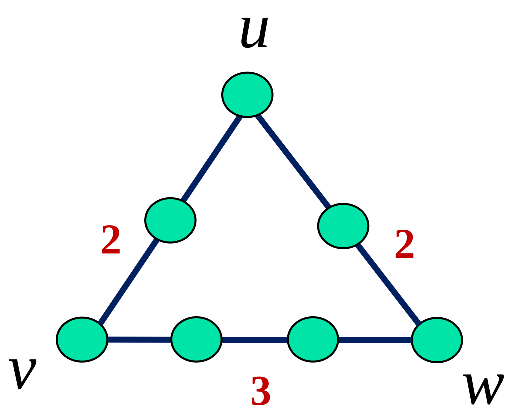
Αποστάσεις

- Απόσταση δύο κόμβων $dist(v, u)$

Μήκος της συντομότερης διαδρομής από τον κόμβο v στον κόμβο u

- Ιδιότητες Απόστασης

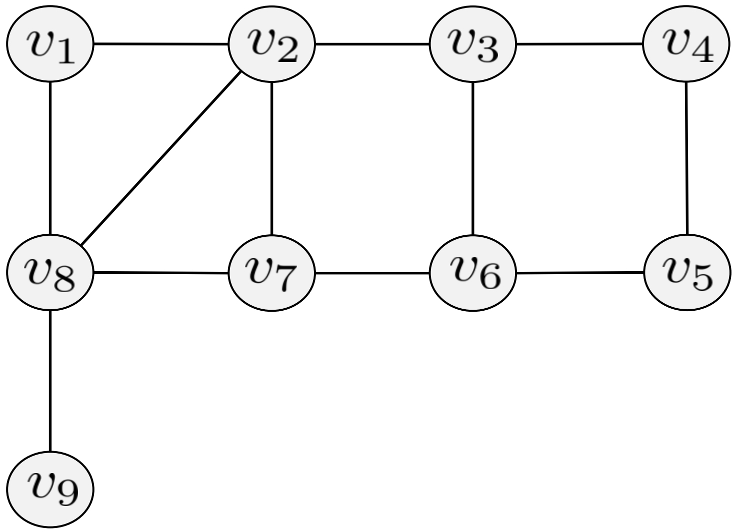
  - Μη-αρνητικότητα : $dist(v, u) > 0$ για $v \neq u$ $(dist(v, u) = 0$, εάν $v = u)$
  - Συμμετρικότητα : $dist(v, u) = dist(u, v)$
  - Ανισοϊσότητα τριγώνου : $dist(v, u) + dist(u, w) \geq dist(v, w)$

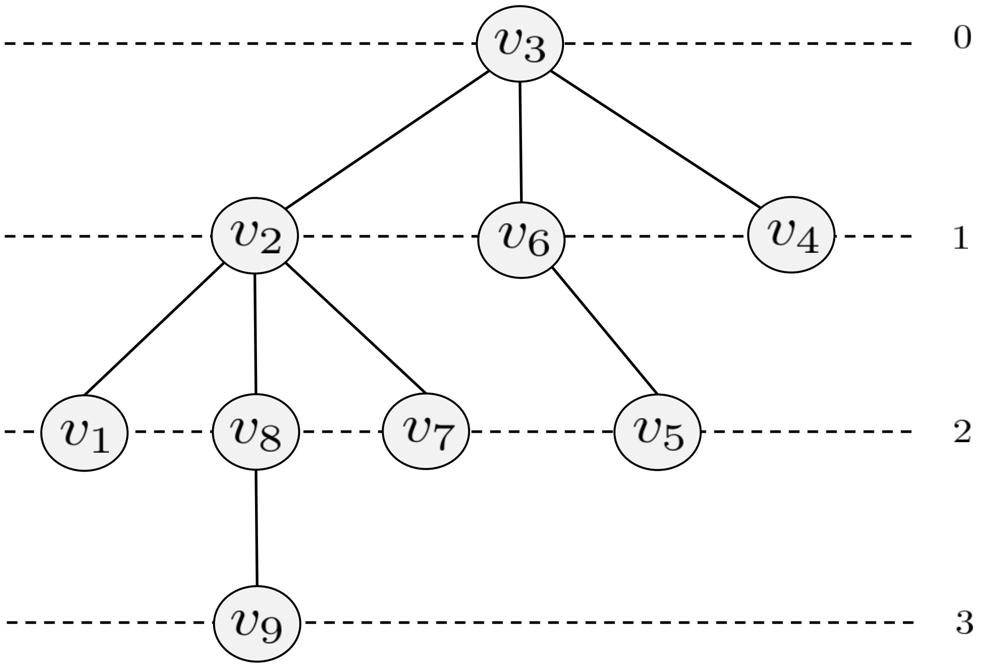


Αποστάσεις

- Αλγόριθμος Υπολογισμού της Απόσταση δύο κόμβων dist(*v*, *u*)

$s = v_3$



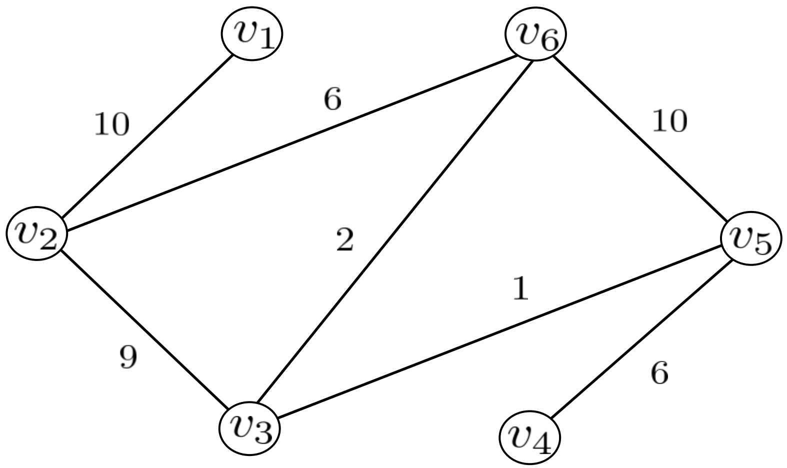


Αλγόριθμος του Moore (1959)

Αποστάσεις

- Απόσταση δύο κόμβων *dist*(*v*, *u*) σε έμβαρα γραφήματα

  Κόστος της συντομότερης διαδρομής από τον κόμβο *v* στον κόμβο *u*



***dist*(v_1, v_4) = 25**

- Αλγόριθμος Υπολογισμού της Απόσταση dist(*v*, *u*) σε έμβαρα γραφήματα

  Αλγόριθμος του Dijkstra (1959)

Αποστάσεις

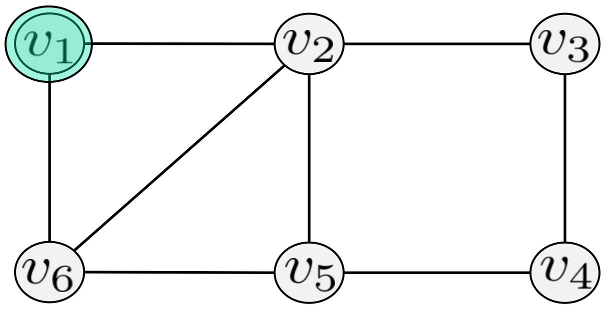
- Πρόβλημα

Που θα τοποθετηθεί το Πυροσβεστικό Τμήμα Άμεσης Ανάγκης;

- Εκκεντρικότητα (eccentricity) ενός κόμβου $e(v)$

Η μέγιστη απόσταση του v από κάποιον άλλον κόμβο u του γραφήματος, δηλαδή:

$$e(v) = \max \{ d(v,u) \mid u \in V(G) \}.$$



$e(v_1) = dist(v_1,v_2) = 1$

$e(v_1) = dist(v_1,v_3) = 2$

$e(v_1) = dist(v_1,v_4) = 3$

$e(v_1) = dist(v_1,v_5) = 2$

$e(v_1) = dist(v_1,v_5) = 2$

Αποστάσεις

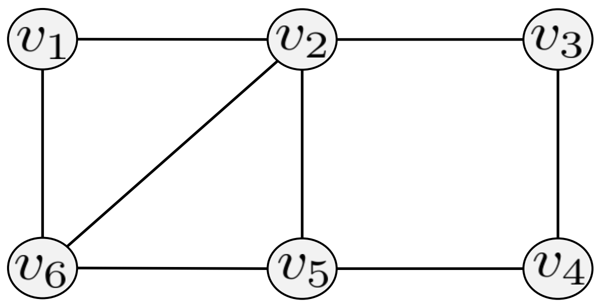
- Πρόβλημα

Που θα τοποθετηθεί το Πυροσβεστικό Τμήμα Άμεσης Ανάγκης;

- Εκκεντρικότητα (eccentricity) ενός κόμβου $e(v)$

Η μέγιστη απόσταση του v από κάποιον άλλον κόμβο u του γραφήματος, δηλαδή:

$$e(v) = \max \{ d(v,u) \mid u \in V(G) \}.$$



$e(v_1) = dist(v_1,v_4) = 3$

$e(v_2) = dist(v_2,v_4) = 2$

$e(v_3) = dist(v_3,v_6) = 2$

$e(v_4) = dist(v_4,v_1) = 3$

$e(v_5) = \ldots$

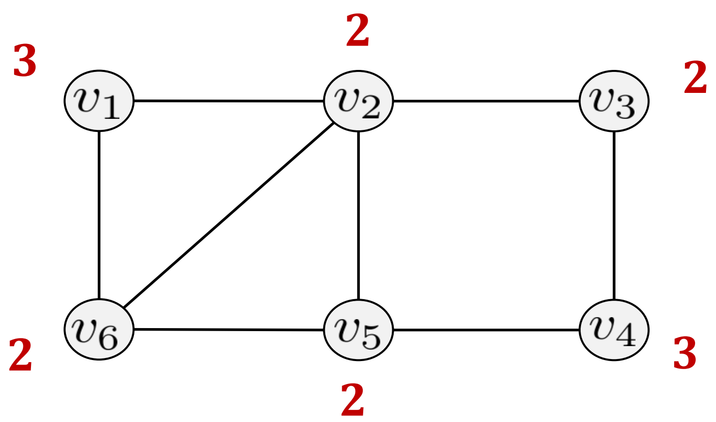
Αποστάσεις

- Ακτίνα (radius) ενός γραφήματος *radius*(*G*)

$$radius(G) = \min\{\, e(v) \mid v \in V(G)\}$$

- Διάμετρος (diameter) ενός γραφήματος *diameter*(*G*)

$$diameter(G) = \max\{\, e(v) \mid v \in V(G)\}.$$



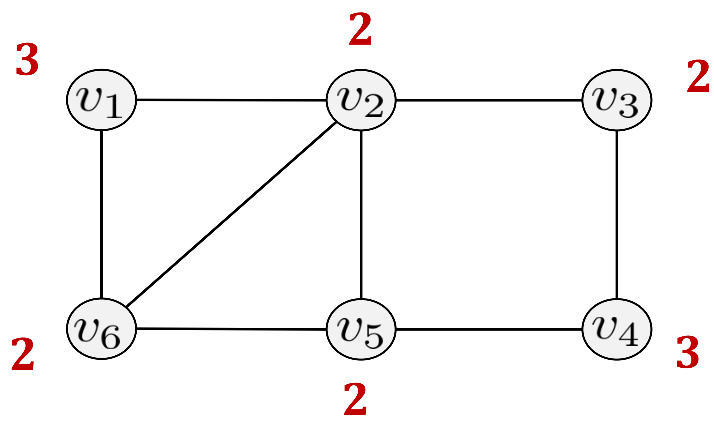
radius(*G*) = **2**

diameter(*G*) = **3**

Αποστάσεις

- Θεώρημα: Σε κάθε γράφημα G ισχύει:

$$radius(G) \leq diameter(G) \leq 2\,radius(G)$$



$radius(G) = \mathbf{2}$

$diameter(G) = \mathbf{3}$

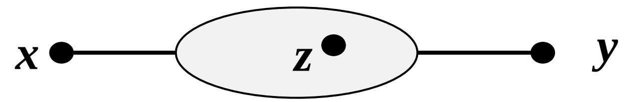
Αποστάσεις

Θεώρημα: Σε κάθε γράφημα *G* ισχύει:

$$radius(G) \leq diameter(G) \leq 2\, radius(G)$$

Απόδειξη:

- Η αριστερή ανισότητα ισχύει εξ ορισμού.



z : κόμβος
του κέντρου

- Δεξιά ανισότητα:

Θεωρούμε δύο κόμβους x, y : $dist(x, y) = diameter(G)$

Έστω z ένας κόμβος : το μεγαλύτερο συντομότερο μονοπάτι από τον z να έχει μήκος $radius(G)$. Τότε, $e(z) = radius(G)$.

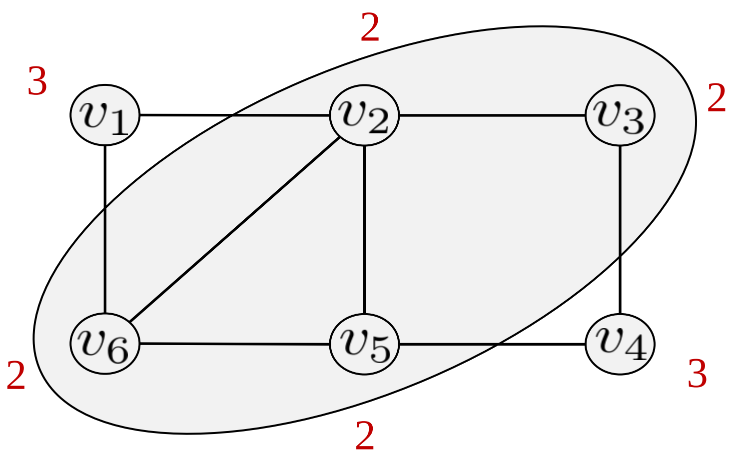
Από την ανισοϊσότητα τριγώνου:

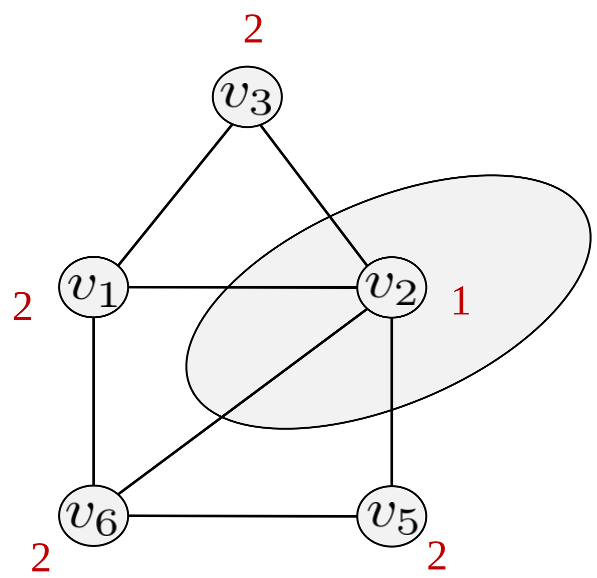
$$diameter(G) = dist(x, y) \leq dist(x, z) + dist(z, y) \leq e(z) + e(z) = 2\, radius(G).$$

Αποστάσεις

- Κέντρο (center) ενός γραφήματος *center*(*G*)

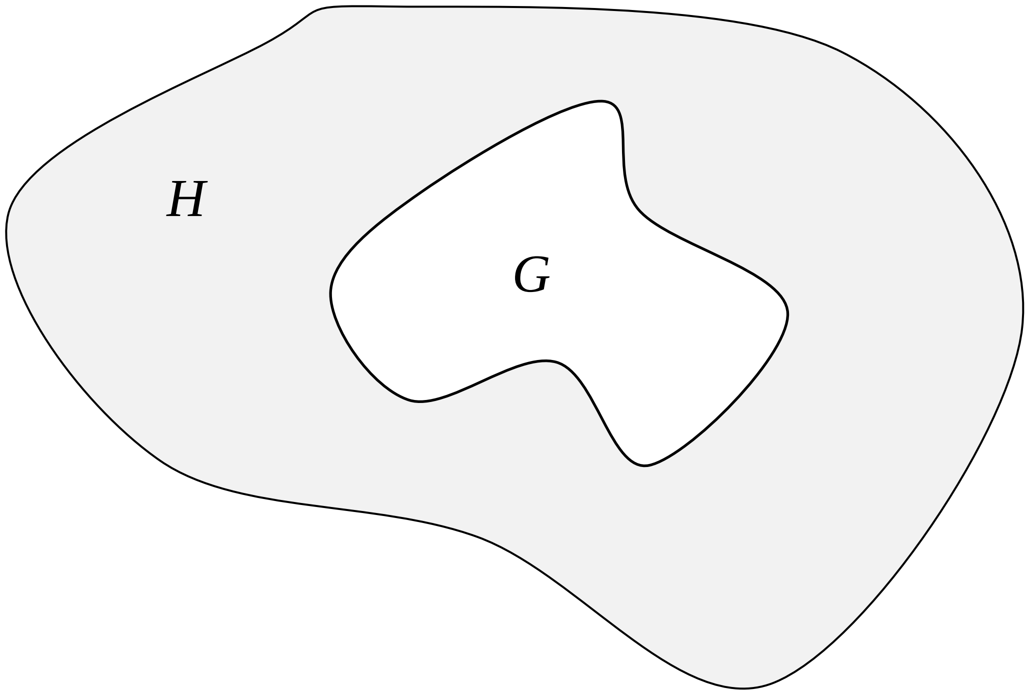
Το υπογράφημα του *G* που επάγεται από τους κομβους του με την **ελάχιστη εκκεντρικότητα**.





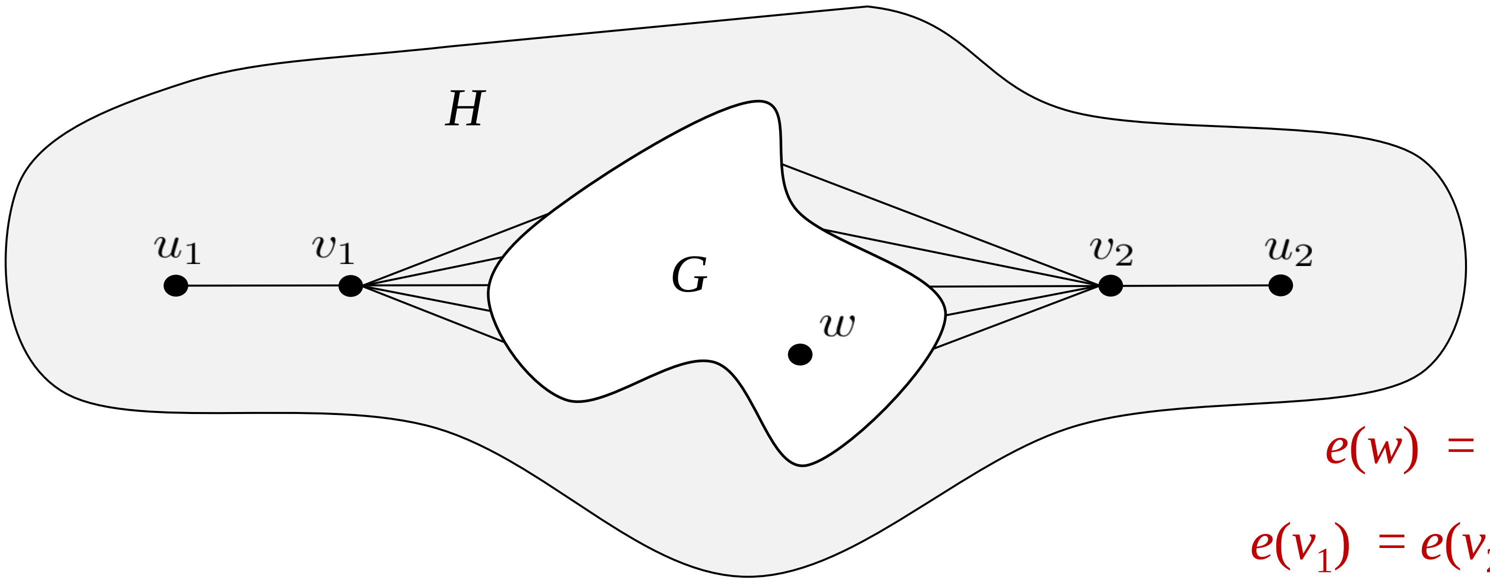
Αποστάσεις

- Θεώρημα: Κάθε γράφημα G είναι το κέντρο κάποιου συνεκτικού γραφήματος H.



