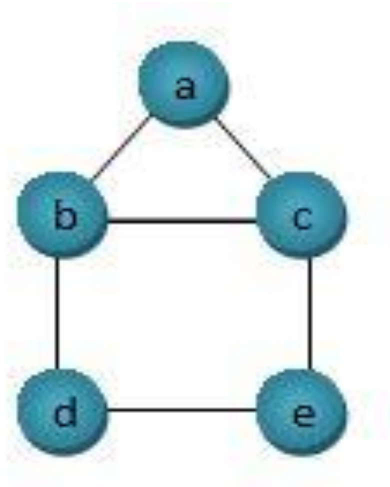
Θεωρία Γραφημάτων
Θεμελιώσεις-Αλγόριθμοι-Εφαρμογές

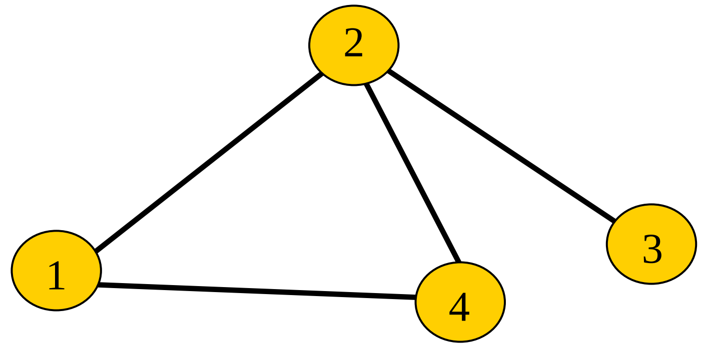
Ενότητα 2

Βασικες Εννοιες & Ορισμοι

Βασικές Έννοιες

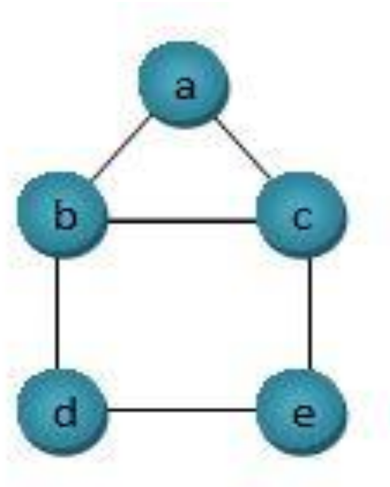


- Ορισμός: σύνολο κόμβων (κορυφών) και ακμών
- Συμβολισμός: $\boldsymbol{G = (V\,, E)}$, $(V(G)\,, E(G))$, (n, m)
- $|\, V(G)\,| = n$: τάξη - order
- $|\, E(G)\,| = m$: μέγεθος - size
- Πεπερασμένο γράφημα: n, m πεπερασμένα
- Άπειρο γράφημα

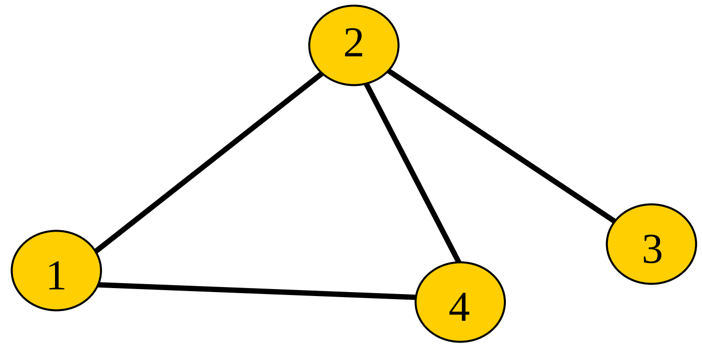


- **Ειδικές περιπτώσεις**: $n = 0$: κενό - empty
  $n = 1$: τετριμμένο - trivial
  $m = 0$: μηδενικό - null (N_n)

Βασικές Έννοιες

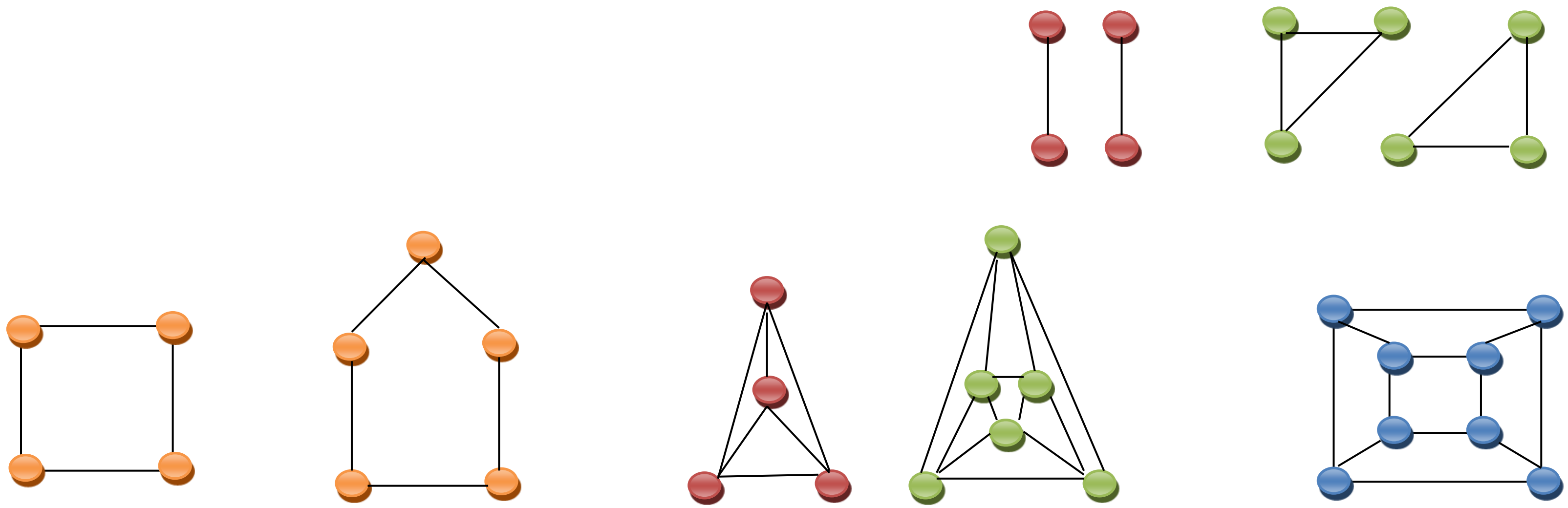


- Τερματικοί κόμβοι και προσπίπτουσα ακμή
- Γειτονικοί κόμβοι – ανεξάρτητοι κόμβοι
- Ανοικτό σύνολο γειτνίασης κόμβου: $N(v)$
- Κλειστό σύνολο γειτνίασης κόμβου: $N[v]$
- Βαθμός κόμβου v – $d(v)$ ή $deg(v)$
  - Ισχύει $d(v) = |N(v)|$
- Ελάχιστος και μέγιστος βαθμός γραφήματος: $d(G)$, $D(G)$