Αποστάσεις

- Θεώρημα: Κάθε γράφημα G είναι το κέντρο κάποιου συνεκτικού γραφήματος H.



$$e(w) = 2$$

$$e(v_1) = e(v_2) = 3$$

$$e(u_1) = e(u_2) = 4$$

Αποστάσεις

- Πρόβλημα

  Από το Κεντρικό Ταχυδρομείο τα γράμματα πηγαίνουν σε μερικά Περιφερειακά Ταχυδρομεία και από εκεί στα σπίτια.

  Θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε το άθροισμα των αποστάσεων από το Κεντρικό στα Περιφερειακά Ταχυδρομεία.

- Απόσταση ενός κόμβου *dist*(*v*)

  Το άθροισμα των αποστάσεων του κόμβου *v* από όλους τους άλλους κόμβους του γραφήματος, δηλαδή

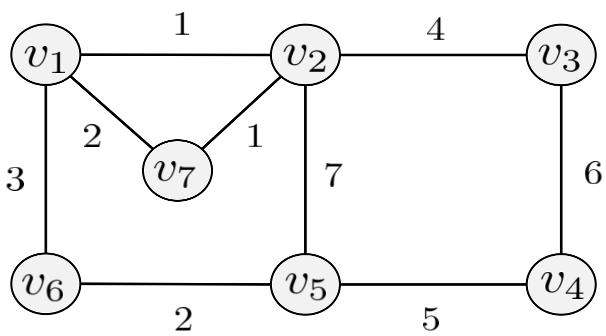
$$dist(v) = \sum_{u \in V(G)} dist(v, u)$$

Αποστάσεις

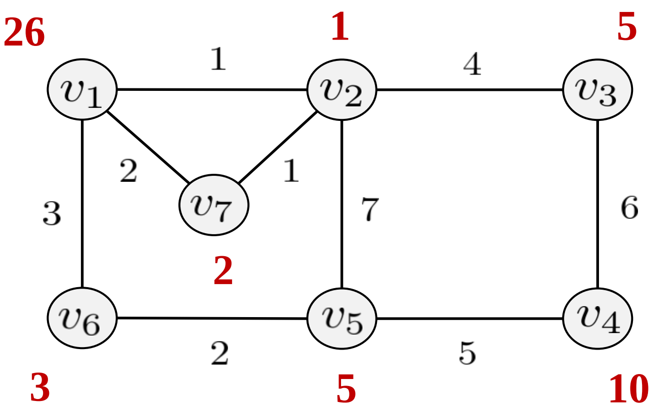
- **Απόσταση ενός κόμβου** *dist*(*v*)

Το άθροισμα των αποστάσεων του κόμβου *v* από όλους τους άλλους κόμβους του γραφήματος, δηλαδή

$$dist(v) = \sum_{u \in V(G)} dist(v, u)$$



$dist(v_1) = 26$

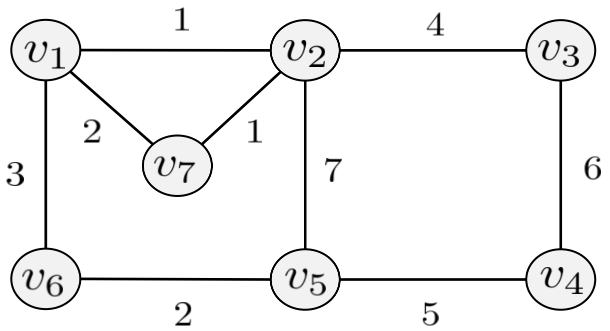


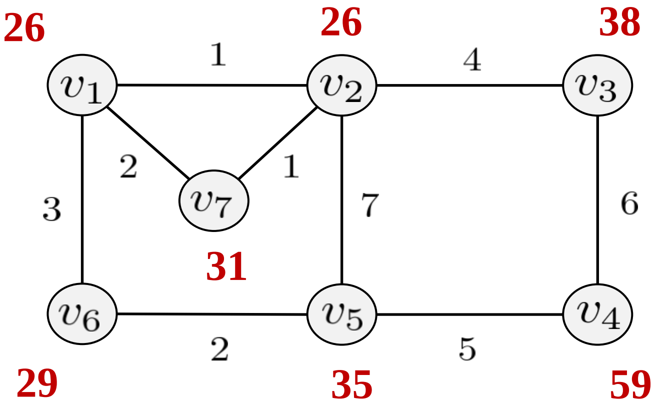
Αποστάσεις

- Απόσταση ενός κόμβου *dist*(*v*)

Το άθροισμα των αποστάσεων του κόμβου *v* από όλους τους άλλους κόμβους του γραφήματος, δηλαδή

$$dist(v) = \sum_{u \in V(G)} dist(v, u)$$



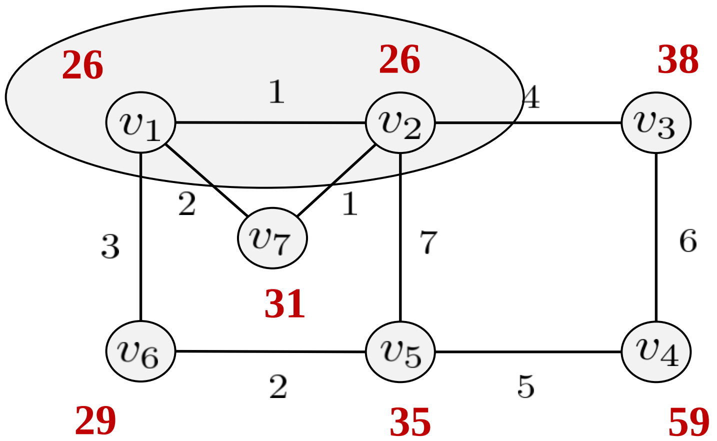


Κέντρο και Μέσο Γραφήματος

- Μέσο (median) ενός γραφήματος *median*(*G*)

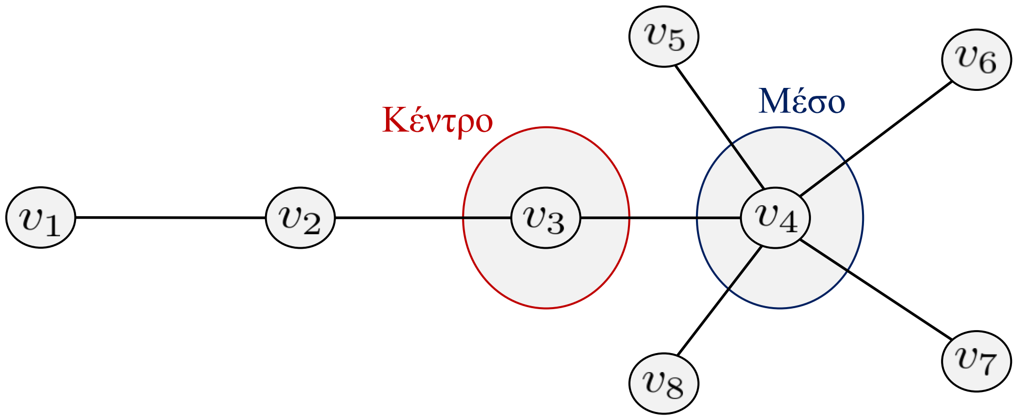
Το υπογράφημα του *G* που επάγεται από τους κομβους με την **ελάχιστη απόσταση**.

Κέντρο (center): Το επαγόμενο υπογράφημα με την **ελάχιστη εκκεντρικότητα.**



Κέντρο και Μέσο Γραφήματος

- Γενικά, Κέντρο (center) και το Μέσο (median) ενός γραφήματος ΔΕΝ ταυτίζονται!



$e(v_1) = 4$

$e(v_2) = 3$

$e(v_3) = 2$

$e(v_4) = 3$

$e(v_5) = 4$

$e(v_6) = 4$

$e(v_7) = 4$

$e(v_8) = 4$

$dist(v_1) = 0+1+2+3+4+4+4+4 = 22$

…

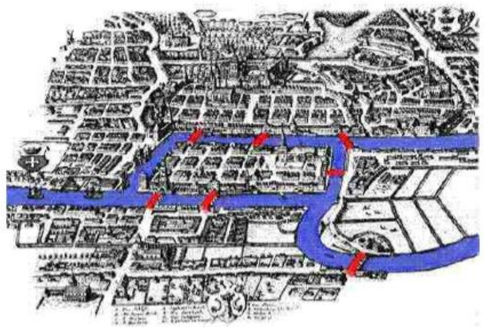
$dist(v_4) = 3+2+1+0+1+1+1+1 = 10$

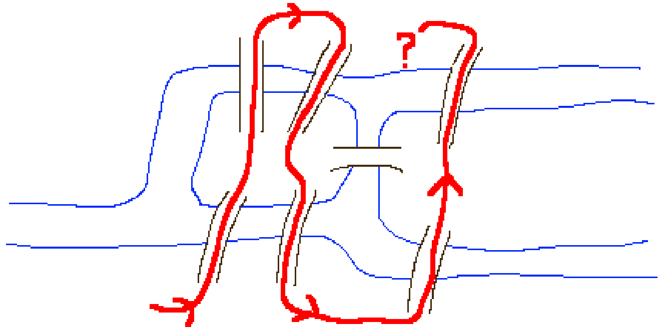
$dist(v_5) = 4+3+2+1+0+2+2+2 = 16$

…

Γραφήματα Euler

- Leonard Euler, Ελβετός, πατέρας Θεωρίας Γραφημάτων, 1736 πρόβλημα γεφυρών Koenigsburg

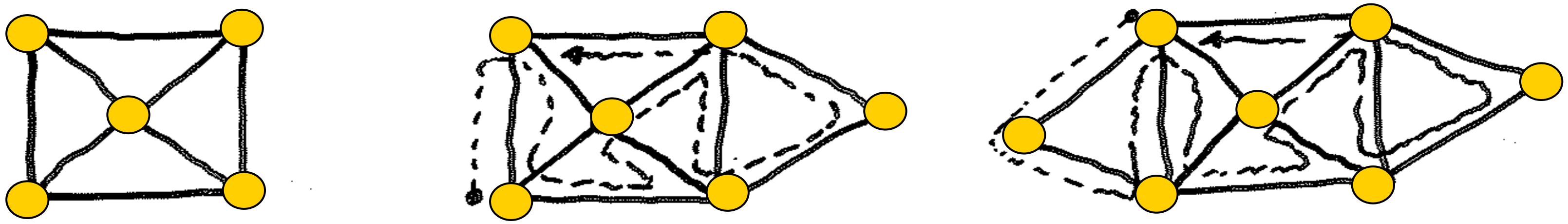




Πρόβλημα: είναι δυνατόν σε κάθε γράφημα να βρεθεί κλειστό ίχνος (κύκλωμα) που να περνά από όλες τις ακμές μία μόνο φορά?

Γραφήματα Euler

- Eulerian γράφημα: περιέχει κλειστό ίχνος (κύκλωμα)
- Semi-Eulerian γράφημα: περιέχει ανοικτό ίχνος (μονοπάτι)



- Ψυχαγωγικά προβλήματα, μονοκονδυλιές

Αποστάσεις

- Θεώρημα. Ένα γράφημα G είναι γράφημα **Euler** (αντίστοιχα, **Semi-Euler**) εάν-ν έχει **0 κόμβους** (αντίστοιχα, **2 κόμβους**) περιττού βαθμού.

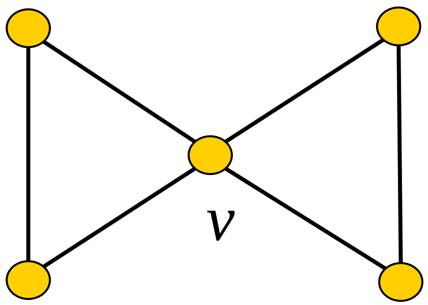
- Πρόβλημα. Πώς μπορούμε να διαπιστώσουμε αποτελεσματικά ότι ένα γράφημα είναι γράφημα Euler;

  Πολύ Εύκολα! Με dfs και εφαρμογή του θεωρήματος – σε γραμμικό χρόνο, δηλαδή O(n+m).

Αλγόριθμοι Εύρεσης Κύκλων Euler

Αυθαίρετα εξιχνιάσιμο από τον κόμβο *v* :

λέγεται ένα γράφημα στο οποίο μπορούμε να σχηματίσουμε κλειστό ίχνος (κύκλωμα) αρχίζοντας από τον κόμβο *v*.



Αυθαίρετα εξιχνιάσιμο μόνο από τον κόμβο *v* ?

Αλγόριθμοι Εύρεσης Κύκλων Euler

Αλγόριθμοι:

- Fleury (<1921): με σταδιακή επέκταση του ίχνους Ti αποφεύγοντας τις γέφυρες στο υπογράφημα G-E(Ti) εκτός αν δεν υπάρχει άλλη επιλογή

$T_i = (v_0, e_1, v_1, \dots, e_i, v_i)$

- Hierholtzer (1873): με συγκόλληση επιμέρους κυκλωμάτων

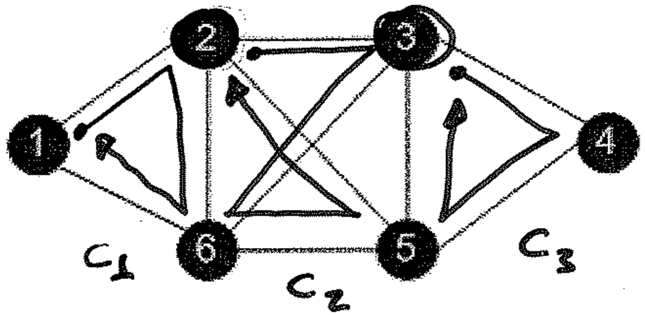
επιλέγεται $v_i \to v_{i+1} \notin T_i$

- Tucker (1976): με διάσπαση κορυφών ώστε να σχηματιστούν ξένοι επιμέρους κύκλοι, και συγκόλληση κύκλων

Αλγόριθμοι Εύρεσης Κύκλων Euler

- Γράφημα για Αλγόριθμο Hierholtzer

επιλέγεται κόμβος $v \in C_i$ πού είναι προσκείμενος σε ακμή $\notin C_i$.

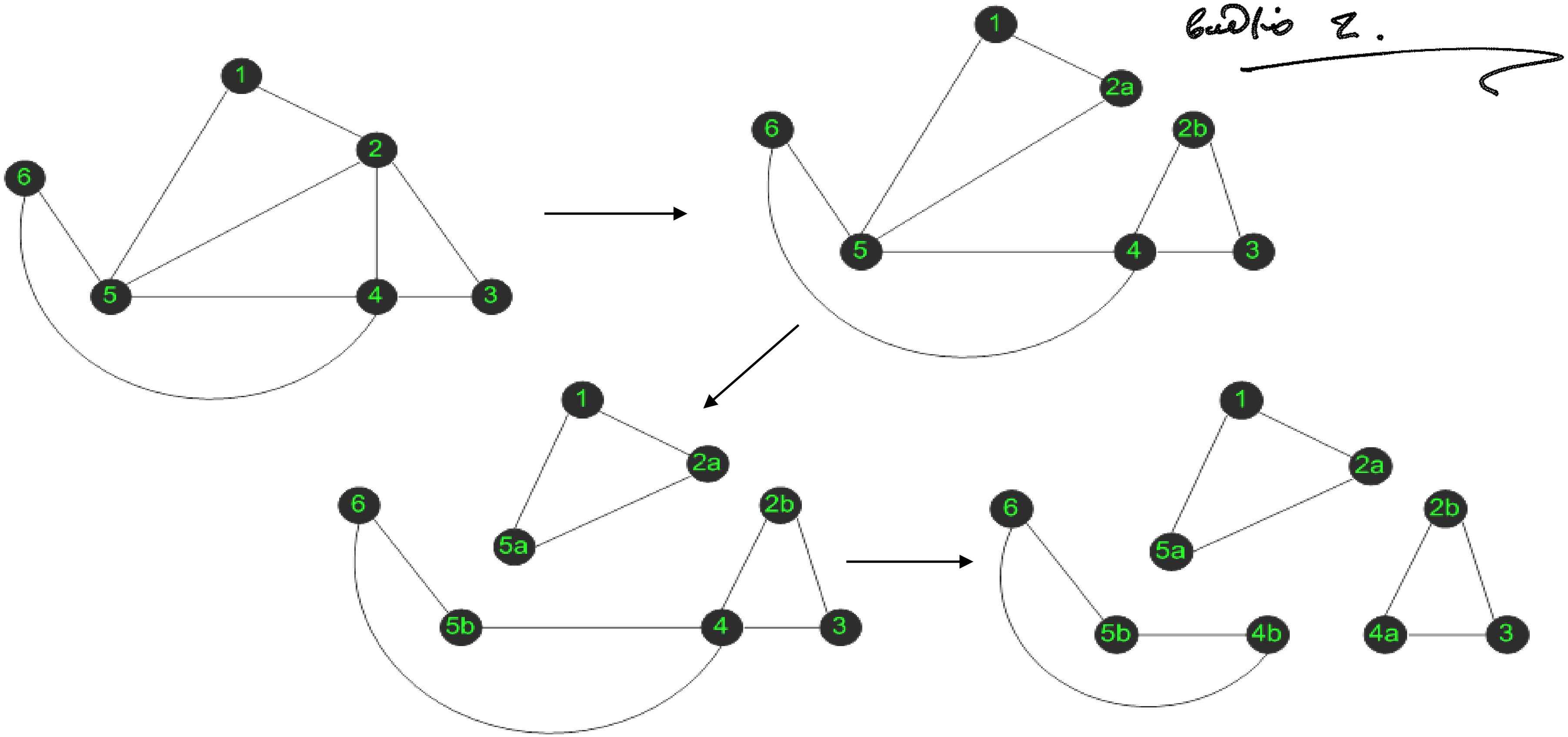


- Αρχικά:
  - $1 \to 2 \to 6 \to 1$
  - $2 \to 3 \to 6 \to 5 \to 2$
  - $3 \to 5 \to 4 \to 3$
- Ενώνουμε διαδοχικά:
  - $1 \to 2 \to 3 \to 6 \to 5 \to 2 \to 6 \to 1$ $\quad c_1 + c_2 = c'$
- Τελικά:
  - $1 \to 2 \to 3 \to 5 \to 4 \to 3 \to 6 \to 5 \to 2 \to 6 \to 1$ $\quad c' + c_3$

Αλγόριθμοι Εύρεσης Κύκλων Euler

- Γράφημα για Αλγόριθμο Tucker

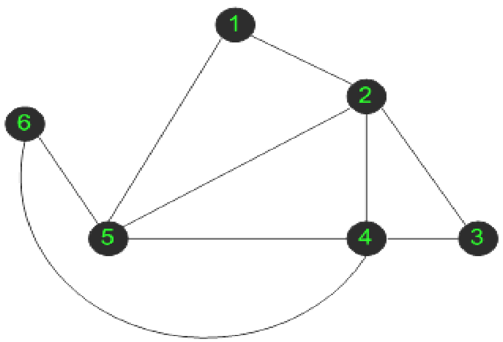
Διάσπαση κόμβων μέχρι όλοι οι κόμβοι να έχουν βαθμό 2.

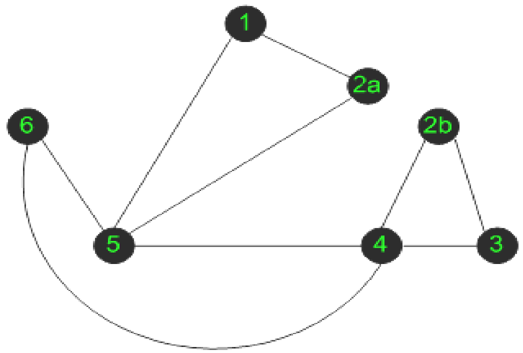


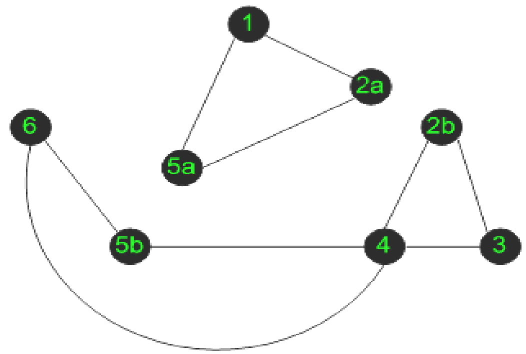
Αλγόριθμοι Εύρεσης Κύκλων Euler

- Αρχικά:

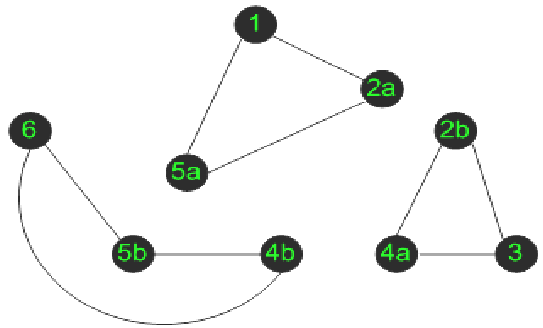
  (α) 1 → 2 → 5 → 1   (β) 5 → 4 → 6 → 5   (γ) 2 → 3 → 4 → 2







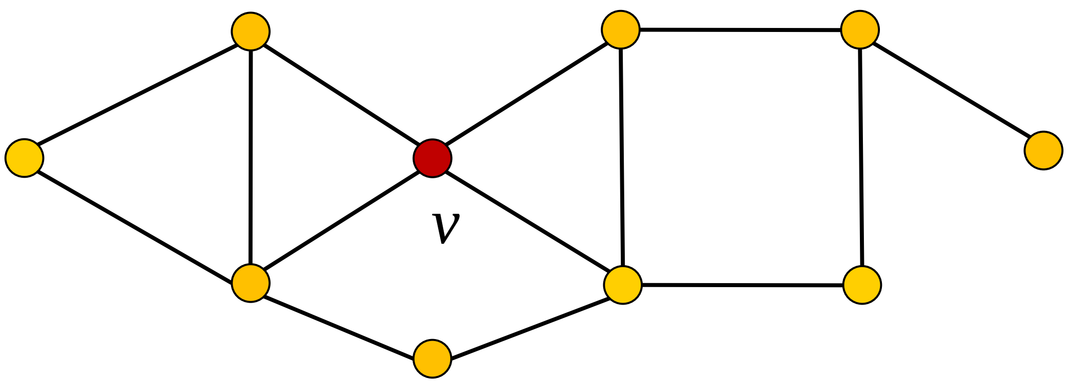
- Τελικά:
  - 1 → 2 → 3 → 4 → 2 → 5 → 4 → 6 → 5



Πρόβλημα Κινέζου Ταχυδρόμου

Τέθηκε από κινέζο μαθηματικό (1962) M.K. Kwan

Πρόβλημα: ένας ταχυδρόμος ξεκινάει από το γραφείο του, πρέπει να περάσει απ' όλους τους δρόμους και επιστρέφει στο γραφείο του, το <u>συντομότερο</u> !!!!



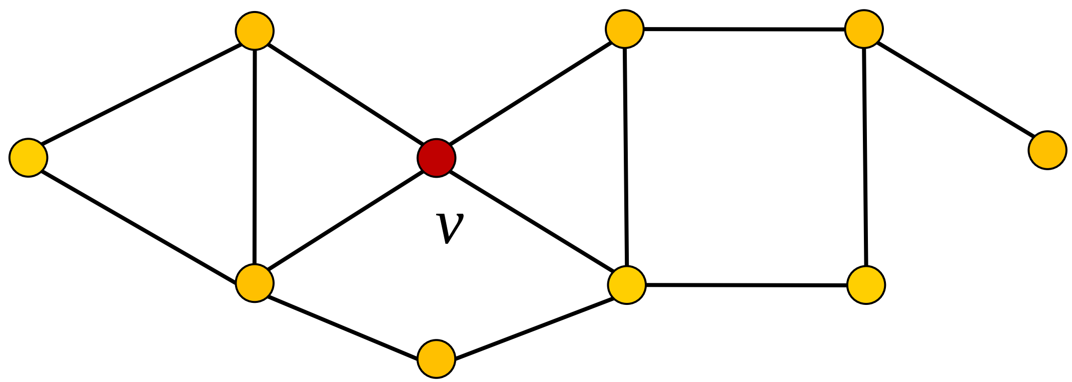
Θεωρούμε απλό γράφημα (όχι έμβαρο) και αναζητούμε Eulerian κύκλο!

Πρόβλημα Κινέζου Ταχυδρόμου

Τέθηκε από κινέζο μαθηματικό (1962) M.K. Kwan

Πρόβλημα: ένας ταχυδρόμος ξεκινάει από το γραφείο του, πρέπει να περάσει απ' όλους τους δρόμους και επιστρέφει στο γραφείο του, το <u>συντομότερο</u> !!!!

- Αν το γράφημα δεν είναι Eulerian, τότε πρέπει κάποιες ακμές να διασχισθούν περισσότερο από μία φορές. Πόσες?



Πρόβλημα Κινέζου Ταχυδρόμου

Τέθηκε από κινέζο μαθηματικό (1962) M.K. Kwan

Πρόβλημα: ένας ταχυδρόμος ξεκινάει από το γραφείο του, πρέπει να περάσει απ' όλους τους δρόμους και επιστρέφει στο γραφείο του, το συντομότερο !!!!

- Αν το γράφημα δεν είναι Eulerian, τότε πρέπει κάποιες ακμές να διασχισθούν περισσότερο από μία φορές. Πόσες?

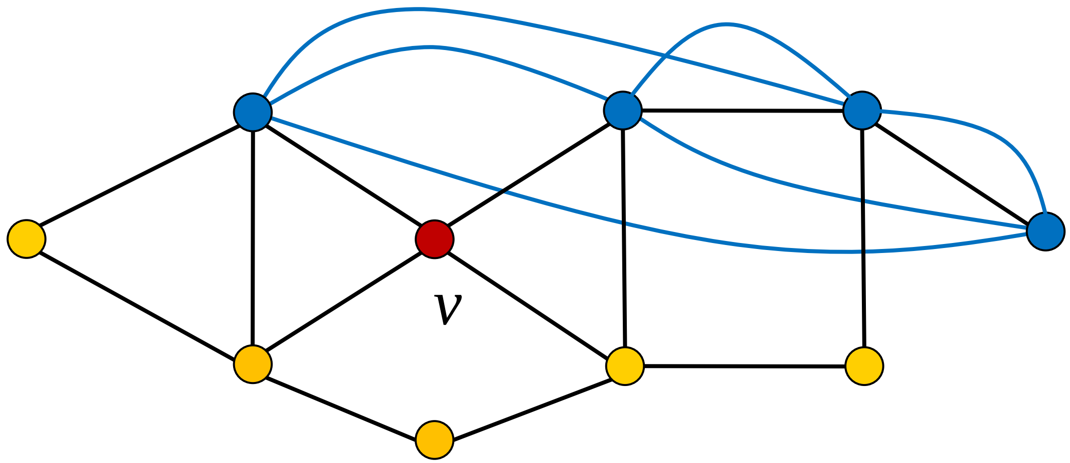
Εάν G δένδρο, τότε κάθε ακμή 2 φορές

Το μήκος $\boldsymbol{l}$ της βέλτιστης λύσης είναι: $|E| \leq \boldsymbol{l} \leq 2|E|$

Πρόβλημα Κινέζου Ταχυδρόμου

Μια λύση του προβλήματος είναι η εξής:

Θεωρούμε τους κόμβους περιττού βαθμού και τους ενώνουμε (όλους προς όλους) με πλασματικές ακμές (όπου χρειάζεται) βάρους ίσου με το μήκος του συντομότερου μονοπατιού.



Βασική Ιδέα !

Το προκύπτον γράφημα είναι Euler (γιατί?)

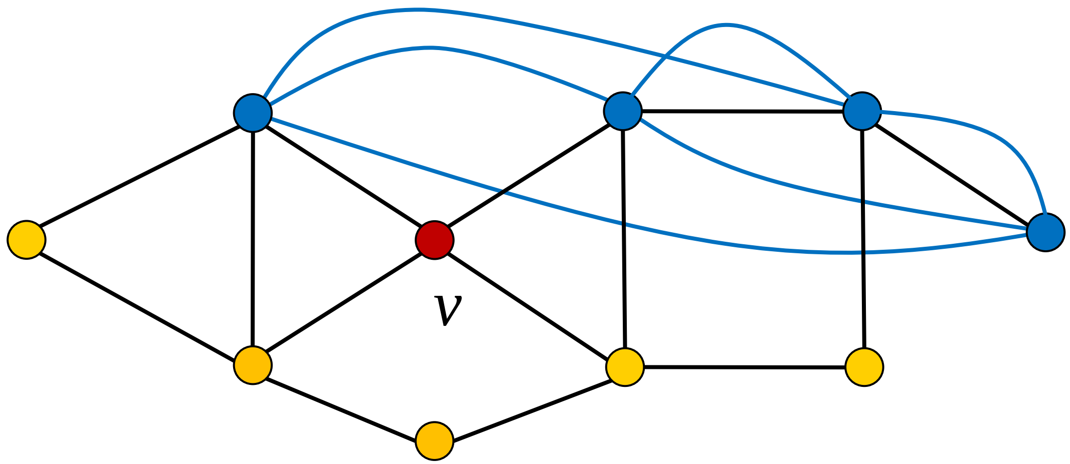
Πρόβλημα Κινέζου Ταχυδρόμου

Μια λύση του προβλήματος είναι η εξής:

Εφαρμόζουμε έναν αλγόριθμο υπολογισμού Euler κυκλώματος, και στη συνέχεια

αντικαθιστούμε κάθε πλασματική ακμή xy με ένα πραγματικό συντομότερο μονοπάτι από τον κόμβο x στον κόμβο y.

Βασική Ιδέα !



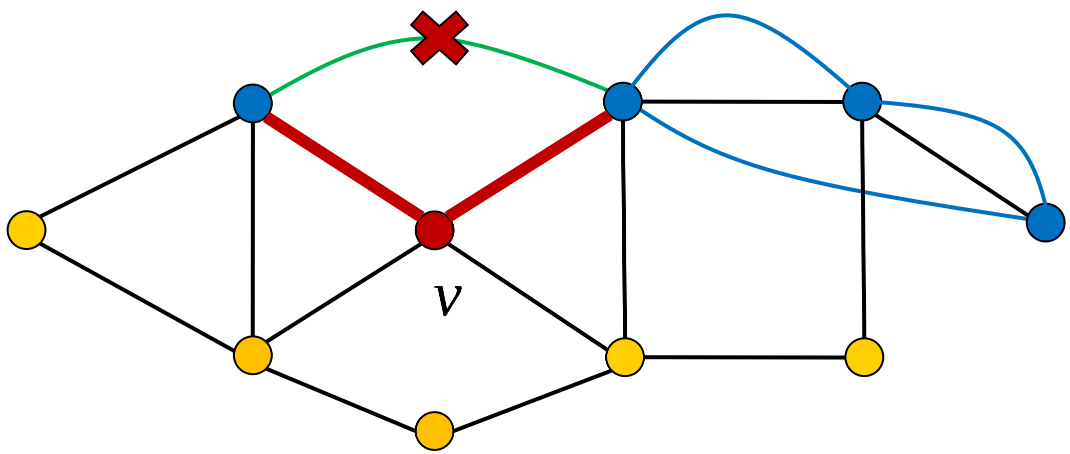
Πρόβλημα Κινέζου Ταχυδρόμου

Μια λύση του προβλήματος είναι η εξής:

Εφαρμόζουμε έναν αλγόριθμο υπολογισμού Euler κυκλώματος, και στη συνέχεια

αντικαθιστούμε κάθε πλασματική ακμή xy με ένα πραγματικό συντομότερο μονοπάτι από τον κόμβο x στον κόμβο y.

Βασική Ιδέα !



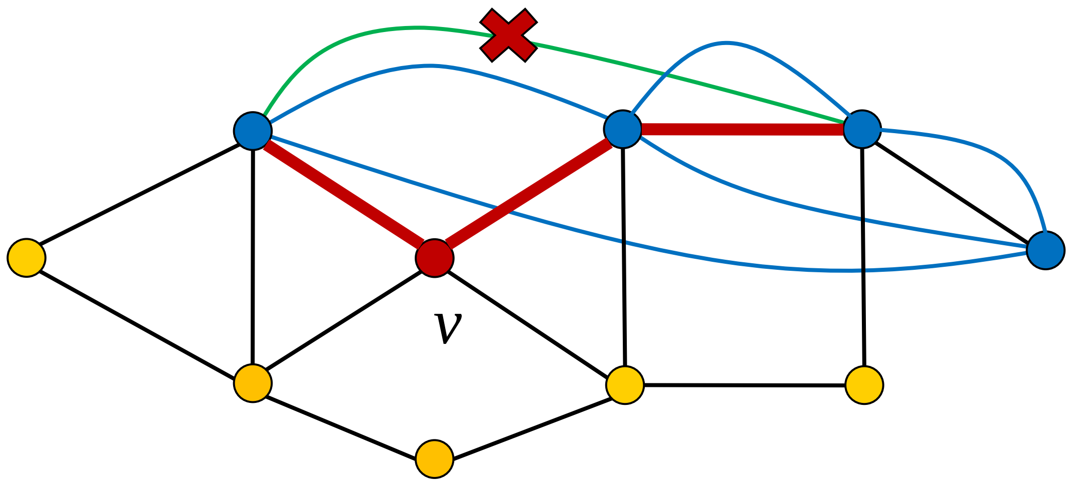
Πρόβλημα Κινέζου Ταχυδρόμου

Μια λύση του προβλήματος είναι η εξής:

Εφαρμόζουμε έναν αλγόριθμο υπολογισμού Euler κυκλώματος, και στη συνέχεια

αντικαθιστούμε κάθε πλασματική ακμή xy με ένα πραγματικό συντομότερο μονοπάτι από τον κόμβο x στον κόμβο y.

Βασική Ιδέα !



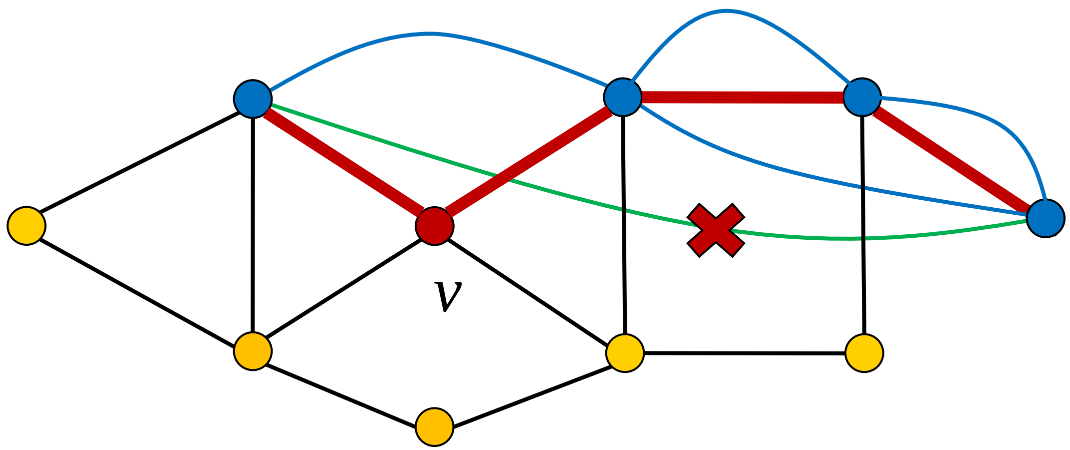
Πρόβλημα Κινέζου Ταχυδρόμου

Μια λύση του προβλήματος είναι η εξής:

Εφαρμόζουμε έναν αλγόριθμο υπολογισμού Euler κυκλώματος, και στη συνέχεια

αντικαθιστούμε κάθε πλασματική ακμή xy με ένα πραγματικό συντομότερο μονοπάτι από τον κόμβο x στον κόμβο y.

Βασική Ιδέα !



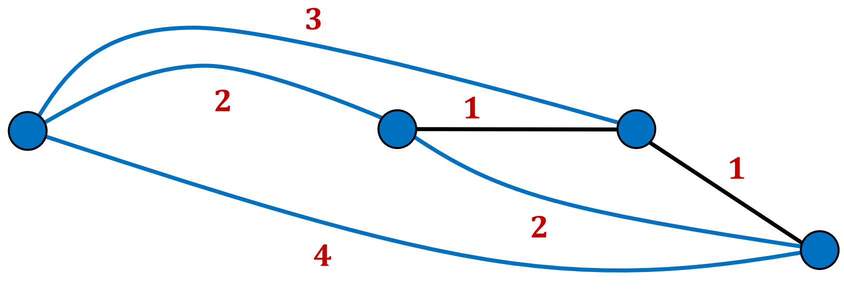
Πρόβλημα Κινέζου Ταχυδρόμου

Μια λύση του προβλήματος είναι η εξής:

Εφαρμόζουμε έναν αλγόριθμο υπολογισμού Euler κυκλώματος, και στη συνέχεια

αντικαθιστούμε κάθε πλασματική ακμή xy με ένα πραγματικό συντομότερο μονοπάτι από τον κόμβο x στον κόμβο y.

Βέλτιστες Αντιστοιχίσεις !

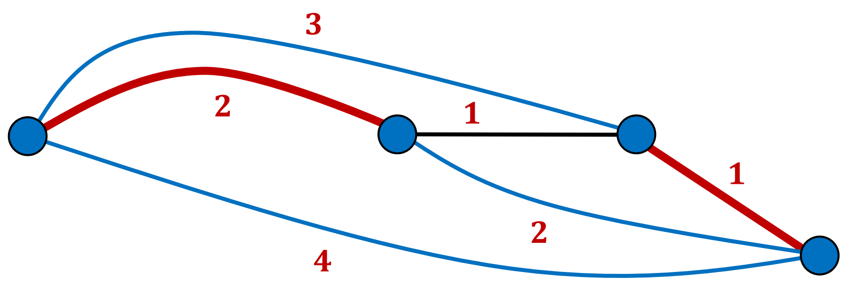


Πρόβλημα Κινέζου Ταχυδρόμου

Μια λύση του προβλήματος είναι η εξής:

Εφαρμόζουμε έναν αλγόριθμο υπολογισμού Euler κυκλώματος, και στη συνέχεια

αντικαθιστούμε κάθε πλασματική ακμή xy με ένα πραγματικό συντομότερο μονοπάτι από τον κόμβο x στον κόμβο y.



Βέλτιστες Αντιστοιχίσεις !

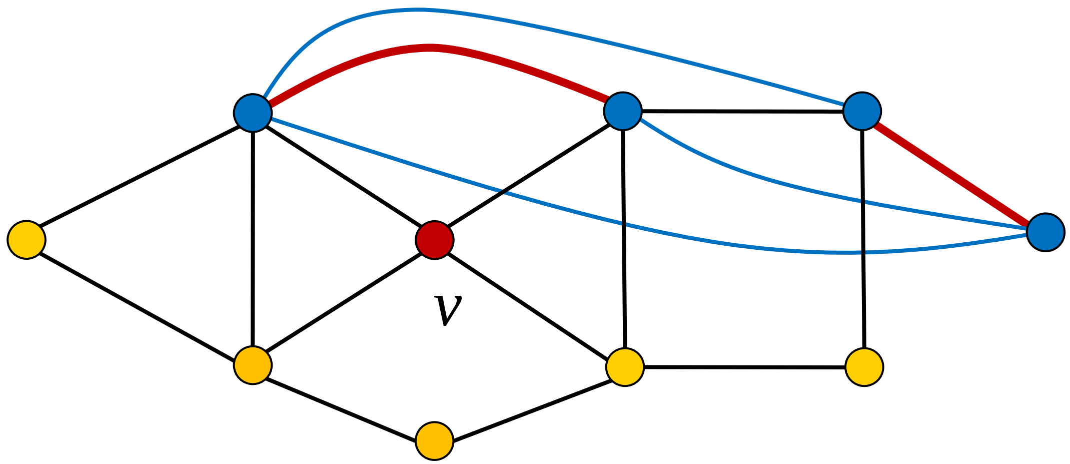
Πρόβλημα Κινέζου Ταχυδρόμου

Μια λύση του προβλήματος είναι η εξής:

Εφαρμόζουμε έναν αλγόριθμο υπολογισμού Euler κυκλώματος, και στη συνέχεια

αντικαθιστούμε κάθε πλασματική ακμή xy με ένα πραγματικό συντομότερο μονοπάτι από τον κόμβο x στον κόμβο y.

Βέλτιστες Αντιστοιχίσεις !