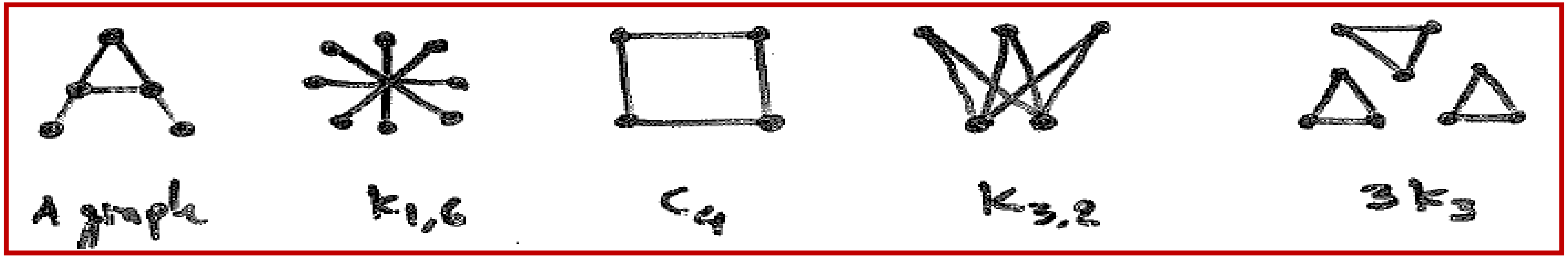
Βασικές Έννοιες

- **Τακτικά γραφήματα (regular):**
  - Κυκλικό γράφημα (C_n): όλοι οι κόμβοι d(v)=2 (κυβικός k = 3)
  - Πλατωνικά γραφήματα (τετράεδρο, κύβος, οκτάεδρο, δωδεκάεδρο, εικοσάεδρο)



Βασικές Έννοιες

- **Συμβολισμοί:**

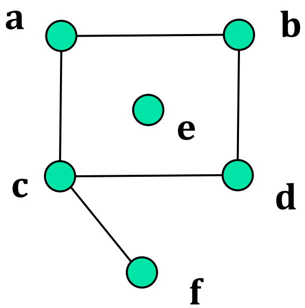


- C_n Άχορδος κύκλος με *n* κόμβους
- K_n Πλήρες γράφημα με *n* κόμβους
- P_n Άχορδη διαδρομή με *n* κόμβους

Βασικές Έννοιες

- Απομονωμένος κόμβος – isolated d(v)=0
- Εκκρεμής ή τερματικός κόμβος – pendant d(v)=1
- Συνδεδεμένες συνιστώσες (k)
- Συνεκτικό γράφημα
- Συνεκτικό γράφημα κατά ελάχιστο τρόπο
- Σειρά – rank (r = n - k)
- Μηδενικότητα – nullity (μ = m – n - k)
- Βρόχος και Παράλληλες ακμές
- Απλό γράφημα, Ψευδο-γράφημα, Πολύ-γράφημα, Επαγόμενο, Κατευθυνόμενο και Τόξα

Βασικές Έννοιες

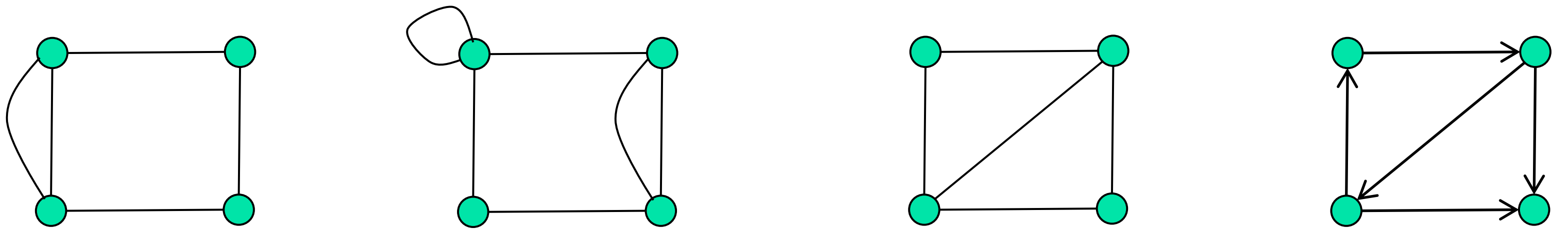


- d(e) = 0 (απομονωμένος)
- d(f) = 1 (εκκρεμής)

- CC(G) = 2 (μη-συννεκτικό)

- Συνεκτικές Συνιστώσες k = 2
- Σειρά r = 6-2 (r = n-k)
- Μηδενικότητα μ = 5-4 (μ = m-n-k)

Βασικές Έννοιες



G_1 G_2 G_3 G_4

- Βρόχος
- Παράλληλες Ακμές

- Απλό Γράφημα : G_3
- Πολυγράφημα : G_1 (όχι G_2)
- Ψευδογράφημα : G_2 (έχει βρόχους)
- Κατευθυνόμενο : G_4

Βασικές Έννοιες

- Λήμμα (των χειραψιών): Το άθροισμα των βαθμών όλων των κόμβων ενός γραφήματος G = (V, E) είναι διπλάσιο του πλήθους των ακμών του, δηλ.

$$\Sigma d(u) = 2\,|E| \qquad \mathbf{(1)}$$

Κάθε ακμή συνεισφέρει στο άθροισμα κατά 1 για κάθε ένα κόμβο στον οποίο προσπίπτει.