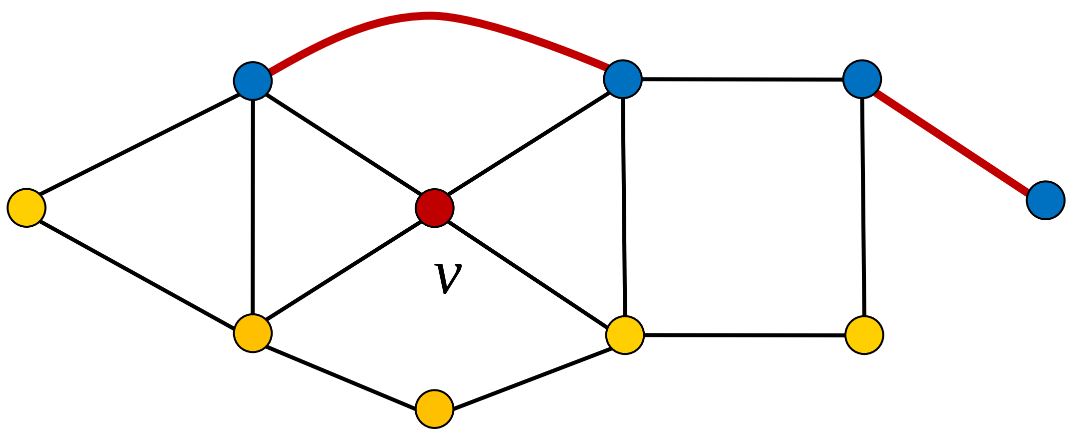
Πρόβλημα Κινέζου Ταχυδρόμου

Μια λύση του προβλήματος είναι η εξής:

Εφαρμόζουμε έναν αλγόριθμο υπολογισμού Euler κυκλώματος, και στη συνέχεια

αντικαθιστούμε κάθε πλασματική ακμή xy με ένα πραγματικό συντομότερο μονοπάτι από τον κόμβο x στον κόμβο y.

Βέλτιστες Αντιστοιχίσεις !



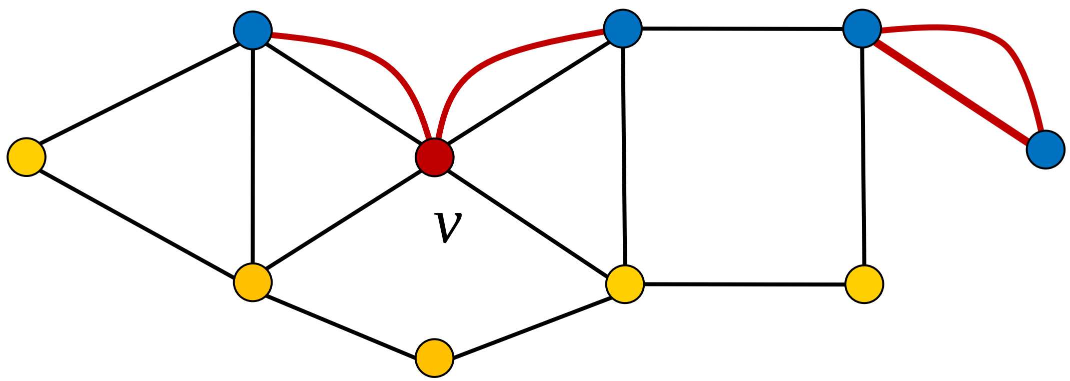
Πρόβλημα Κινέζου Ταχυδρόμου

Μια λύση του προβλήματος είναι η εξής:

Εφαρμόζουμε έναν αλγόριθμο υπολογισμού Euler κυκλώματος, και στη συνέχεια

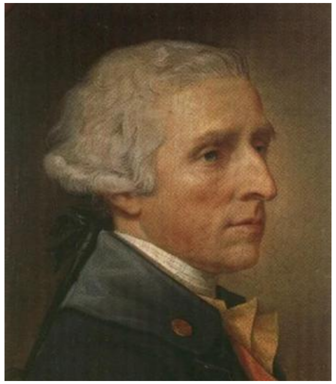
αντικαθιστούμε κάθε πλασματική ακμή xy με ένα πραγματικό συντομότερο μονοπάτι από τον κόμβο x στον κόμβο y.

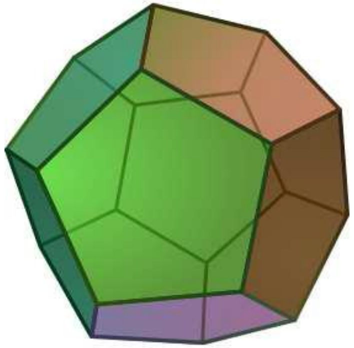
Βέλτιστες Αντιστοιχίσεις !

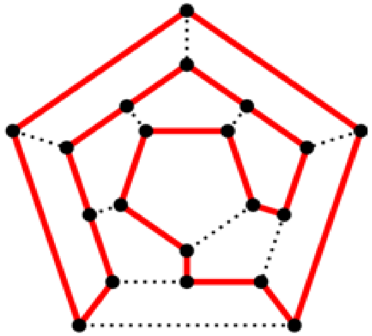


Γραφήματα Hamilton

- Sir William Hamilton, Ιρλανδός, 1856 «Γύρος του Κόσμου», 12εδρο



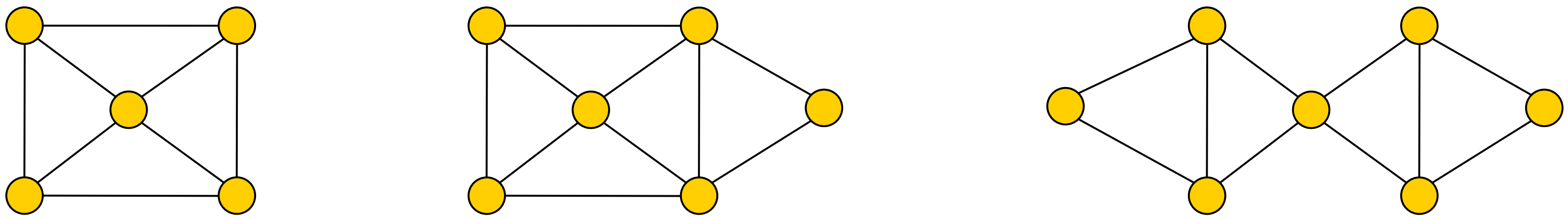




Πρόβλημα: είναι δυνατόν σε κάθε γράφημα να βρεθεί κλειστό μονοπάτι (κύκλος) που να περνά από όλους τους κόμβους μία μόνο φορά?

Γραφήματα Hamilton

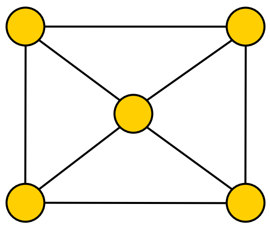
- Hamiltonian γράφημα: περιέχει κλειστό μονοπάτι (κύκλο)

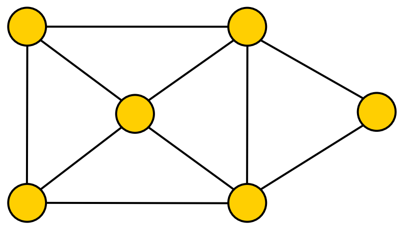


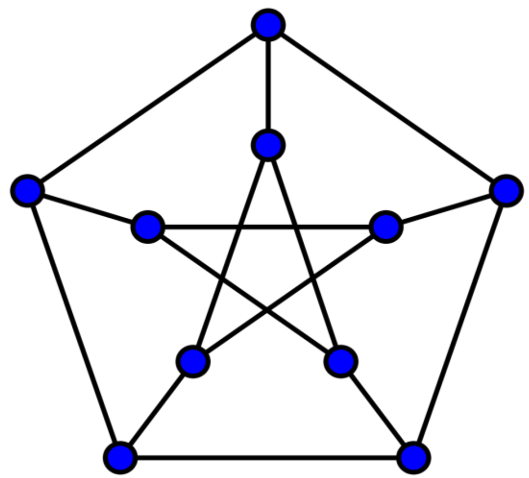
- Ψυχαγωγικά προβλήματα, μονοκονδυλιές

Γραφήματα Hamilton

- Hamiltonian γράφημα: περιέχει κλειστό μονοπάτι (κύκλο)







- Ψυχαγωγικά προβλήματα, μονοκονδυλιές

Γραφήματα Hamilton

- Πρόβλημα: ποια είναι η ικανή και αναγκαία συνθήκη, ώστε ένα γράφημα να είναι Hamiltonian?

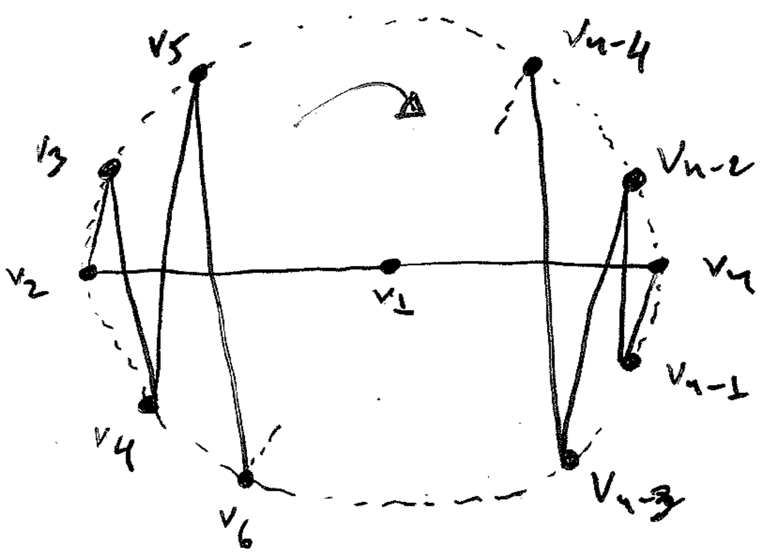
NP-πλήρες

- Το γράφημα K_n είναι Hamiltonian, για κάθε $n \geq 1$.
- Κάθε γράφημα K_n με περιττό πλήθος κόμβων έχει $(n-1)/2$ Hamiltonian κύκλους ξένους ως προς τις ακμές.

Γραφήματα Hamilton

n περιττό

K_n έχει $\frac{n-1}{2}$ Hamiltonian κύκλους ξένους ως προς τις ακμές



- K_n $\frac{n(n-1)}{2}$ ακμές
- Hamiltonian κύκλος n ακμές

$\Downarrow$

- Άρα, K_n έχει το πολύ $\frac{n-1}{2}$ κύκλους ξένους...
- Θα δείξουμε ότι έχει ακριβώς $\frac{n-1}{2}$ κύκλους.

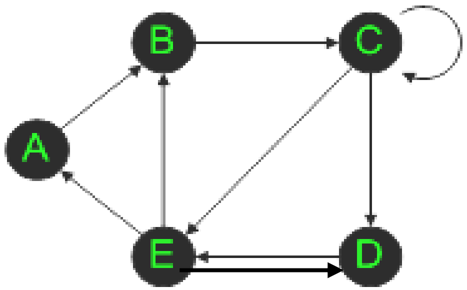
Αλγόριθμος Εύρεσης Κύκλου Hamilton

Πίνακας Reachability

πολλαπλασιασμός πινάκων και concatenation των εισόδων

- Προκύπτει πίνακας M^* μετά από n-1 πολλαπλασιασμούς
- Ελέγχεται αν οι είσοδοι του M^* είναι Hamiltonian μονοπάτια/κύκλοι

Αλγόριθμος Εύρεσης Κύκλου Hamilton



A	0	B	0	0	0
B	0	0	C	0	0
C	0	0	0	D	E
D	0	0	0	0	E
E	A	B	0	D	0

M

$\longrightarrow$

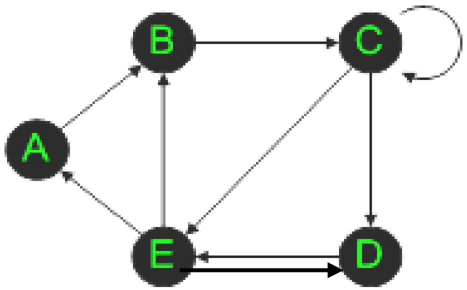
0	AB	0	0	0
0	0	BC	0	0
0	0	0	CD	CE
0	0	0	0	DE
EA	EB	0	ED	0

M_1

- Διαδοχικοί πολλαπλασιασμοί πινάκων

$$M_i = M_{i-1} * M, \quad 1 < i < n$$

Αλγόριθμος Εύρεσης Κύκλου Hamilton



A	0	B	0	0	0
B	0	0	C	0	0
C	0	0	0	D	E
D	0	0	0	0	E
E	A	B	0	D	0

M

→

0	AB	0	0	0
0	0	BC	0	0
0	0	0	CD	CE
0	0	0	0	DE
EA	EB	0	ED	0

M_1

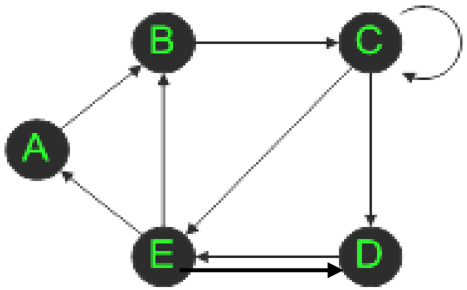
- Για κάθε στοιχείο του M_i ισχύει:

$$M_i(r, s) = \Sigma_{t=1,n} M_{i-1}(r, t) * M(t, s), \quad 1 < i < n$$

Το σύμβολο * δηλώνει παράθεση των αντίστοιχων στοιχείων των M_{i-1} και M, και γίνεται εάν:

- κανένα από τα δύο στοιχεία δεν είναι 0 και το σύμβολο του M δεν συμπεριλαμβάνεται στην αντίστοιχη συμβολοσειρά του M_{i-1}.

Αλγόριθμος Εύρεσης Κύκλου Hamilton



0	AB	0	0	0
0	0	BC	0	0
0	0	0	CD	CE
0	0	0	0	DE
EA	EB	0	ED	0

M_1

*

0	B	0	0	0
0	0	C	0	0
0	0	0	D	E
0	0	0	0	E
A	B	0	D	0

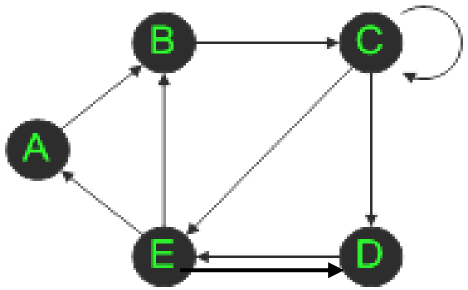
M

- $M_2 = M_1 * M$,

Για το (1, 3) του $M_2 \Rightarrow M_2(1, 3) = \Sigma_{t=1,5} M_1(1, t) * M(t, 3)$

1η Γραμμή του M_1	0	AB	0	0	0
3η Στήλη του M	0	C	0	0	0
Στοιχείο (1,3) του M_2	0	ABC	0	0	0

Αλγόριθμος Εύρεσης Κύκλου Hamilton



0	AB	0	0	0
0	0	BC	0	0
0	0	0	CD	CE
0	0	0	0	DE
EA	EB	0	ED	0

M_1

*

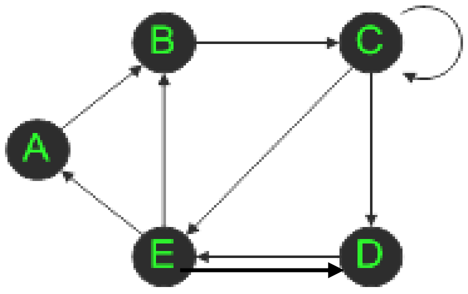
0	B	0	0	0
0	0	C	0	0
0	0	0	D	E
0	0	0	0	E
A	B	0	D	0

M

M_2

0	0	ABC	0	0
0	0	0	BCD	BCE
CEA	CEB	0	CED	CDE
DEA	DEB	0	0	0
0	EAB	EBC	0	0

Αλγόριθμος Εύρεσης Κύκλου Hamilton



0	AB	0	0	0
0	0	BC	0	0
0	0	0	CD	CE
0	0	0	0	DE
EA	EB	0	ED	0

M_1

*

0	B	0	0	0
0	0	C	0	0
0	0	0	D	E
0	0	0	0	E
A	B	0	D	0

M

M_4

0	0	0	ABCED	ABCDE
BCDEA	0	BC	0	0
0	CDEAB	0	0	0
0	0	DEABC	0	0
0	0	0	EABDC	0

Πρόβλημα Περιοδεύοντος Πωλητή - TSP

Πρόβλημα: ένας πωλητής ξεκινώντας από μία πόλη, θέλει να περάσει απ’ όλες τις πόλεις και επιστρέψει στην αρχική, με το ελάχιστο κόστος !!!! |

Περνώντας:

(1) Μία μόνο φορά από κάθε πόλη

(2) Περισσότερες από μία φορές από κάθε πόλη

Πρόβλημα Περιοδεύοντος Πωλητή - TSP

Πρόβλημα: ένας πωλητής ξεκινώντας από μία πόλη, θέλει να περάσει απ' όλες τις πόλεις και επιστρέψει στην αρχική, με το ελάχιστο κόστος !!!! |

Εάν το γράφημα είναι Ευκλείδειο, ΔΕΝ ΣΥΜΦΕΡΕΙ ο πωλητής να περνά από την ίδια πόλη περισσότερες από μια φορές!

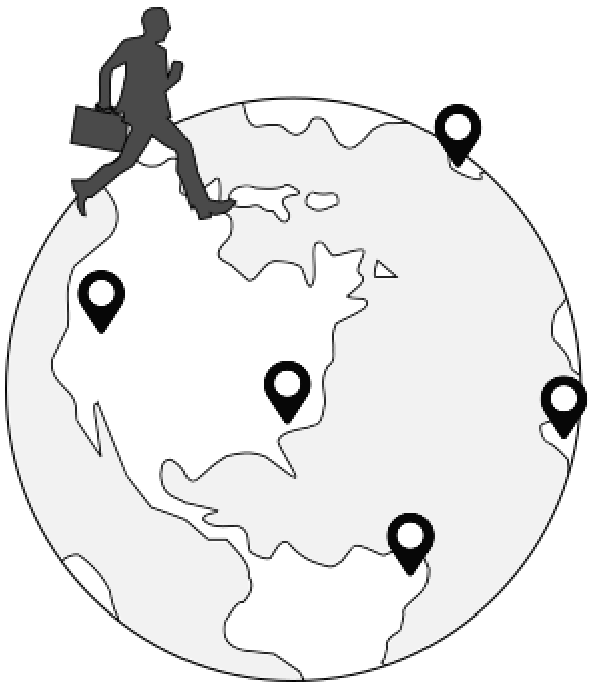
Σε Ευκλείδειο γράφημα:

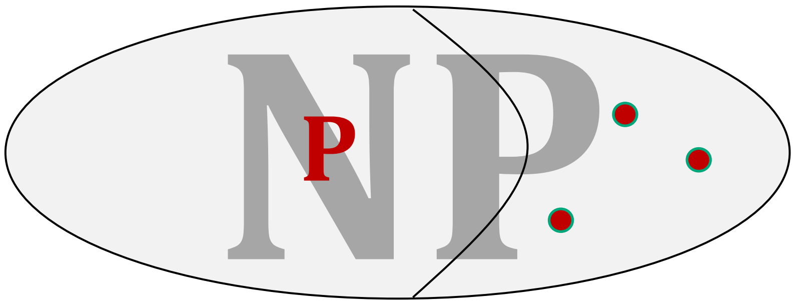
- Brute-force $\Rightarrow$ $O(n^n)$
- Δυναμικό-προγραμματισμό $\Rightarrow$ $O(n^2 2^n)$

NP-πλήρες !!!

Ευκλείδειο γράφημα:
όταν ισχύει η ανισοϊσότητα του τριγώνου για κάθε τριάδα κόμβων που δημιουργούν τρίγωνο.

Το Πρόβλημα TSP είναι NP-πλήρες



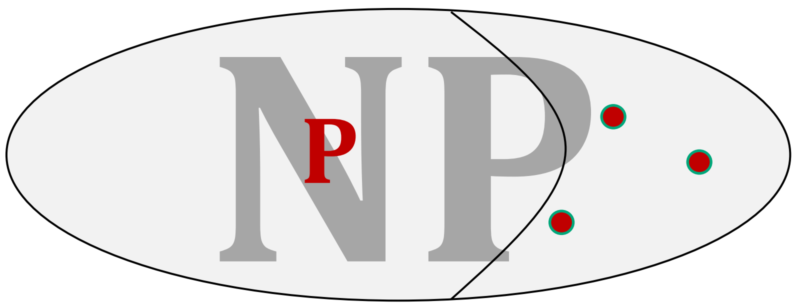


TSP ∈ NP-πλήρη

Το Πρόβλημα TSP είναι NP-πλήρες

- Πρόβλημα: ένας πωλητής ξεκινώντας από μία πόλη, θέλει να περάσει απ’ όλες τις πόλεις και επιστρέψει στην αρχική, με το ελάχιστο κόστος !!!! |

Απόδειξη ότι το πρόβλημα TSP είναι:



NP-πλήρες !!!