- Πόρισμα: Για τακτικά γραφήματα G = (V, E) βαθμού k ισχύει η σχέση:

$$k\,|V| = 2\,|E| \qquad \mathbf{(2)}$$

G τακτικός βαθμού k $\Rightarrow$ $\Sigma d(u) = k\,|V|$. Από (1) $\Rightarrow$ (2).

Βασικές Έννοιες

- Θεώρημα: Το πλήθος των κόμβων περιττού βαθμού ενός γραφήματος $G = (V, E)$ είναι άρτιος αριθμός.

Από (1) (δηλ. $\Sigma d(u) = 2\,|E|$) $\Rightarrow$ $\Sigma d(u)$ = άρτιος αριθμός.

Ισχύει: $\Sigma d(u)$ = άρτιος αριθμός, και

$\Sigma d(u)$ = # κόμβων αρτίου βαθμού +

κόμβων περιττού βαθμού

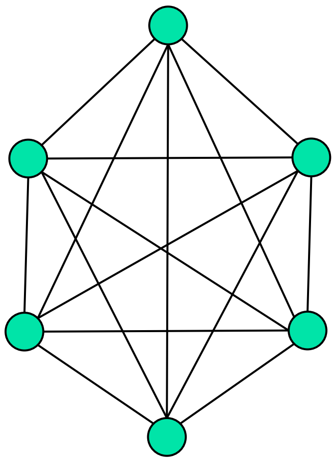
Επειδή το # κόμβων αρτίου βαθμού είναι άρτιο

$\Rightarrow$

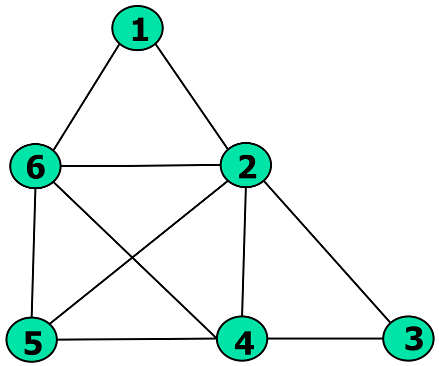
το # κόμβων περιττού βαθμού είναι άρτιο.

Βασικές Έννοιες

- Πλήρης γράφημα K_n
- Κλίκα γραφήματος G – αριθμός κλίκας ω(G)

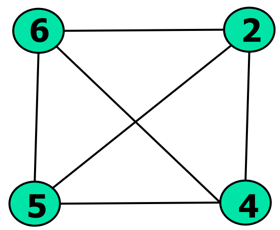


K_6



G

$\Rightarrow$

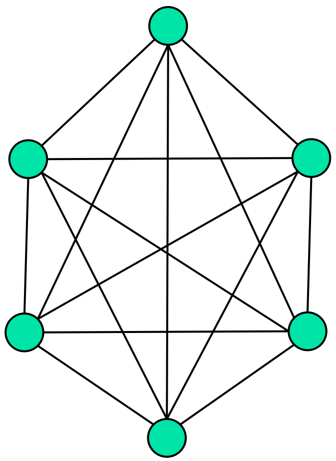


Max κλίκα του G

$\omega(G) = 4$

Βασικές Έννοιες

- <u>Θεώρημα:</u> Ένα πλήρες γράφημα έχει n(n-1)/2 ακμές.



K_6

- Το πλήθος των ακμών που προσπίπτουν σε ένα κόμβο ενός πλήρους γραφήματος G βαθμού n, είναι n-1.
- Εάν αφαιρέσουμε ένα κόμβο από ένα πλήρες γράφημα G βαθμού n, το προκύπτων γράφημα G' είναι πλήρες βαθμού n-1.
- Επομένως, το πλήθος των ακμών του G είναι:

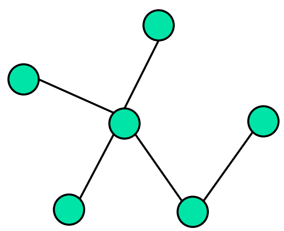
$$(n-1) + (n-2) + \ldots + 1 = n(n-1) / 2$$

Βασικές Έννοιες

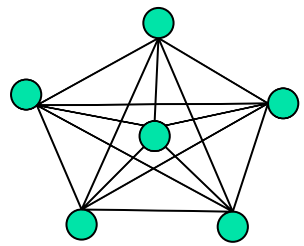
- Θεώρημα: Έστω G απλό γράφημα n κόμβων και m ακμών, και έστω $k \geq 1$ το πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών του. Ισχύει:

$$n-k \leq m \leq (n-k)(n-k+1)/2$$

$k = 1$ (G συνεκτικό): $n \leq m \leq n(n-1) / 2$



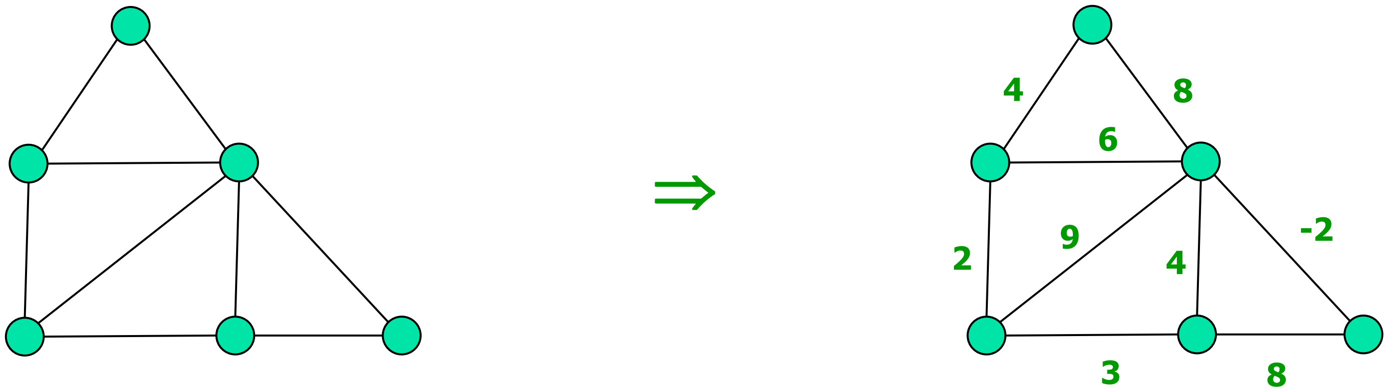
$\leq \; m \; \leq$



- Πόρισμα: Κάθε απλό γράφημα G με n κόμβους και τουλάχιστο $(n-1)(n-2)/2$ ακμές είναι συνεκτικό.