Το Πρόβλημα TSP είναι NP-πλήρες

- Πρόβλημα: ένας πωλητής ξεκινώντας από μία πόλη, θέλει να περάσει απ’ όλες τις πόλεις και επιστρέψει στην αρχική, με το ελάχιστο κόστος !!!! |

Το πρόβλημα βελτιστοποίησης του TSP:

Ορισμός TSP: Δοθέντος ενός πλήρους μη-κατευθυνόμενου G με ακμικά βάρη $w_{ij} \in N$, $\forall$ (i,j) E(G), να βρεθεί Hamiltonian κύκλος W στο G που να ελαχιστοποιεί το άθροισμα των ακμικών βαρών του W, δηλ.

$$\min \Sigma_{(i,j)\in W}\, w_{ij}$$

Το Πρόβλημα TSP είναι NP-πλήρες

- Πρόβλημα: ένας πωλητής ξεκινώντας από μία πόλη, θέλει να περάσει απ' όλες τις πόλεις και επιστρέψει στην αρχική, με το <u>ελάχιστο κόστος</u> !!!! |

Το πρόβλημα απόφασης του TSP:

Ορισμός TSP: Δοθέντος ενός πλήρους μη-κατευθυνόμενου G με ακμικά βάρη $w_{ij} \in N$, $\forall$ (i,j) $\in$ E(G) και ενός αριθμού $k \in N$, να βρεθεί εάν υπάρχει Hamiltonian κύκλος W στο G με άθροισμα ακμικών βαρών $\leq$ k, δηλ.

$$\sum_{(i,j)\in W} w_{ij} \leq k$$

Το Πρόβλημα TSP είναι NP-πλήρες

- **Αναγωγές !!! $A \leq B$ ή $A \rightarrow B$**

Το κυριότερο εργαλείο για να αποδείξουμε ότι ένα *πρόβλημα Π* ανήκει σε μια *κλάση πολυπλοκότητας* είναι η ΑΝΑΓΩΓΗ !!!

Ιδέα εξαιρετικά απλή !!!

Μετατρέπουμε το στιγμιότυπο π_1 ενός προβλήματος A σε ένα στιγμιότυπο π_2 του προβλήματος B με τέτοιο τρόπο ώστε η λύση στο π_2 να δίδει την λύση και στο π_1 !!!

Το Πρόβλημα TSP είναι NP-πλήρες

- **Αναγωγές !!!** $\mathbf{A \le B}$ **ή** $\mathbf{A \rightarrow B}$ ($\mathbf{A \le B}$ αναγωγή **R**)

Εάν το π_1 είναι ένα ΝΑΙ στιγμιότυπο του προβλήματος A τότε η αναγωγή R θα δώσει ένα ΝΑΙ στιγμιότυπο $\pi_2 = R(\pi_1)$ του προβλήματος B.

Αντίστοιχα, εάν το π_1 είναι ένα ΟΧΙ στιγμιότυπο του A τότε και το $\pi_2 = R(\pi_1)$ θα είναι ένα ΟΧΙ στιγμιότυπο του προβλήματος B.

Προσοχή ! Θα μπορούσαμε να γράψουμε $\pi_1 \in A$ αφού το A είναι ένα σύνολο τέτοιων στιγμιοτύπων που έχουν την ιδιότητα I (ΝΑΙ = ικανοποίηση της I).

Το Πρόβλημα TSP είναι NP-πλήρες

- **Αναγωγές !!!** **A ≤ B** **ή** **A → B** (**A ≤ B** αναγωγή **R**)

Δηλαδή, χρησιμοποιώντας σημειογραφία συνόλων θα πρέπει να δείξουμε ότι η αναγωγή R είναι πολυωνυμικού χρόνου και ότι

$$\pi_1 \in A \quad \textbf{εάν-ν} \quad \pi_2 \in B$$

Τότε, λέμε ότι το ***A*** ανάγεται στο **B**

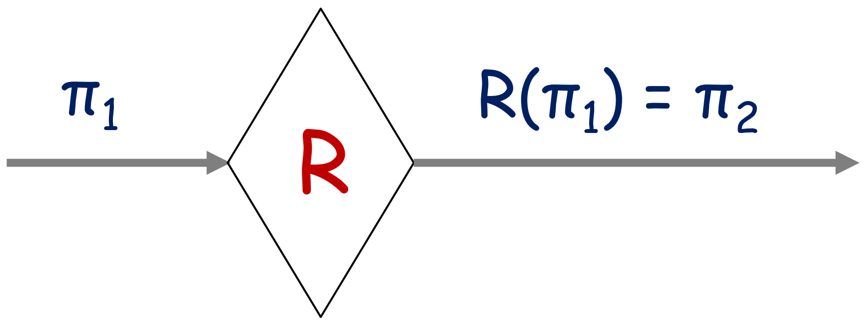
το οποίο σημαίνει ότι:

μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη λύση του B ώστε να λύσουμε το *A* !!!

Το Πρόβλημα TSP είναι NP-πλήρες

- **Αναγωγές !!!** $A \leq B$ **ή** $A \rightarrow B$ ($A \leq B$ αναγωγή R)

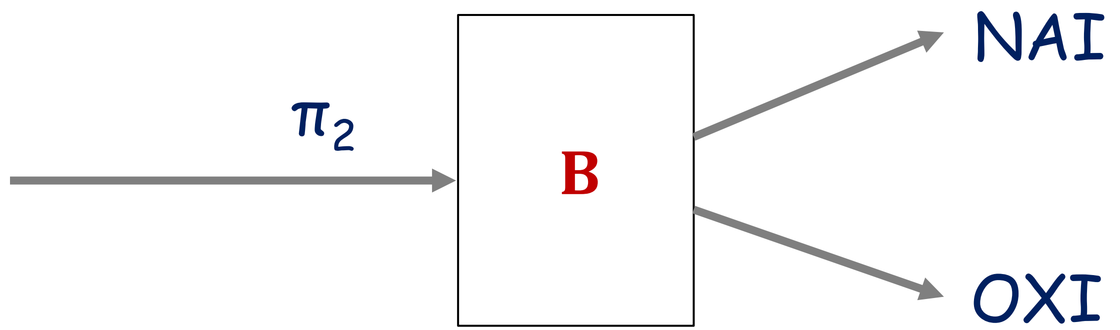
Λήμμα. Εάν το πρόβλημα A ανάγεται στο B σε πολυωνυμικό χρόνο και το πρόβλημα B λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο, τότε και το A λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο.



Το Πρόβλημα TSP είναι NP-πλήρες

- **Αναγωγές !!!** **A ≤ B** **ή** **A → B** (**A ≤ B** αναγωγή **R**)

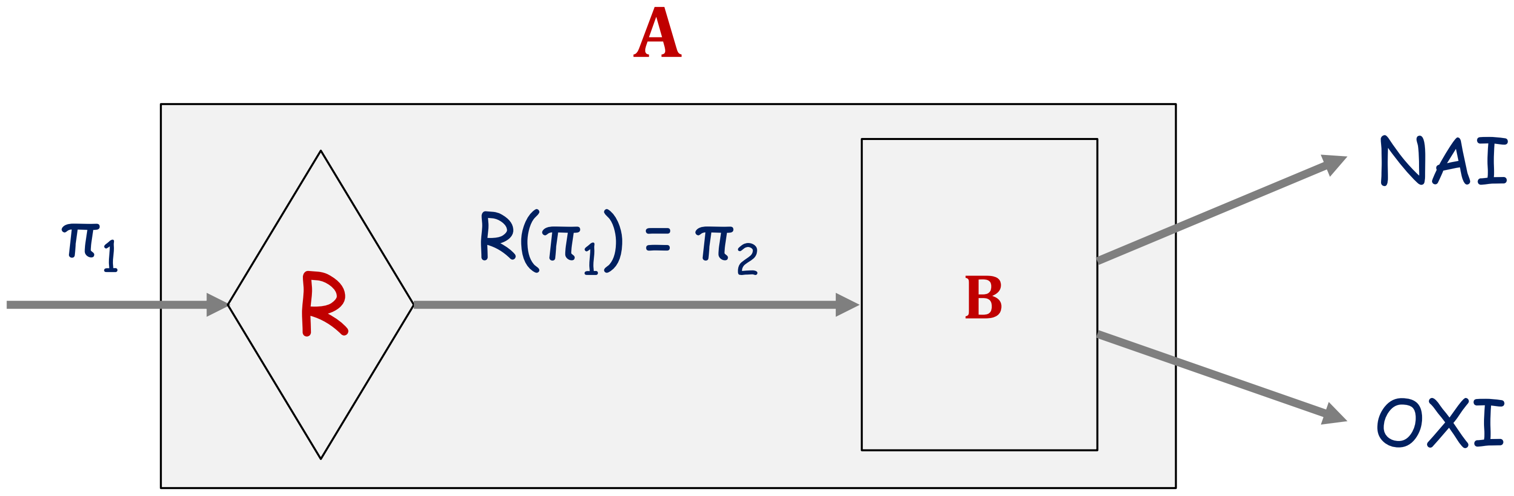
Λήμμα. Εάν το πρόβλημα *A* ανάγεται στο B σε πολυωνυμικό χρόνο και το πρόβλημα B λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο, τότε και το *A* λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο.



Το Πρόβλημα TSP είναι NP-πλήρες

- **Αναγωγές !!!** **A ≤ B** **ή** **A → B** (**A ≤ B** αναγωγή **R**)

Λήμμα. Εάν το πρόβλημα *A* ανάγεται στο B σε πολυωνυμικό χρόνο και το πρόβλημα B λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο, τότε και το *A* λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο.



Το Πρόβλημα TSP είναι NP-πλήρες

- **Αναγωγές !!!** $A \leq B$ ή $A \rightarrow B$ ($A \leq B$ αναγωγή R)

Αντιθετοαντίστροφη μορφή του Λήμματος. Εάν το πρόβλημα *Α* ανάγεται στο Β σε πολυωνυμικό χρόνο και το *Α* είναι εκθετικού χρόνου, τότε και το Β θα πρέπει να είναι εκθετικού χρόνου.

> Αυτή ακριβώς την μορφή της αναγωγής χρησιμοποιούμε για να δείξουμε ότι πολλά προβλήματα ΘΓ, όπως το TSP, είναι δύσκολα.

Το Πρόβλημα TSP είναι NP-πλήρες

- **Θεώρημα.** Το TSP είναι NP-πλήρες

TSP: Δοθέντος ενός πλήρους μη-κατευθυνόμενου γραφήματος G με ακμικά βάρη $w_{ij} \in N$, $\forall$ (i,j) $\in$ E(G) και ενός αριθμού $k \in N$, να βρεθεί εάν υπάρχει Hamiltonian κύκλος W στο G με άθροισμα ακμικών βαρών το πολύ k, δηλαδή

$$\sum_{(i,j)\in W} w_{ij} \leq k$$

1) Το πρόβλημα TSP ανήκει στην κλάση NP

2) Υπάρχει πρόβλημα A που είναι NP-πλήρες και $A \leq$ TSP

Το Πρόβλημα TSP είναι NP-πλήρες

- 1) Το πρόβλημα TSP ανήκει στην κλάση NP

Θα κατασκευάσουμε ένα πολυωνυμικό επαληθευτή.

Ο επαληθευτής (αλγόριθμος) έχει ως είσοδο ένα έμβαρο *G* και έναν αριθμό k, ενώ το πιστοποιητικό είναι ένας κύκλος *C*.

- Αρχικά, ελέγχει ότι ο κύκλος *C* πράγματι είναι Hamiltoniam.
- Εάν δεν είναι, επιστρέφει ΟΧΙ και τερματίζει, άλλως ελέγχει εάν το άθροισμα των βαρών των ακμών του *C* είναι ≤ k.
- Εάν δεν ισχύει, επιστρέφει ΟΧΙ και τερματίζει, άλλως ΝΑΙ.

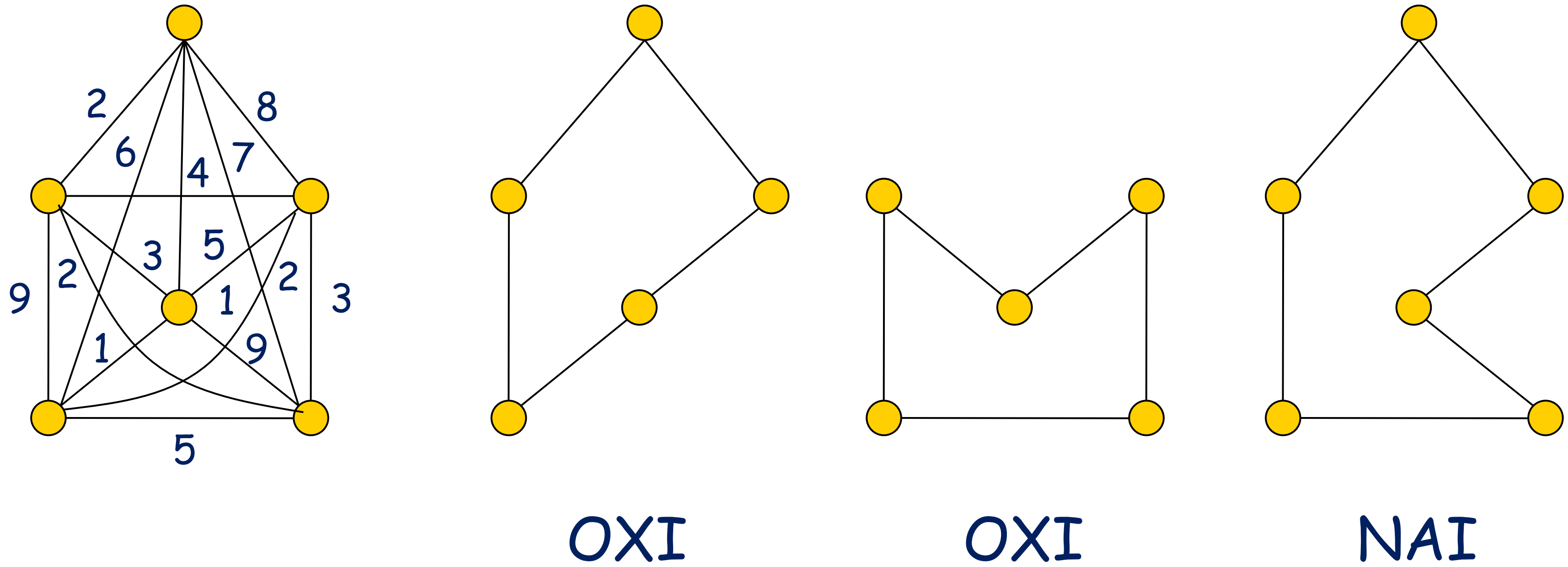
Τα βήματα του επαληθευτή υλοποιούνται σε πολυωνυμικό χρόνο.

Το Πρόβλημα TSP είναι NP-πλήρες

- 1) Το πρόβλημα TSP ανήκει στην κλάση NP

Σχηματικά !

Ελέγχει ότι ο κύκλος C είναι Hamiltoniam.

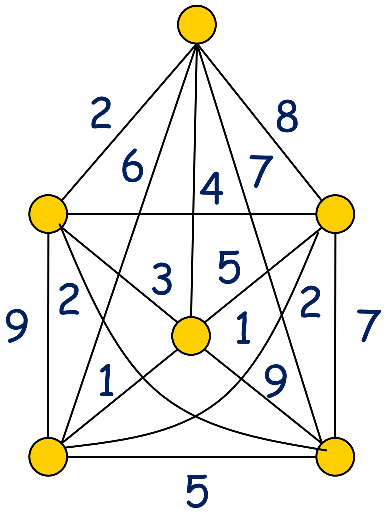


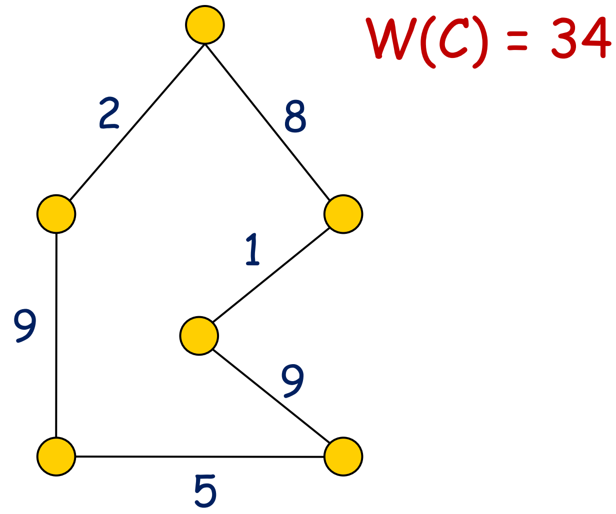
Το Πρόβλημα TSP είναι NP-πλήρες

- 1) Το πρόβλημα TSP ανήκει στην κλάση NP

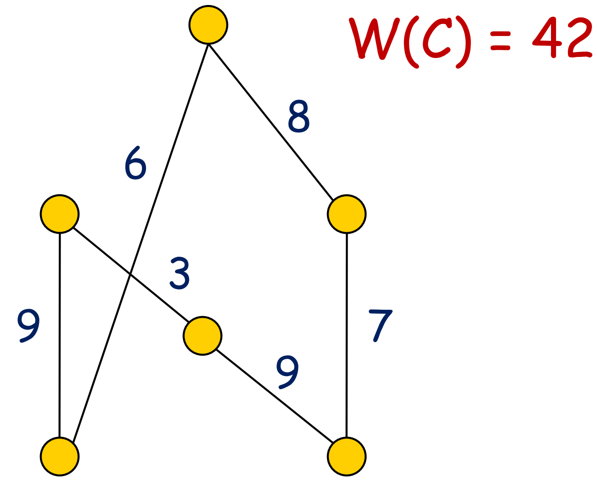
Σχηματικά !

Ελέγχει εάν το W(C) είναι ≤ k, με k = 40.





ΝΑΙ



ΟΧΙ

Το Πρόβλημα TSP είναι NP-πλήρες

- 2) Υπάρχει πρόβλημα *A* που είναι NP-πλήρες και *A* ≤ TSP

Επιλέγω *A* = Hamiltonian *Cycle* (HAMC)

Hamiltonian κύκλος σε ένα απλό συνεκτικό γράφημα *G* λέγεται ένα κλειστό μονοπάτι που περνά από κάθε κόμβο του *G*.

HAMC είναι NP-πλήρες

HAMC ≤ TSP

Το Πρόβλημα TSP είναι NP-πλήρες

- 2) HAMC ≤ TSP

Έστω ένα π_1 του HAMC που αποτελείται από το γράφημα $G=(V,E)$

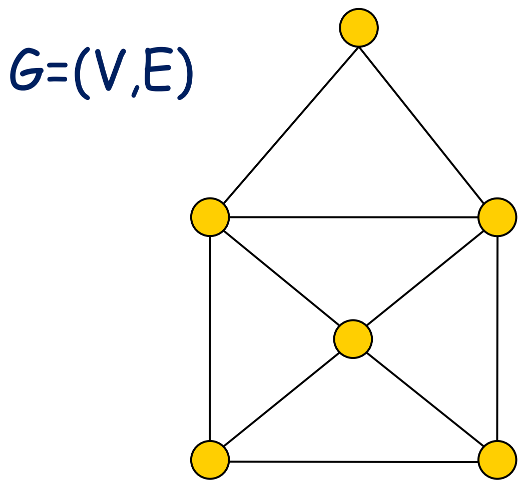
Κατασκευάζουμε νέο πλήρες έμβαρο γράφημα $G'=(V',E')$: $V' = V$ και ορίζουμε συνάρτηση βάρους $w : E' \rightarrow \{1, 2\}$, έτσι ώστε

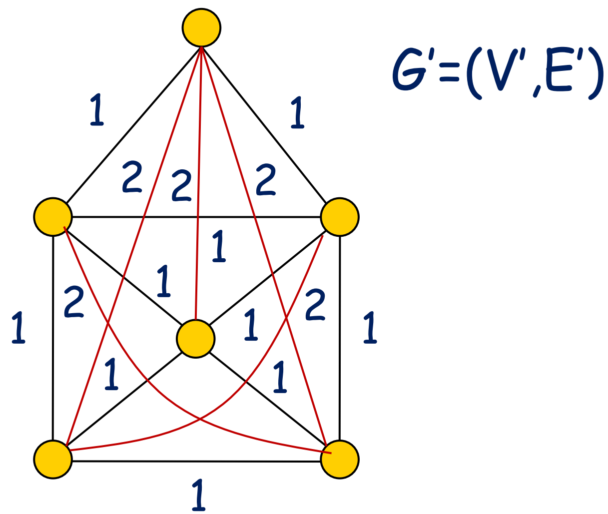
$$\forall (i,j) \in E',\ w_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{εάν } (i,j) \in E \\ 2, & \text{εάν } (i,j) \notin E \end{cases}$$

Τέλος, θέτουμε $k = |V|$

Το Πρόβλημα TSP είναι NP-πλήρες

- 2) HAMC ≤ TSP





Για να ολοκληρώσουμε την αναγωγή θα πρέπει να δείξουμε ότι:

> Το G έχει Hamiltonian κύκλο **εάν-ν** το G' έχει Hamiltonian κύκλο βάρους $\leq k = |V|$.

Το Πρόβλημα TSP είναι NP-πλήρες

- 2) Το G έχει Hamiltonian κύκλο **εάν-ν** το G' έχει Hamiltonian κύκλο βάρους $\leq k = |V|$.

($\Rightarrow$) Έστω ότι το G έχει Hamiltonian κύκλο W.

Τότε, και το γράφημα G' έχει ως Hamiltonian κύκλο τον W αφού έχει το ίδιο σύνολο κόμβων με το G ενώ ταυτόχρονα $E \subseteq E'$.

Επειδή, όλοι οι κόμβοι του W στο G' έχουν βάρος 1 συνεπάγεται ότι ο κύκλος W έχει βάρος στο G' ίσο με $k = |V|$.

Επομένως αποδείχθηκε η μία κατεύθυνση.

Το Πρόβλημα TSP είναι NP-πλήρες

- 2) Το G έχει Hamiltonian κύκλο **εάν-ν** το G' έχει Hamiltonian κύκλο βάρους $\leq k = |V|$.

($\Leftarrow$) Έστω ότι το G' έχει Hamiltonian κύκλο W με βάρος $\leq k = |V|$.

Τότε, ο κύκλος W δεν μπορεί να περιλαμβάνει καμία από τις ακμές του E' που δεν ανήκουν στο E,

διότι αυτές έχουν βάρος 2 και επομένως οι $|V|$ ακμές του W δεν μπορούν να έχουν συνολικό βάρος $\leq |V|$.

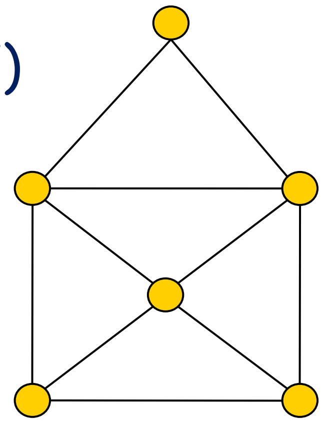
Επομένως, το αρχικό G έχει ένα Hamiltonian κύκλο W.

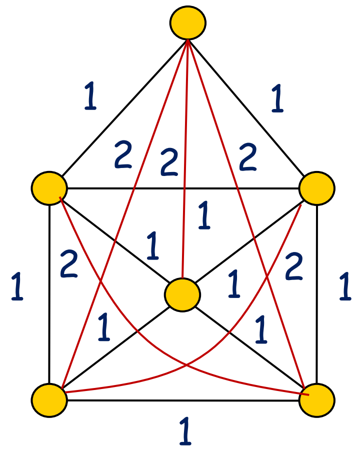
Το Πρόβλημα TSP είναι NP-πλήρες

- 2) Αποδείξαμε την ορθότητα της αναγωγής HAMC ≤ TSP

Απομένει να δείξουμε ότι η πολυπλοκότητα της αναγωγής είναι πολυωνυμική.

G=(V,E)





G'=(V',E')

Πράγματι, το γράφημα G' μπορεί να κατασκευαστεί από το G σε πολυωνυμικό χρόνο (και εύκολα).

Το Πρόβλημα TSP είναι NP-πλήρες

- 2) Αποδείξαμε την ορθότητα της αναγωγής $HAMC \leq TSP$

Απομένει να δείξουμε ότι η πολυπλοκότητα της αναγωγής είναι πολυωνυμική.

Πράγματι, το G' μπορεί να κατασκευαστεί από το G σε πολυωνυμικό χρόνο (και εύκολα).

Επομένως, επειδή $TSP \in NP$ και $HAMC \leq TSP$ συνεπάγεται ότι
TSP είναι NP-πλήρες.

TSP Απόφασης – TSP Βελτιστοποίησης

- **TSP Απόφασης:** Δοθέντος ενός πλήρους μη-κατευθυνόμενου *G* με ακμικά βάρη $w_{ij} \in N$, $\forall$ (i,j) $\in$ E(*G*) και ενός αριθμού $k \in N$, να βρεθεί εάν υπάρχει Hamiltonian κύκλος W στο *G* :

$$\sum_{(i,j)\in W} w_{ij} \leq k$$

TSP Βελτιστοποίησης: Δοθέντος ενός πλήρους μη-κατευθυνόμενου G με ακμικά βάρη $w_{ij} \in N$, $\forall$ (i,j) E(G), να βρεθεί Hamiltonian κύκλος W στο G που να ελαχιστοποιεί το άθροισμα των ακμικών βαρών του W, δηλ.

$$\min \sum_{(i,j)\in W} w_{ij}$$

TSP Απόφασης – TSP Βελτιστοποίησης

- **TSP Απόφασης:** Δοθέντος ενός πλήρους μη-κατευθυνόμενου G με ακμικά βάρη $w_{ij} \in N$, $\forall$ (i,j) $\in$ E(G) και ενός αριθμού $k \in N$, να βρεθεί εάν υπάρχει Hamiltonian κύκλος W στο G :

$$\Sigma_{(i,j)\in W} w_{ij} \leq k$$

Το πρόβλημα TSP απόφασης αποδείξαμε ότι είναι NP-πλήρες.

Επομένως, σήμερα δεν υπάρχει αλγόριθμος που λύνει το πρόβλημα TSP απόφασης σε πολυωνυμικό χρόνο!!!

Και φυσικά, ούτε για το TSP βελτιστοποίησης !

γιατί ?

TSP Απόφασης – TSP Βελτιστοποίησης

- **TSP Απόφασης:** Δοθέντος ενός πλήρους μη-κατευθυνόμενου G με ακμικά βάρη $w_{ij} \in N$, $\forall$ (i,j) $\in$ E(G) και ενός αριθμού $k \in N$, να βρεθεί εάν υπάρχει Hamiltonian κύκλος W στο G :

$$\sum_{(i,j)\in W} w_{ij} \leq k$$

Εάν σχεδιάσω (αύριο, μεθαύριο, ..., κάποτε στο μέλλον!!!)
ένα πολυωνυμικό αλγόριθμο για το πρόβλημα TSP απόφασης

Τότε

Μπορώ να λύσω το πρόβλημα TSP βελτιστοποίησης σε πολυωνυμικό χρόνο!!!

γιατί ?

TSP Απόφασης – TSP Βελτιστοποίησης

- **TSP Απόφασης:** Δοθέντος ενός πλήρους μη-κατευθυνόμενου G με ακμικά βάρη $w_{ij} \in N$, $\forall$ (i,j) $\in$ E(G) και ενός αριθμού $k \in N$, να βρεθεί εάν υπάρχει Hamiltonian κύκλος W στο G :

$$\sum_{(i,j) \in W} w_{ij} \leq k$$

Να γιατί !

Έστω ότι είχαμε ένα πολυωνυμικό αλγόριθμο $\mathbf{A_d}$ για το πρόβλημα TSP απόφασης.

Ο αλγόριθμος $\mathbf{A_d}$ επιστρέφει ΝΑΙ εάν υπάρχει Hamiltonian κύκλος βάρους ≤ k, άλλως επιστρέφει ΌΧΙ.

TSP Απόφασης – TSP Βελτιστοποίησης

- **TSP Απόφασης:** Δοθέντος ενός πλήρους μη-κατευθυνόμενου G με ακμικά βάρη $w_{ij} \in N$, $\forall$ (i,j) $\in$ E(G) και ενός αριθμού $k \in N$, να βρεθεί εάν υπάρχει Hamiltonian κύκλος W στο G :

$$\sum_{(i,j)\in W} w_{ij} \leq k$$

Να γιατί !

Έστω M είναι το μέγιστο βάρος των ακμών του γραφήματος G.

Τότε

Εφαρμόζουμε αναζήτηση για την τιμή του k στο διάστημα [0, nM] και για τέτοια τιμή εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο A_d.

TSP Απόφασης – TSP Βελτιστοποίησης

- **TSP Απόφασης:** Δοθέντος ενός πλήρους μη-κατευθυνόμενου G με ακμικά βάρη $w_{ij} \in N$, $\forall$ (i,j) $\in$ E(G) και ενός αριθμού $k \in N$, να βρεθεί εάν υπάρχει Hamiltonian κύκλος W στο G :

$$\sum_{(i,j)\in W} w_{ij} \le k$$

Αλγόριθμος A_{opt} (Γραμμική Αναζήτηση)

[0, 1, 2, 3, …, m-1, m, m+1, …, nM-1, nM]

↑ k

Με k = 0, εάν ο αλγόριθμος A_d επιστέψει ΟΧΙ τότε k++

TSP Απόφασης – TSP Βελτιστοποίησης

- **TSP Απόφασης:** Δοθέντος ενός πλήρους μη-κατευθυνόμενου G με ακμικά βάρη $w_{ij} \in N$, $\forall$ (i,j) $\in$ E(G) και ενός αριθμού $k \in N$, να βρεθεί εάν υπάρχει Hamiltonian κύκλος W στο G :

$$\sum_{(i,j)\in W} w_{ij} \leq k$$

Αλγόριθμος A_{opt} (Γραμμική Αναζήτηση)

[0, 1, 2, 3, …, m-1, m, m+1, …, nM-1, nM]

$\uparrow$ k

Με k = 1, εάν ο αλγόριθμος A_d επιστέψει ΟΧΙ τότε k++

TSP Απόφασης – TSP Βελτιστοποίησης

- **TSP Απόφασης:** Δοθέντος ενός πλήρους μη-κατευθυνόμενου G με ακμικά βάρη $w_{ij} \in N$, $\forall$ (i,j) $\in E(G)$ και ενός αριθμού $k \in N$, να βρεθεί εάν υπάρχει Hamiltonian κύκλος W στο G :

$$\sum_{(i,j)\in W} w_{ij} \leq k$$

Αλγόριθμος A_{opt} (Γραμμική Αναζήτηση)

[0, 1, 2, 3, ..., m-1, m, m+1, ..., nM-1, nM]

$\uparrow$ k

Με k = 2, εάν ο αλγόριθμος A_d επιστέψει ΟΧΙ τότε k++

TSP Απόφασης – TSP Βελτιστοποίησης

- **TSP Απόφασης:** Δοθέντος ενός πλήρους μη-κατευθυνόμενου G με ακμικά βάρη $w_{ij} \in$ N, $\forall$ (i,j) $\in$ E(G) και ενός αριθμού $k \in$ N, να βρεθεί εάν υπάρχει Hamiltonian κύκλος W στο G :

$$\Sigma_{(i,j)\in W}\, w_{ij} \leq k$$

Αλγόριθμος A_{opt} (Γραμμική Αναζήτηση)

$$[0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \underset{\uparrow k}{m-1},\ m,\ m+1,\ \ldots,\ nM-1,\ nM]$$

Με k = m-1, εάν ο αλγόριθμος A_d επιστέψει ΟΧΙ τότε k++

TSP Απόφασης – TSP Βελτιστοποίησης

- **TSP Απόφασης:** Δοθέντος ενός πλήρους μη-κατευθυνόμενου G με ακμικά βάρη $w_{ij} \in N$, $\forall$ (i,j) $\in E(G)$ και ενός αριθμού $k \in N$, να βρεθεί εάν υπάρχει Hamiltonian κύκλος W στο G :

$$\sum_{(i,j)\in W} w_{ij} \leq k$$

Αλγόριθμος A_{opt} (Γραμμική Αναζήτηση)

[0, 1, 2, 3, …, m-1, m, m+1, …, nM-1, nM]

↑ k

Με k = m, εάν ο αλγόριθμος A_d επιστέψει ΝΑΙ τότε exit

TSP Απόφασης – TSP Βελτιστοποίησης

- **TSP Απόφασης:** Δοθέντος ενός πλήρους μη-κατευθυνόμενου G με ακμικά βάρη $w_{ij} \in N$, $\forall$ (i,j) $\in$ E(G) και ενός αριθμού $k \in N$, να βρεθεί εάν υπάρχει Hamiltonian κύκλος W στο G :

$$\Sigma_{(i,j)\in W} \, w_{ij} \leq k$$

Αλγόριθμος A_{opt} (Γραμμική Αναζήτηση)

[0, 1, 2, 3, …, m-1, m, m+1, …, nM-1, nM]

Ο αλγόριθμος A_d στη χειρότερη θα εκτελεστεί $O(nM)$ φορές

Άρα, εάν A_d **πολυωνυμικός** τότε A_{opt} **πολυωνυμικός**

TSP Απόφασης – TSP Βελτιστοποίησης

- **TSP Απόφασης:** Δοθέντος ενός πλήρους μη-κατευθυνόμενου G με ακμικά βάρη $w_{ij} \in N$, $\forall\ (i,j) \in E(G)$ και ενός αριθμού $k \in N$, να βρεθεί εάν υπάρχει Hamiltonian κύκλος W στο G :

$$\sum_{(i,j)\in W} w_{ij} \leq k$$

Αλγόριθμος A_{opt} (Δυαδική Αναζήτηση)

[0, 1, 2, 3, ..., m-1, m, m+1, ..., nM-1, nM]

↑ left ↑ right

Με k = $\lceil$(right-left)/2$\rceil$, εάν ο αλγόριθμος A_d επιστέψει ...

TSP Απόφασης – TSP Βελτιστοποίησης

- **TSP Απόφασης:** Δοθέντος ενός πλήρους μη-κατευθυνόμενου G με ακμικά βάρη $w_{ij} \in N$, $\forall$ (i,j) $\in$ E(G) και ενός αριθμού $k \in N$, να βρεθεί εάν υπάρχει Hamiltonian κύκλος W στο G :

$$\sum_{(i,j)\in W} w_{ij} \leq k$$

Αλγόριθμος A_{opt} (Δυαδική Αναζήτηση)

[0, 1, 2, 3, …, m-1, m, m+1, …, nM-1, nM]

Ο αλγόριθμος A_d στη χειρότερη θα εκτελεστεί $O(\log nM)$ φορές

Άρα, εάν A_d **πολυωνυμικός** τότε A_{opt} **πολυωνυμικός**

TSP Απόφασης – TSP Βελτιστοποίησης

- **TSP Απόφασης:** Δοθέντος ενός πλήρους μη-κατευθυνόμενου G με ακμικά βάρη $w_{ij} \in N$, $\forall$ (i,j) $\in E(G)$ και ενός αριθμού $k \in N$, να βρεθεί εάν υπάρχει Hamiltonian κύκλος W στο G :

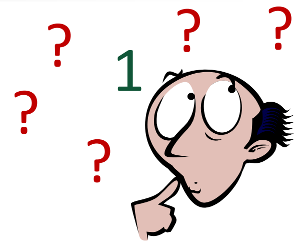
$$\sum_{(i,j)\in W} w_{ij} \leq k$$

Τι αποδεικνύει η όλη διαδικασία !

Η απόδοση του προβλήματος βελτιστοποίησης είναι «αρκετά κοντά» στην απόδοση του προβλήματος απόφασης !

Στο εξής, θα αναφερόμαστε σε προβλήματα απόφασης !!

Το Πρόβλημα 3SAT είναι NP-πλήρες



SAT ≤ 3SAT

- **Το πρόβλημα SAT**

  Μας δίδεται ένας λογικός τύπος (Boolean formula) σε συζευκτική μορφή:

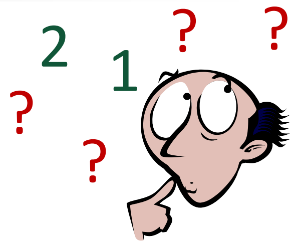
$$(x \vee \bar{y} \vee z \vee \bar{w}) \wedge (x \vee \bar{y}) \wedge (z \vee \bar{x} \vee \bar{w} \vee p \vee y) \wedge (x \vee \bar{y} \vee z)$$

  και μας ζητείται είτε να βρούμε μια *ικανοποιούσα ανάθεση τιμών αληθείας* (satisfying truth assignment) ή να αναφέρουμε ότι δεν υπάρχει καμία !!!

- **3SAT**

$$(x \vee \bar{y} \vee z) \wedge (w \vee \bar{y}) \wedge (y \vee \bar{z}) \wedge (\bar{p} \vee x) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)$$

Το Πρόβλημα IS είναι NP-πλήρες



3SAT ≤ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ-ΣΥΝΟΛΟ

- **3SAT**

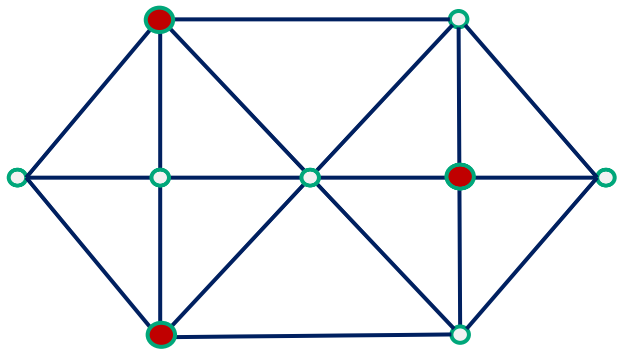
$$(\bar{x}\vee y\vee \bar{z}) \wedge (x\vee \bar{y}\vee z) \wedge (x\vee y\vee z) \wedge (\bar{x}\vee \bar{y})$$

- **ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ-ΣΥΝΟΛΟ**

  Μας δίδεται γράφημα **n** κόμβων και *ακέραιος* **k**

  και μας ζητείται να βρούμε ένα σύνολο **IS** με **k** κόμβους οι οποίοι είναι ανεξάρτητοι, δηλ. ανά δύο δεν έχουν ακμή μεταξύ τους,

  ή να αναφέρουμε ότι δεν υπάρχει τέτοιο σύνολο κόμβων !!!



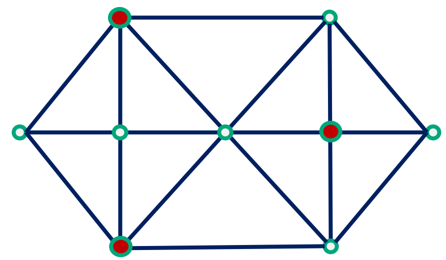
Το Πρόβλημα IS είναι NP-πλήρες

3SAT ≤ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ-ΣΥΝΟΛΟ

$(\overline{x} \vee y \vee \overline{z}) \wedge (x \vee \overline{y} \vee z) \wedge (x \vee y \vee z) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y})$

- **Δύο πολύ διαφορετικά προβλήματα !!!**
- Συσχετισμός **Λογικής Boole** με **Γραφήματα** ?
- **Ας σκεφτούμε…**

  Σε μια *ικανοποιούσα ανάθεση τιμών αληθείας* του 3SAT θα πρέπει **ένα στοιχείο** από **κάθε όρο** να είναι **true** !!!



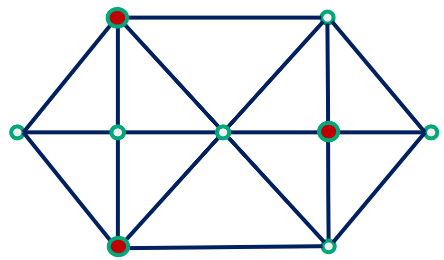
- **Συνεπείς επιλογές…** εάν **επιλέξουμε** το **x** να είναι **true** σε **κάποιο όρο** δεν μπορούμε να **επιλέξουμε** το $\overline{\mathbf{x}}$ να είναι **true** σε **κάποιο άλλο** !!!