Βασικές Έννοιες

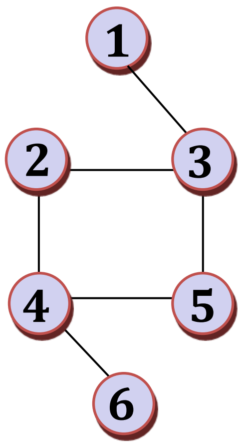
- Έμβαρο γράφημα - βάρος ακμής

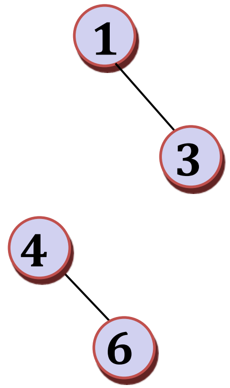


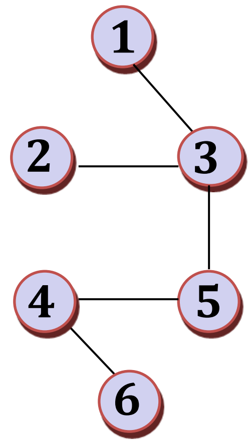
- Υπογράφημα, υπεργράφημα, ζευγνύων υπογράφημα, επαγόμενο υπογράφημα

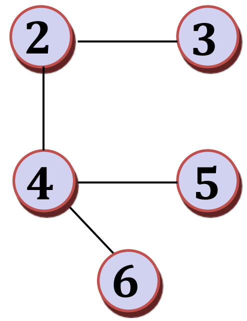
Βασικές Έννοιες

- Επαγόμενα Γραφήματα







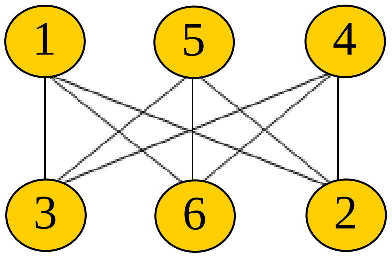


$G = (V, E)$ $\qquad$ $V' = \{1, 3, 4, 6\}$ $\qquad$ V' $\qquad$ V'

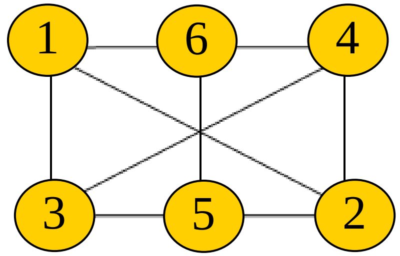
$G[V']$ $\qquad$ **?** $\qquad$ **?**

Βασικές Έννοιες

- Ισομορφικά Γραφήματα



=



‘Ισα (ίδια) γραφήματα

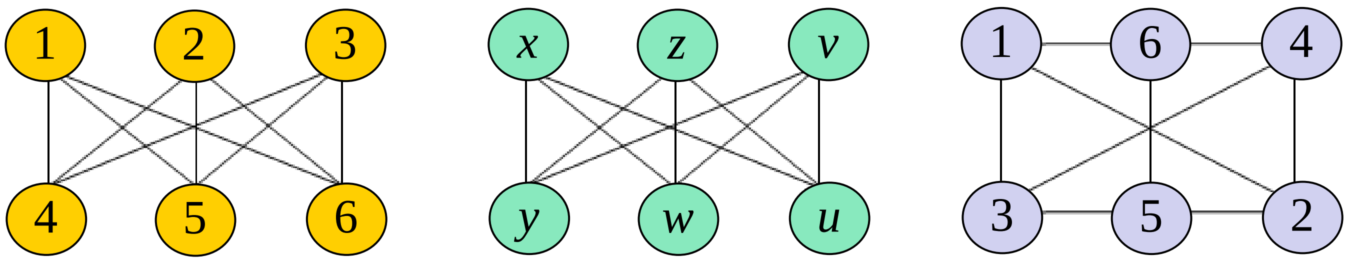
- $V(G_1) = V(G_2)$
- $E(G_1) = E(G_2)$

Βασικές Έννοιες

- Ισομορφικά Γραφήματα

G_1, G_2 ισομορφικά εάν υπάρχει f 1-1 και επί (αμφιμονοσήματη αντιστοιχία μεταξύ των συνόλων $V(G_1)$ και $V(G_2)$) :

$$(x, y) \in E(G_1) \quad \Rightarrow \quad (f(x), f(y)) \in E(G_2)$$



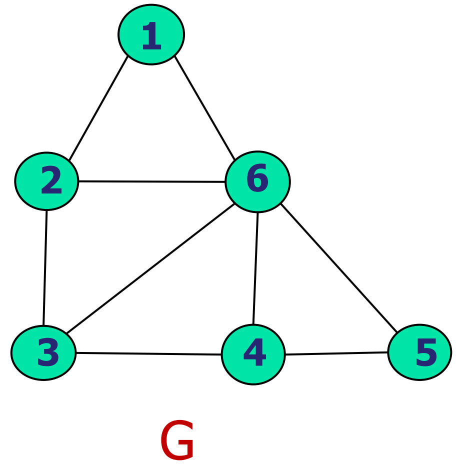
Ισομορφικά

- 1, 2, 3, 4, 5, 6
- 1, 5, 4, 3, 6, 2

$(2,6) \in E \Leftrightarrow (5, 6) \in E'$

Πράξεις επί των Γραφημάτων

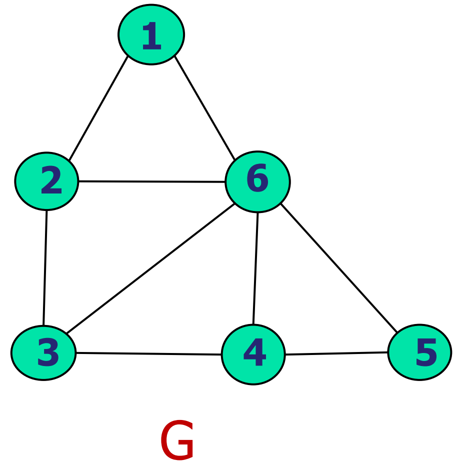
- Οι πράξεις σε γραφήματα διακρίνονται:
  - Πρωτεύουσες (primary)
  - Δευτερεύουσες (secondary)
    - όπου οι δευτερεύουσες υλοποιούνται με συνδυασμό ή επανάληψη πρωτευουσών πράξεων.