Το Πρόβλημα IS είναι NP-πλήρες

3SAT ≤ Ανεξαρτητο-Συνολο

- **Δύο πολύ διαφορετικά προβλήματα !!!**

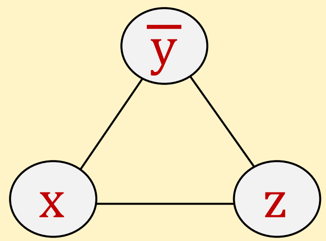
$(\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \wedge (x \vee \bar{y} \vee z) \wedge (x \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})$



- Συσχετισμός **Λογικής Boole** με **Γραφήματα** ?

ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ

$(x \vee \bar{y} \vee z)$ $\longrightarrow$

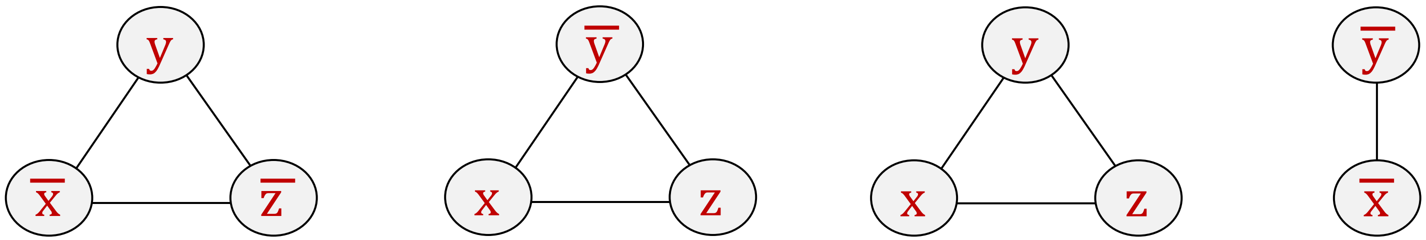


Το Πρόβλημα IS είναι NP-πλήρες

3SAT ≤ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ-ΣΥΝΟΛΟ

- **Παράδειγμα**

$$(\overline{x}\vee y\vee \overline{z}) \wedge (x\vee \overline{y}\vee z) \wedge (x\vee y\vee z) \wedge (\overline{x}\vee \overline{y})$$



- Στο **γράφημα G** που προκύπτει, ένα **IS** περιέχει *το πολύ ένα στοιχείο από κάθε **τρίγωνο–όρο*** !!!

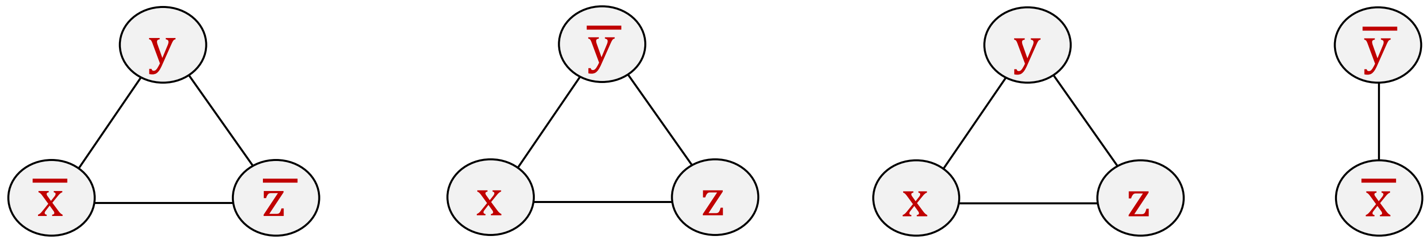
- Για να επιβάλουμε **ΜΙΑ επιλογή από κάθε τρίγωνο-όρο**, θέτουμε: **k** = πλήθος όρων

Το Πρόβλημα IS είναι NP-πλήρες

3SAT ≤ Ανεξαρτητο-Συνολο

- **Παράδειγμα**

$$(\overline{x}\vee y\vee \overline{z}) \wedge (x\vee \overline{y}\vee z) \wedge (x\vee y\vee z) \wedge (\overline{x}\vee \overline{y})$$



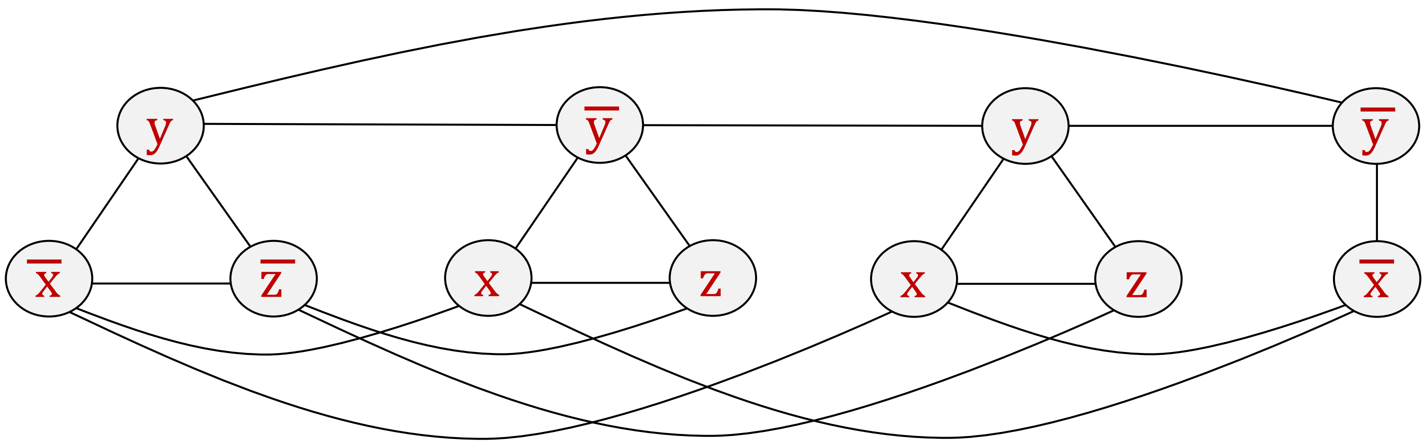
- **Θέλουμε**, ένα τρόπο που θα μας **εμποδίζει να επιλέγουμε *αντίθετα στοιχεία,*** για παράγειγμα και το **x** και το $\overline{\mathbf{x}}$!!!

Το Πρόβλημα IS είναι NP-πλήρες

3SAT ≤ Ανεξαρτητο-Συνολο

- **Παράδειγμα**

$$(\overline{x} \vee y \vee \overline{z}) \wedge (x \vee \overline{y} \vee z) \wedge (x \vee y \vee z) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y})$$

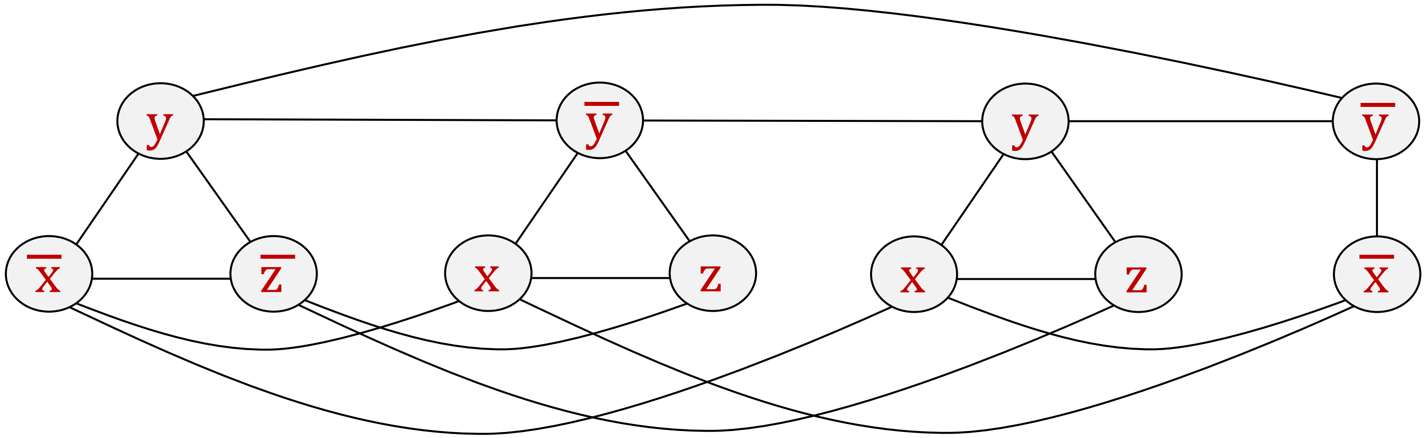


- **Αυτό είναι πολύ εύκολο !!!**

Το Πρόβλημα IS είναι NP-πλήρες

- **3SAT ≤ Ανεξαρτητο-Συνολο**
  - **Παράδειγμα**

$$(\overline{x} \vee y \vee \overline{z}) \wedge (x \vee \overline{y} \vee z) \wedge (x \vee y \vee z) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y})$$



- Με δεδομένο ένα στιγμιότυπο **I** του προβλήματος **3SAT** δημιουργήσαμε ένα στιγμιότυπο **(G, k)** του προβλήματος **Ανεξαρτητο-Συνολο**

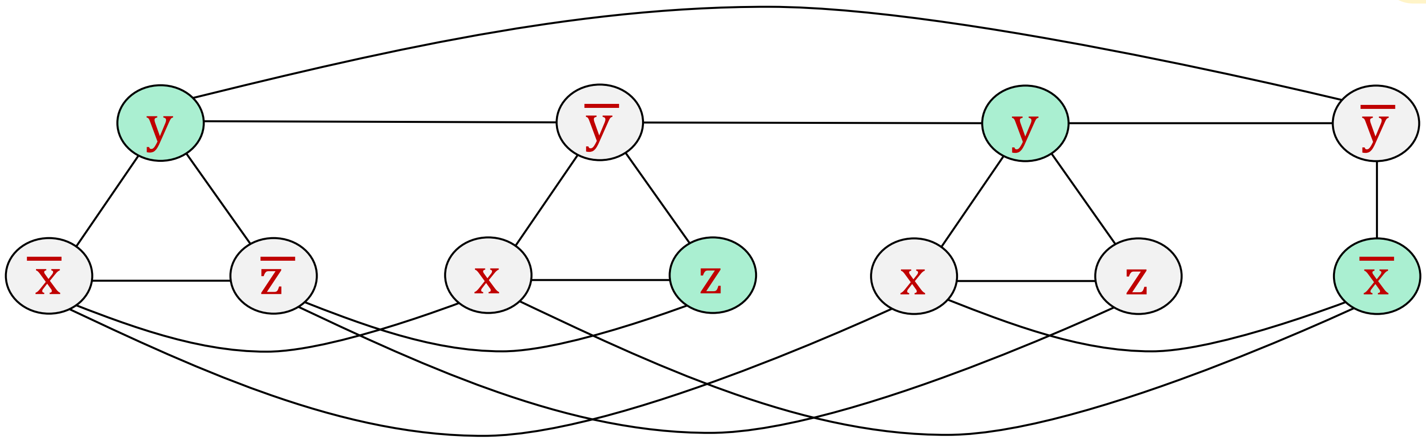
Το Πρόβλημα IS είναι NP-πλήρες

3SAT ≤ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ-ΣΥΝΟΛΟ

- **Παράδειγμα**

$$(\overline{x} \vee y \vee \overline{z}) \wedge (x \vee \overline{y} \vee z) \wedge (x \vee y \vee z) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y})$$

x = false
y = true
z = true



- Με δεδομένο ένα στιγμιότυπο **I** του προβλήματος **3SAT** δημιουργήσαμε ένα στιγμιότυπο **(G, k)** του προβλήματος **ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ-ΣΥΝΟΛΟ**

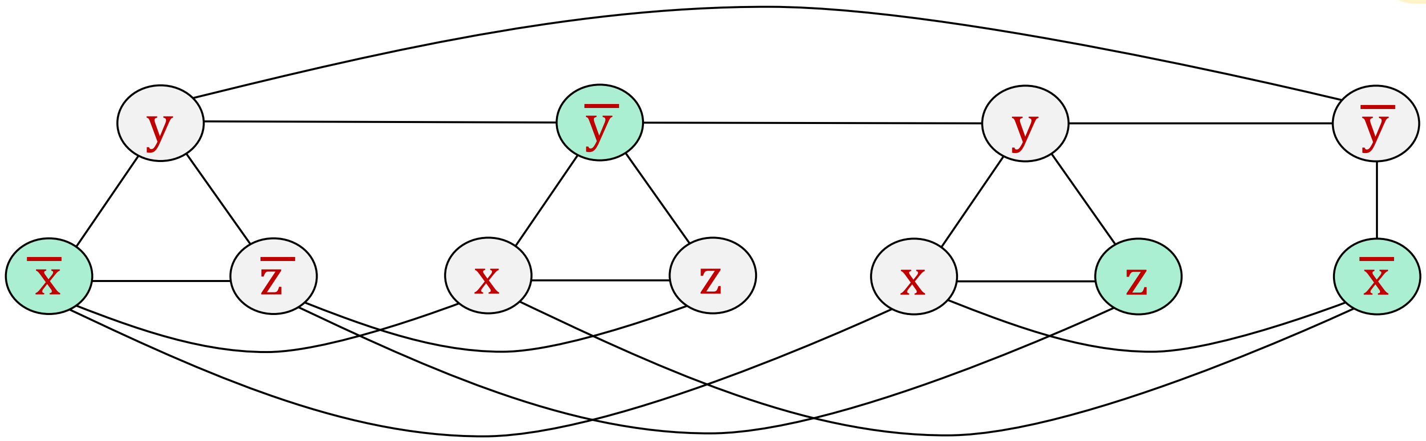
Το Πρόβλημα IS είναι NP-πλήρες

3SAT ≤ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ-ΣΥΝΟΛΟ

- **Παράδειγμα**

$$(\overline{x}\vee y\vee \overline{z}) \wedge (x\vee \overline{y}\vee z) \wedge (x\vee y\vee z) \wedge (\overline{x}\vee \overline{y})$$

x = false
y = false
z = true



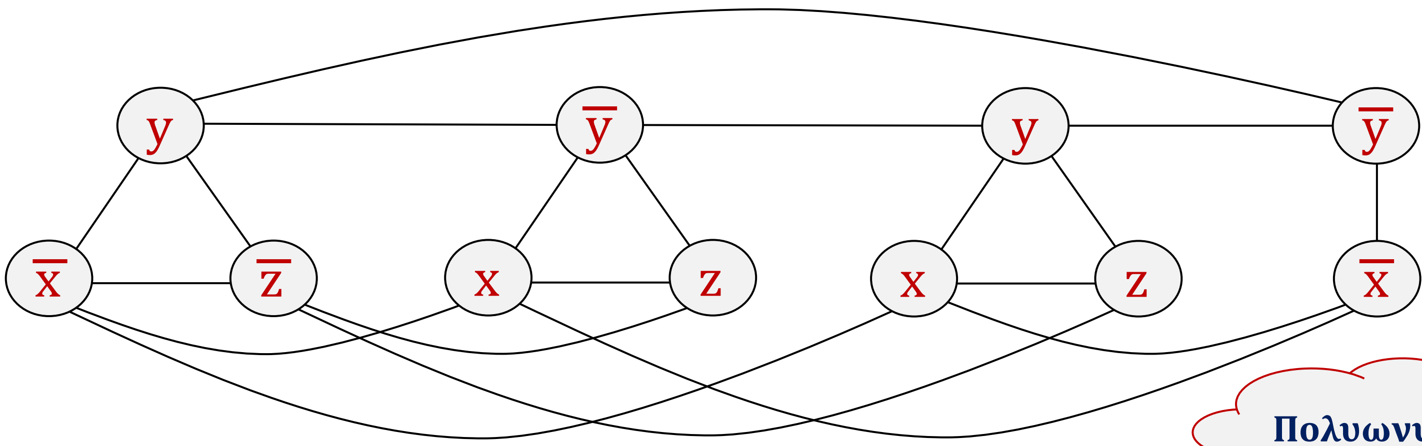
- Με δεδομένο ένα στιγμιότυπο **I** του προβλήματος **3SAT** δημιουργήσαμε ένα στιγμιότυπο **(G, k)** του προβλήματος **ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ-ΣΥΝΟΛΟ**

Το Πρόβλημα IS είναι NP-πλήρες

3SAT ≤ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ-ΣΥΝΟΛΟ

- **Παράδειγμα**

$$(\overline{x}\vee y\vee\overline{z}) \wedge (x\vee\overline{y}\vee z) \wedge (x\vee y\vee z) \wedge (\overline{x}\vee\overline{y})$$



Πολυωνυμικό Χρόνο

- Με δεδομένο ένα στιγμιότυπο **I** του προβλήματος **3SAT** δημιουργήσαμε ένα στιγμιότυπο **(G, k)** του προβλήματος **ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ-ΣΥΝΟΛΟ**

Το Πρόβλημα IS είναι NP-πλήρες

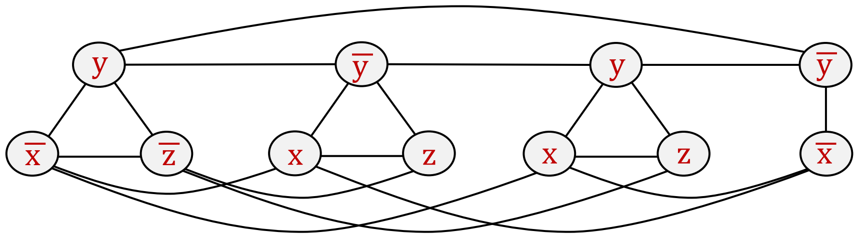
3SAT ≤ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ-ΣΥΝΟΛΟ

- **Όπως πάντα !!!**

  Θα πρέπει να αποδείξω:

  3SAT ⇔ IS

$(\overline{x}\vee y\vee \overline{z}) \wedge (x\vee \overline{y}\vee z) \wedge (x\vee y\vee z) \wedge (\overline{x}\vee \overline{y})$



(⇐) Με δεδομένο ένα ***ανεξάρτητο σύνολο*** **S** με **k** κόμβους στο γράφημα **G**, μπορούμε πάντα να ανακτήσουμε αποδοτικά μια ***ικανοποιούσα ανάθεση τιμών αληθείας*** στο **I.**

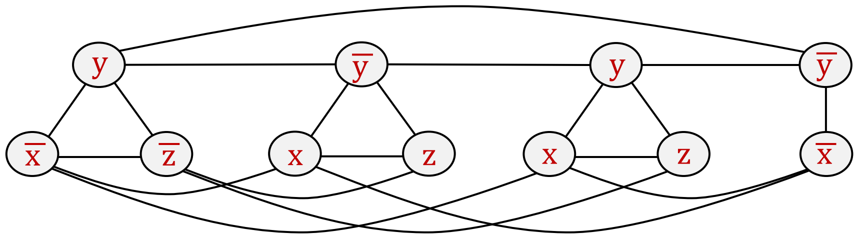
(⇒) Αν το γράφημα **G** δεν έχει ***ανεξάρτητο σύνολο*** **S** μεγέθους **k,** τότε ο λογικός (Boolean) τύπος **I** ***δεν είναι ικανοποιήσιμος***.

Το Πρόβλημα IS είναι NP-πλήρες

3SAT ≤ Ανεξαρτητο-Συνολο

Απόδειξη (1)

$(\overline{x} \vee y \vee \overline{z}) \wedge (x \vee \overline{y} \vee z) \wedge (x \vee y \vee z) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y})$



Για οποιαδήποτε μεταβλητή **x**,
το **S δεν περιέχει κόμβους** με
επιγραφές **x** και $\overline{\mathbf{x}}$!!!

Αναθέτουμε: **x = true** εάν το **S** περιέχει κόμβο με επιγραφή **x**
x = false εάν το **S** περιέχει κόμβο με επιγραφή $\overline{\mathbf{x}}$

Επειδή, **|S| = k** πρέπει να έχει **ένα κόμβο ανά όρο** !!!

Αυτή η ανάθεση ικανοποιεί όλους τους όρους !!!

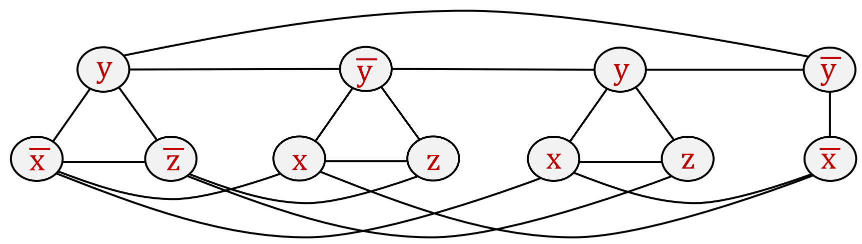
(⇐) Με δεδομένο ένα ***ανεξάρτητο σύνολο*** **S** με **k** κόμβους στο **G**, μπορούμε πάντα να ανακτήσουμε αποδοτικά μια ***ικανοποιούσα ανάθεση τιμών αληθείας*** στο **I.**

Το Πρόβλημα IS είναι NP-πλήρες

3SAT ≤ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ-ΣΥΝΟΛΟ

- **Απόδειξη (2)**

$(\overline{x} \vee y \vee \overline{z}) \wedge (x \vee \overline{y} \vee z) \wedge (x \vee y \vee z) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y})$



Αρκεί να αποδείξουμε ότι:
εάν ο λ.τ. **I** έχει μια *ικανοποιούσα ανάθεση τιμών αληθείας*,
τότε το **G** έχει ένα **IS** μεγέθους **k** !!!

Αυτό είναι εύκολο !!!... Για **κάθε όρο** του **3SAT**, ***επιλέγουμε ένα στοιχείο του οποίου η τιμή στην ικανοποιούσα ανάθεση είναι true*** και ***προσθέτουμε τον αντίστοιχο κόμβο στο S***... τότε το S είναι ανεξάρτητο !!! (γιατί ?)

(⇒) Αν το γράφημα G δεν έχει ***ανεξάρτητο σύνολο*** **S** μεγέθους **k,** τότε ο λογικός (Boolean) τύπος **I** ***δεν είναι ικανοποιήσιμος***.

NP-πλήρη Προβλήματα

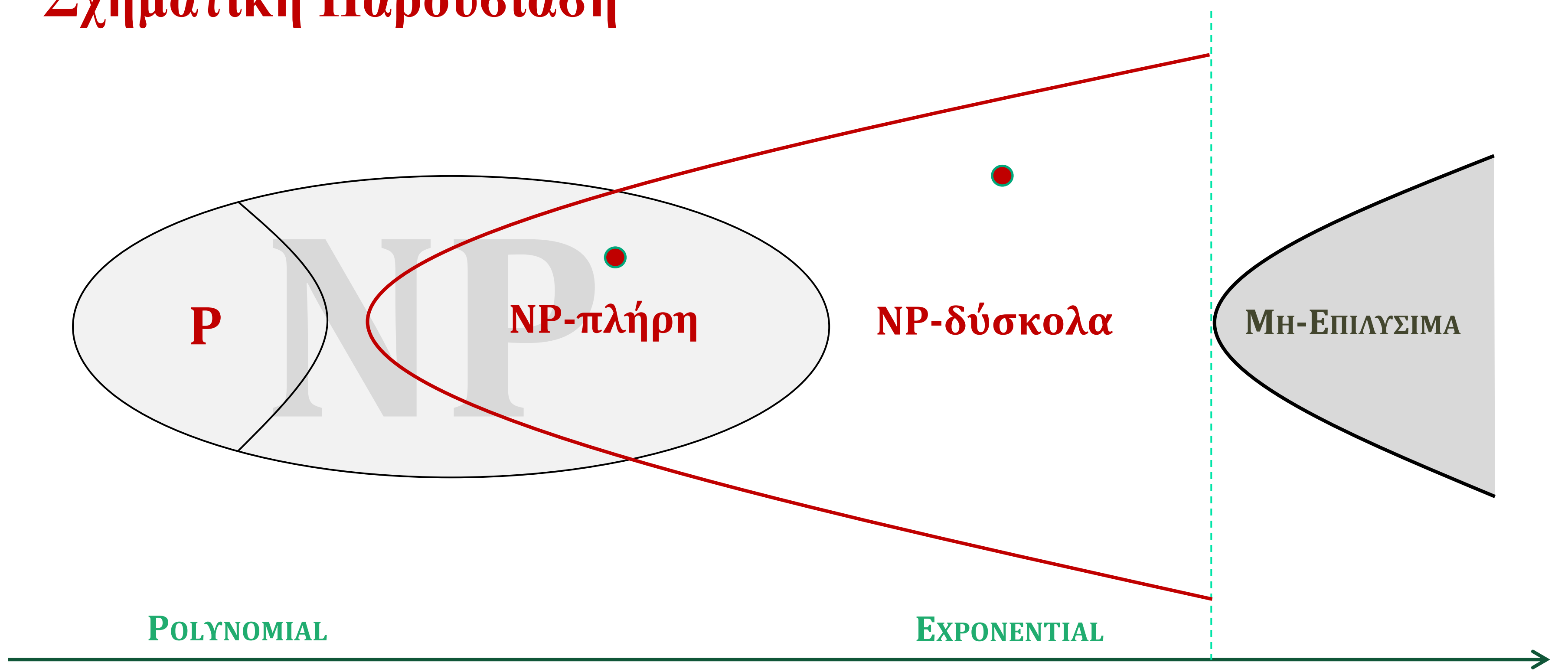
- Garey and Johnson, "Computers and Intractability: a Guide to the Theory of NP-completeness (pp. 187-288).

  Όλα τα γνωστά έως το 1979 NP-πλήρη προβλήματα. 12 κατηγορίες:

  - Θεωρία γραφημάτων (65)
  - Σχεδιασμός δικτύων (51)
  - Σύνολα και Διαμερίσεις (21)
  - Αποθήκευση και Ανάκτηση (36)
  - Σειριοποίηση και Δρομολόγηση (22)
  - Μαθηματικός προγραμματισμός (13)
  - Άλγεβρα και Θεωρία αριθμών (18)
  - Παίγνια και σπαζοκεφαλιές (15)
  - Λογική (19)
  - Αυτόματα και Γλώσσες (21)
  - Βελτιστοποίηση προγραμμάτων (20)
  - Διάφορα (19)

NP-πλήρη, NP-δύσκολα, Μη-επιλύσιμα

- Σχηματική Παρουσίαση



TSP Απόφασης – TSP Βελτιστοποίησης

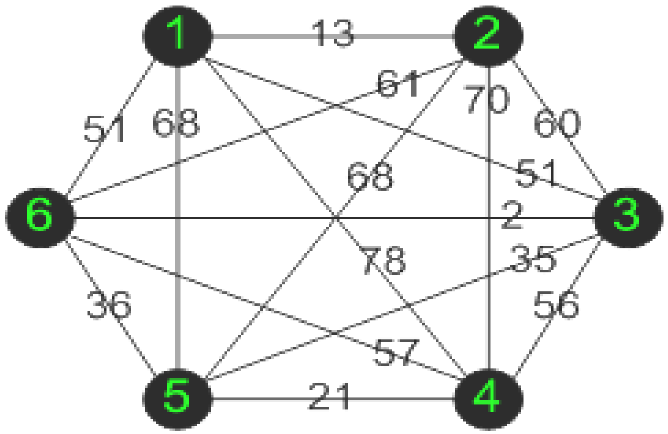
- **Αντιμετώπιση της NP-πληρότητας**

Αλγόριθμοι Προσέγγισης

Αλγόριθμοι Περιορισμών

TSP – Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι

- Επίλυση με ευριστικές υποβέλτιστες λύσεις
- Μέτρο σύγκρισης είναι η ποσότητα $1 \leq L / L_{opt} = a$



Hamilton κύκλων σε K_n είναι $\frac{(n-1)!}{2}$

- Από 1 κόμβο $\leq n-1 \cdot \leq n-2$

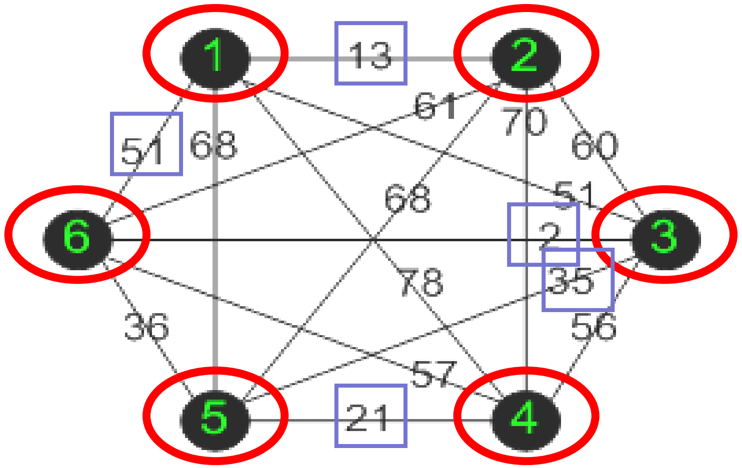
$O(n!) = O(n^n)$

$(n-1)!$

- Το $1/2$ διότι αυτά βρίσκει προσμετράται 2 φορές.

TSP – Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι

1. Μέθοδος Πλησιέστερου Γείτονα (άπληστη):

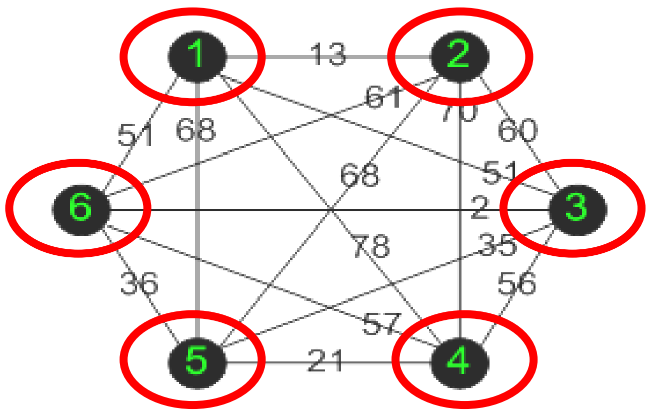


Διαδρομή: (4, 5, 6, 1, 2, 4)

Κόστος: 21+35+2+51+13+70 = 192

TSP – Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι

2. Μέθοδος Μικρότερης Εισαγωγής (άπληστη):



Διαδρομή

(3)
(3, 6, 3)
(3, 6, 5, 3)
(3, 6, 5, 4, 3)
(3, 6, 1, 5, 4, 3)
(3, 6, 2, 1, 5, 4, 3)

Κόστος: **192**

Μέθοδος: εισάγουμε τον κόμβο *v* στον κύκλο C_i εάν είναι ο πλησιέστερος κόμβος σε ένα ζεύγος διαδοχικών κόμβων (x, y) του C_i.

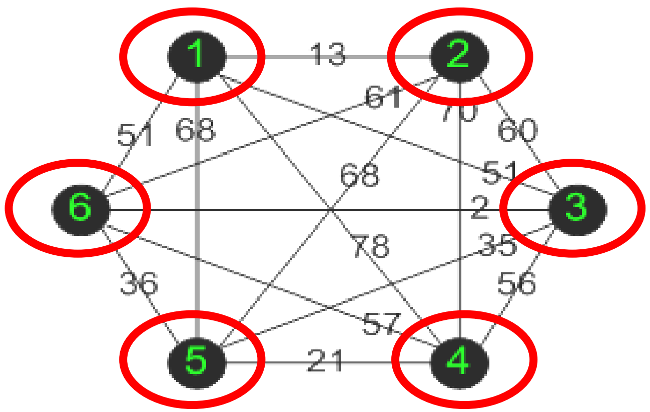
TSP – Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι

3. Μέθοδος Μικρότερης Εισαγωγής (άπληστη):

Διαδρομή

(3)
(3, 6, 3)
(3, 5, 6, 3)
(3, 5, 4, 6, 3)
(3, 1, 5, 4, 6, 3)
(3, 1, 2, 5, 4, 6, 3)

Κόστος: **212**



Διαδρομή

(3)
(3, 6, 3)
(3, 6, 5, 3)
(3, 6, 5, 4, 3)
(3, 6, 1, 5, 4, 3)
(3, 6, 2, 1, 5, 4, 3)

Κόστος: **192**

TSP – Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι

- **4**. Μέθοδος με ελάχιστα ζευγνύοντα δένδρα (3,1,2,4,5,6,3)

βάρος 212

- MST
- DFS $v_1, v_2, \dots, v_n$
- Hamilton $v_1, v_2, \dots, v_n, v_1$

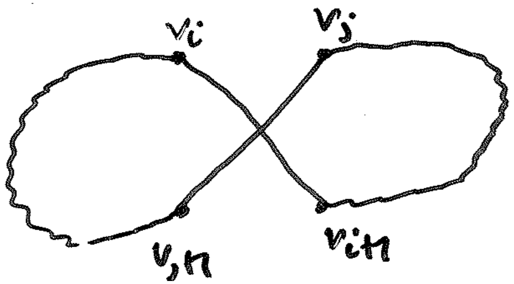
- **5**. Μέθοδος με διαδοχικές ανταλλαγές κορυφών

(3,4,5,6,1,2,3) βάρος 237

(3,6,5,4,1,2,3) βάρος 210

(3,6,5,4,2,1,3) βάρος 193

(3,6,1,2,4,5,3) βάρος 192



διαγραφή: (v_i, v_{i+1}) (v_j, v_{j+1})

προσθέση: (v_i, v_j) και (v_{i+1}, v_{j+1})

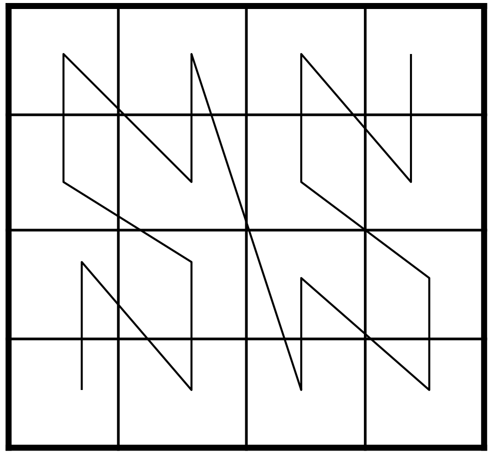
Έλεγχος: $w(v_i,v_j)+w(v_{i+1},v_{j+1}) < w(v_i,v_{i+1}) + w(v_j,v_{j+1})$

Άπειρα Γραφήματα

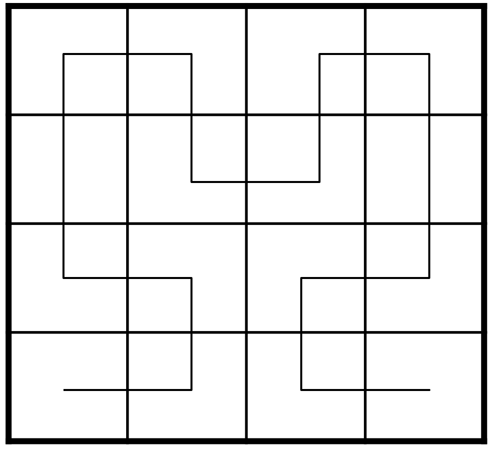
- Οι κόμβοι είναι σημεία του επιπέδου με ακέραιες συντεταγμένες, ενώ οι ακμές ενώνουν κορυφές σε απόσταση 1
- Σε άπειρο γράφημα δεν υπάρχει Eulerian κύκλωμα ή Hamiltonian κύκλος, αλλά υπάρχουν τα αντίστοιχα μονοπάτια
- <u>Μονοδρομικό</u> (one-way) Eulerian/Hamiltonian μονοπάτι είναι το μονοπάτι που ξεκινά από μία κορυφή και επεκτείνεται επ’άπειρο (space filling curve)

Άπειρα Γραφήματα

- Peano/z-order



- Hilbert



Άπειρα Γραφήματα

- Γραμμές, στήλες και διαγώνιοι έχουν ίσο άθροισμα
- Μεγάλη προϊστορία/ιστορία-Dührer

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

23	1	2	20	19
22	16	9	14	4
5	11	13	15	21
8	12	17	10	18
7	25	24	6	3

Μαγικά Τετράγωνα

- Γραμμές, στήλες και διαγώνιοι έχουν ίσο άθροισμα
- Μεγάλη προϊστορία/ιστορία-Dührer

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

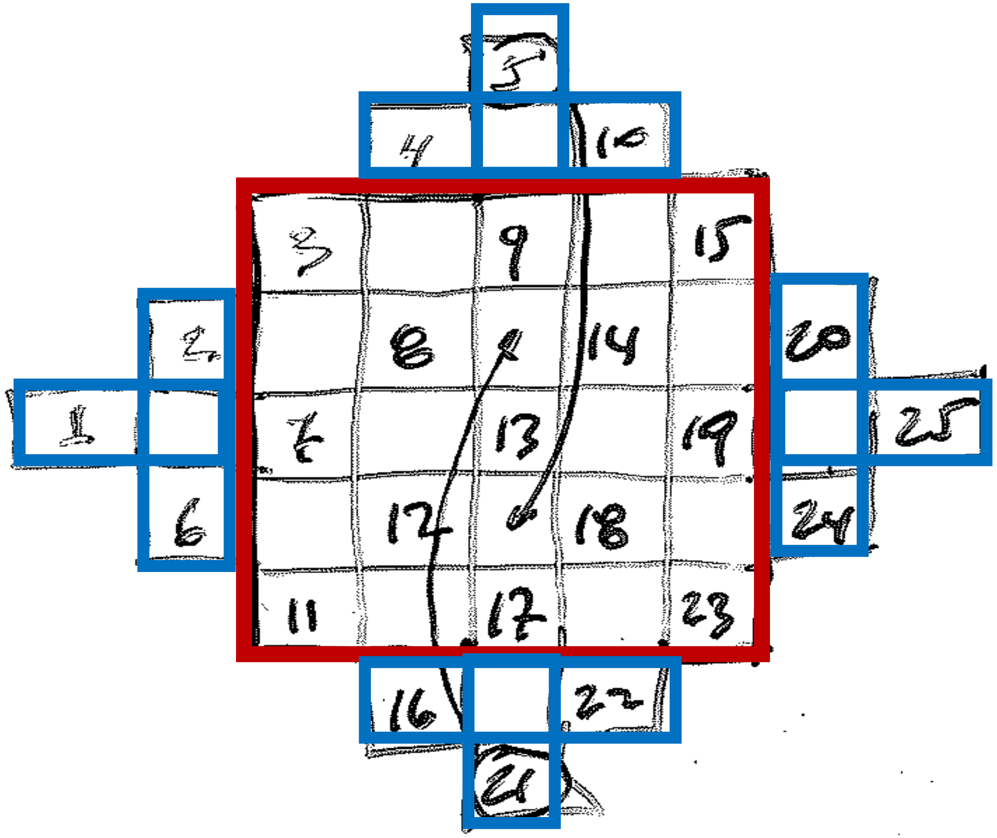
23	1	2	20	19
22	16	9	14	4
5	11	13	15	21
8	12	17	10	18
7	25	24	6	3

Μαγικά Τετράγωνα

- Αλγόριθμοι κατασκευής μαγικών τετραγώνων (περιττής τάξης):
  - Μέθοδος Bachet (με ρόμβο) **περιττής τάξης**
  - Με το τέχνασμα των τριών τυχαίων αριθμών (π.χ. 3,2,5)
  - Αντικαθιστώντας τους περιττούς αριθμούς 3-17 στις θέσεις 1-9
  - Προσθέτοντας σε κάθε θέση τον ίδιο αριθμό
- Μαγικό λέγεται το γράφημα όπου το άθροισμα των επιγραφών των ακμών που προσπίπτουν σε όλους τους κόμβους είναι ίσο

Μαγικά Τετράγωνα

- Μέθοδος Bachet



3	16	9	22	15
20	8	21	14	2
7	25	13	1	19
24	12	5	18	6
11	4	17	10	23

Μαγικά Τετράγωνα

- Θεώρημα: αν ένας διμερές γράφημα μπορεί να αποσυντεθεί σε 2 Hamiltonian κύκλους, τότε το γράφημα είναι μαγικό
- Αντιμαγικό λέγεται το γράφημα όπου τα αθροίσματα των επιγραφών των ακμών που προσπίπτουν σε όλους τους κόμβους είναι άνισα
- Πλήθος μαγικών αντικειμένων (ομόκεντρα τετράγωνα, τετράγωνα με ντόμινο, πολύγωνα κλπ)

Εφαρμογές

- <u>Κίνηση αλόγων</u> (knight tour) σε σκακιέρα ή κάθε είδους πλαίσιο
  - Hamiltonian μονοπάτια και κύκλοι
  - DeMoivre (κίνηση περιμετρικά)
  - Euler (μαγικό τετράγωνο), κλπ
- <u>Τοποθέτηση προσώπων σε τραπέζι</u>
  - <u>Θεώρημα:</u> για διαφορετικούς Hamiltonian κύκλους: (n-1)/2
- <u>Στιγμιαία παραφροσύνη</u>