- Πρωτεύουσες — Διαγραφή κόμβου
  Διαγραφή ακμής

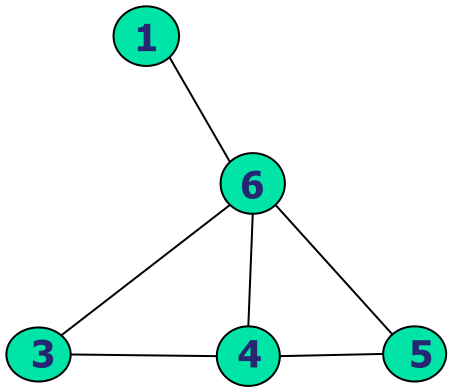
Πρωτεύουσες Πράξεις

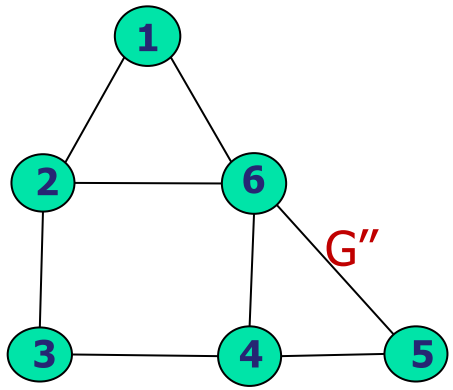
- Διαγραφή κόμβου/ακμής – deletion
  - Συμβολισμός: $G - u$, $G - e$
  - … όμως, $V' = V\text{-}\{u\}$, $E'' = E\text{-}\{e\}$



- Διαγραφή κόμβου u = 2 Διαγραφή ακμής e = {3,6}

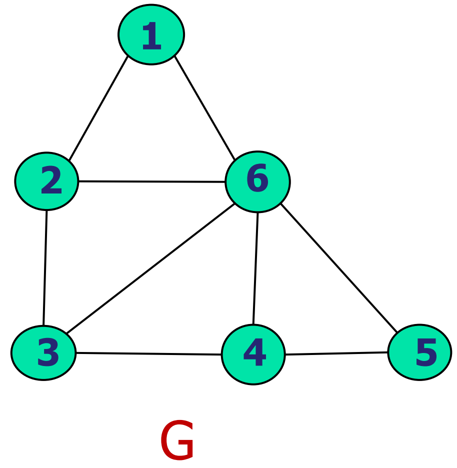
G′



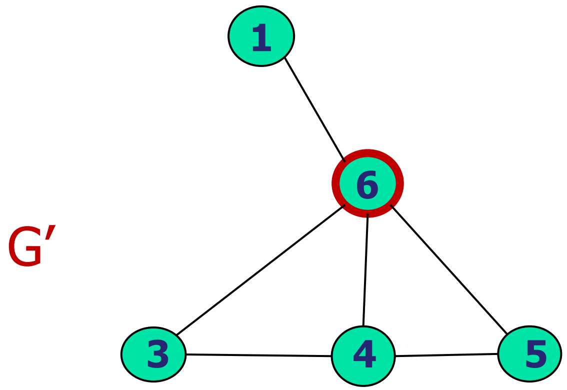


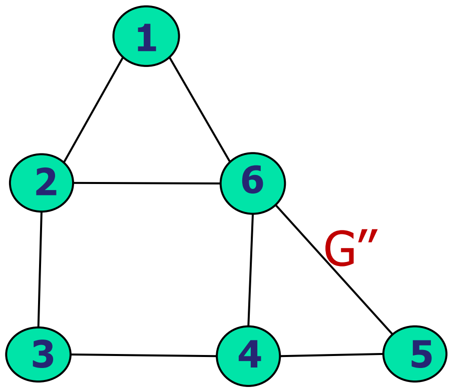
Πρωτεύουσες Πράξεις

- Διαγραφή κόμβου/ακμής – deletion
  - Συμβολισμός: G - u, G - e
  - … όμως, V′ = V-{u}, E″ = E-{e}



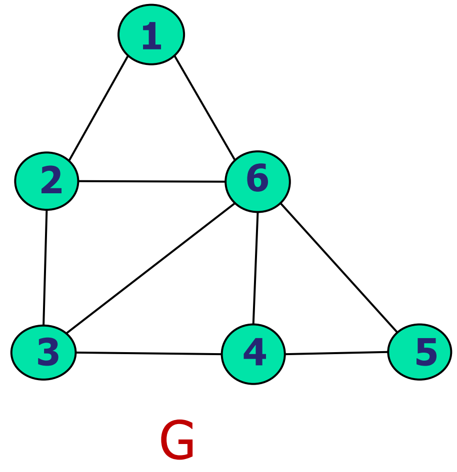
- Κόμβος τομής (cut-vertex) Ακμή τομής (cut-edge or bridge)





Πρωτεύουσες Πράξεις

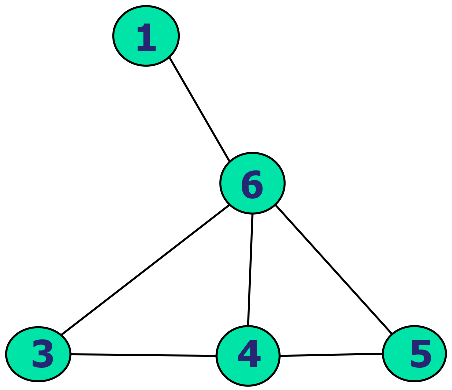
- Διαγραφή κόμβου/ακμής – deletion
  - Συμβολισμός: G - u, G - e
  - … όμως, $V' = V\text{-}\{u\}$, $E'' = E\text{-}\{e\}$

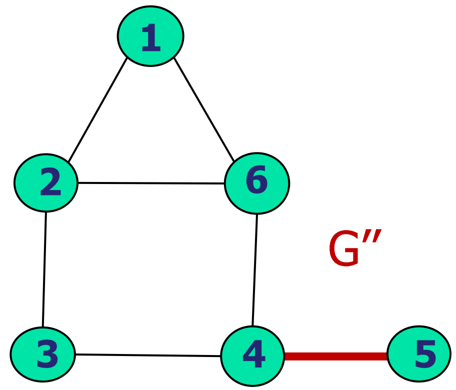


- Κόμβος τομής (cut-vertex)

Ακμή τομής (cut-edge or bridge)

G′

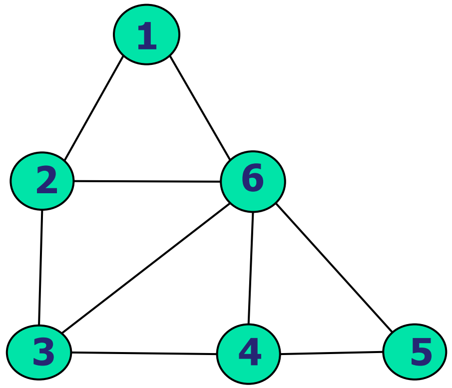




G″

Πρωτεύουσες Πράξεις

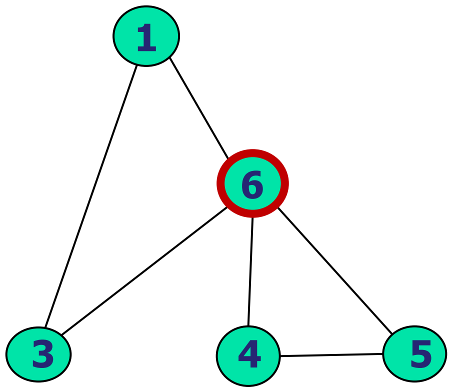
- Διαγραφή κόμβου/ακμής – deletion
  - Συμβολισμός: G - u, G - e
  - … όμως, V′ = V-{u}, E″ = E-{e}

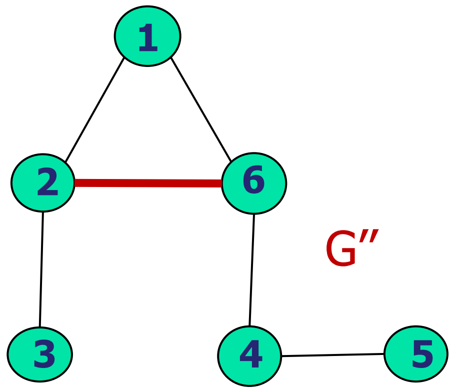


G

- Κόμβος τομής (cut-vertex) Ακμή τομής (cut-edge or bridge)

G′

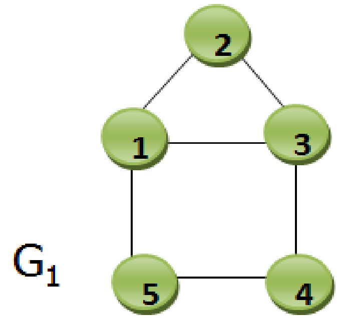


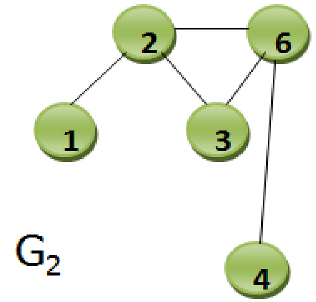


G″

Δευτερεύουσες Πράξεις

- Οι δευτερεύουσες πράξεις σε γραφήματα διακρίνονται:
  - Δυαδικές (binary)
  - Μοναδιαίες (unary)
    - όπου οι δυαδικές εφαρμόζονται σε δύο γραφήματα ενώ οι μοναδιαίες σε ένα.





- Δυαδικές Ένωση, Τομή, Άθροισμα δακτυλίου, Σύνδεση ή άθροισμα, Καρτεσιανό Γινόμενο, Λεξικογραφικό Γινόμενο

- Μοναδιαίες Συμπλήρωμα, n-οστη δύναμη

Οι Πράξεις $\cup$ $\cap$ $\oplus$

- Ένωση – union $(G_1 \cup G_2)$

$G = (V, E) = G_1 \cup G_2 \Rightarrow$

$$V = V_1 \cup V_2$$
$$E = E_1 \cup E_2$$

- Τομή – intersection $(G_1 \cap G_2)$

$G = (V, E) = G_1 \cap G_2 \Rightarrow$

$$V = V_1 \cap V_2$$
$$E = E_1 \cap E_2$$

- Άθροισμα δακτυλίου – ring sum $(G_1 \oplus G_2)$

$G = (V, E) = G_1 \oplus G_2 \Rightarrow$

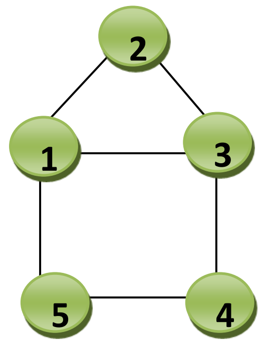
$$V = V_1 \cup V_2$$

$E = \{$Ακμές που ανήκουν ΜΟΝΟ στο ένα γράφημα αλλά ΌΧΙ και στα ΔΥΟ$\}$

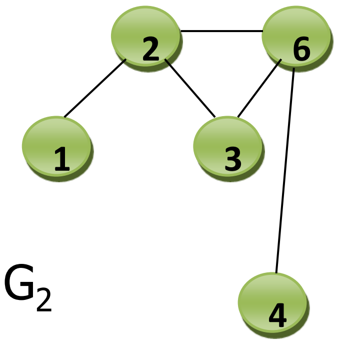
Οι Πράξεις ∪ ∩ ⊕

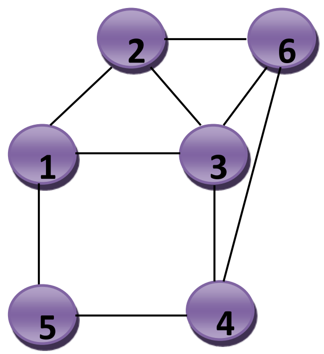
- Παράδειγμα:

G_1

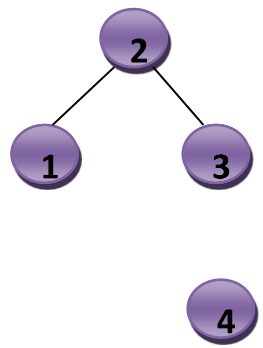


G_2

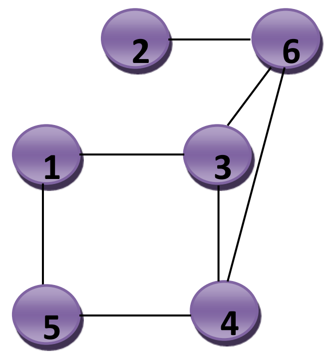




$G_1 \cup G_2$



$G_1 \cap G_2$



$G_1 \oplus G_2$

Η Πράξη +

- Σύνδεση ή άθροισμα – join or sum (G_1 **+** G_2)

$G = (V, E) = G_1 + G_2 \Rightarrow$

$$\mathbf{V = V_1 \cup V_2}$$

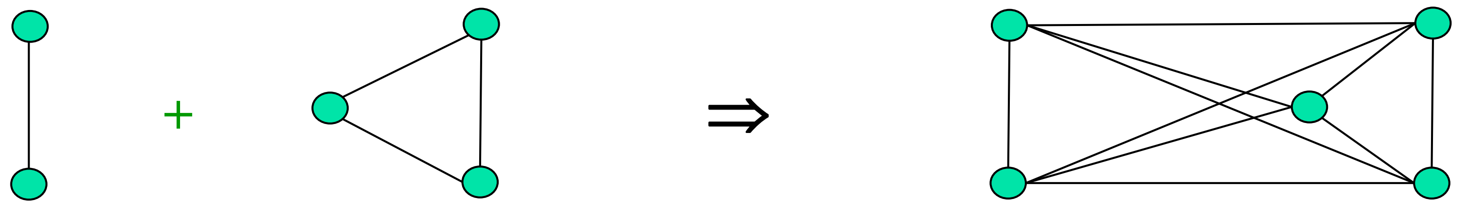
$$\mathbf{E = E_1 \cup E_2 \cup E_3}$$

όπου,

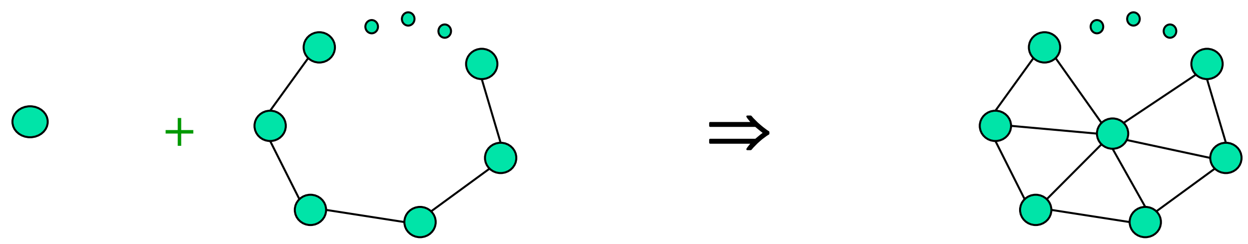
$\mathbf{E_3}$ **= {όλες οι ακμές με ένα άκρο στο $\mathbf{V_1}$ και το άλλο στο $\mathbf{V_2}$}**

Η Πράξη +

- Παράδειγμα:



K_2 K_3 K_5 (complete graph)



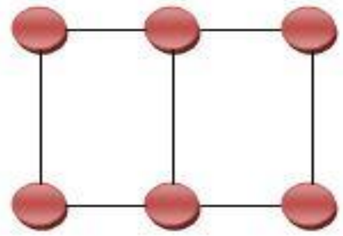
K_1 (N_1) C_{n-1} W_n (wheel graph)

Γινόμενα

- Καρτεσιανό Γινόμενο $G_1 \times G_2$

G_1

G_2



$G_1 \times G_2$

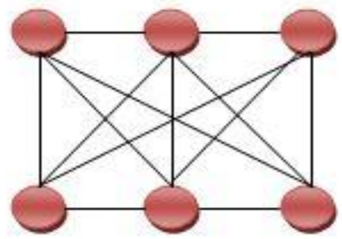
?

$G_2 \times G_1$

- Λεξικογραφικό Γινόμενο $G_1[G_2]$

G_1

G_2



$G_1[G_2]$

?

$G_2[G_1]$

Καρτεσιανό Γινόμενο $G_1 \times G_2$

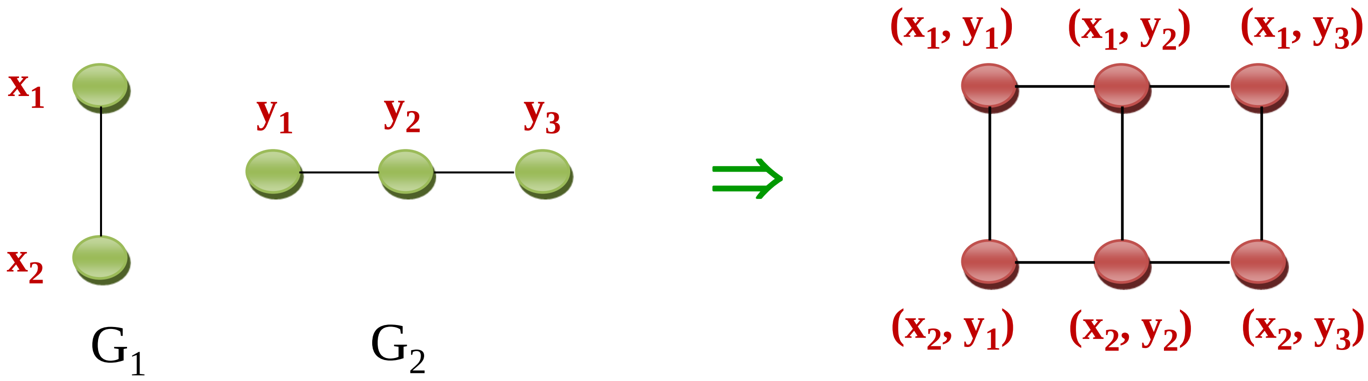
- Καρτεσιανό Γινόμενο $G = (V, E) = G_1 \times G_2$

Σύνολο Κόμβων: $V(G_1 \times G_2) = V(G_1) \times (G_2)$

Σύνολο Ακμών: $(x, y) \in E(G_1 \times G_2)$, **όπου** $x = (x_1, x_2)$ **και** $y = (y_1, y_2)$

εάν $x_1 = y_1$ **και** $(x_2, y_2) \in E(G_2)$, **ή**

εάν $x_2 = y_2$ **και** $(x_1, y_1) \in E(G_1)$



$G_1 \times G_2$ $\quad$ $G_2 \times G_1$?

Λεξικογραφικό Γινόμενο $G_1 [G_2]$

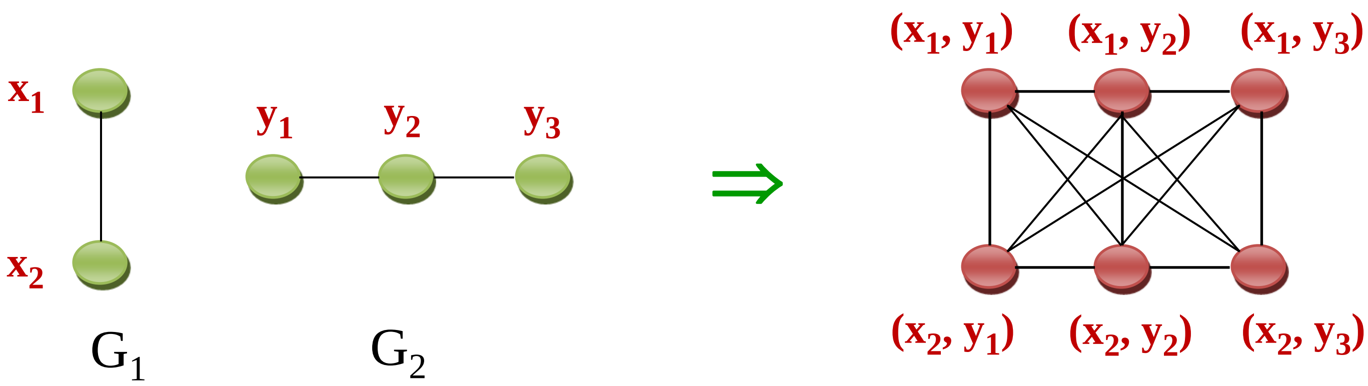
- Λεξικογραφικό Γινόμενο $G = (V, E) = G_1[G_2]$

  Σύνολο Κόμβων: $V(G_1[G_2]) = V(G_1) \times (G_2)$

  Σύνολο Ακμών: $(x, y) \in E(G_1[G_2])$, **όπου** $x = (x_1, x_2)$ **και** $y = (y_1, y_2)$

  εάν $(x_1, y_1) \in E(G_1)$, **ή**

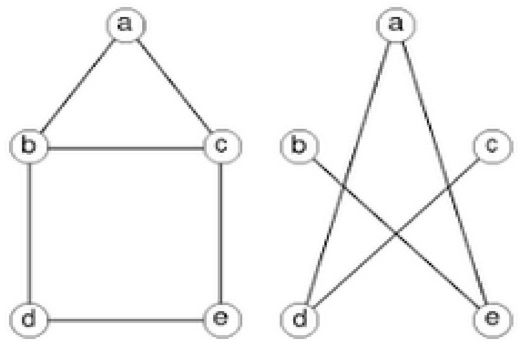
  εάν $x_1 = y_1$ **και** $(x_2, y_2) \in E(G_2)$

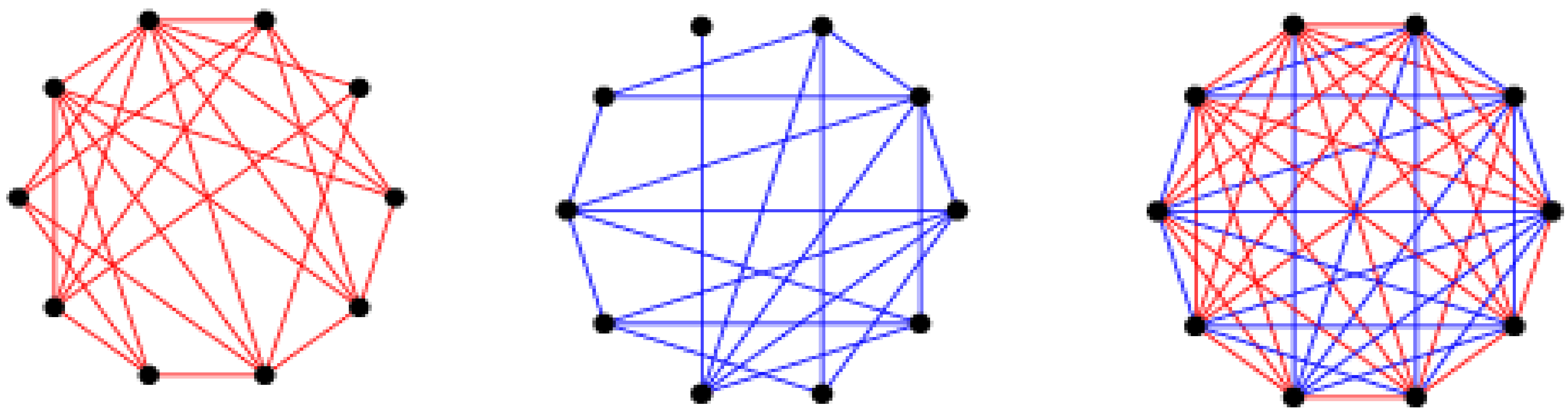


$G_1[G_2]$ $G_2[G_1]$?

Συμπλήρωμα

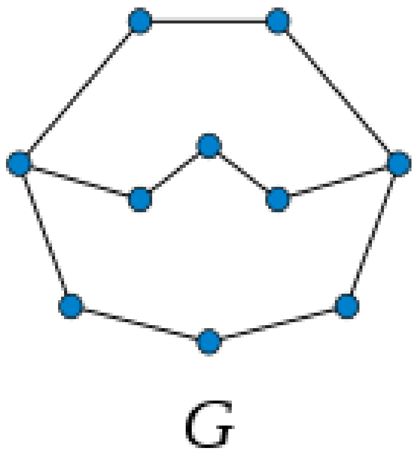
- Συμπλήρωμα – complement

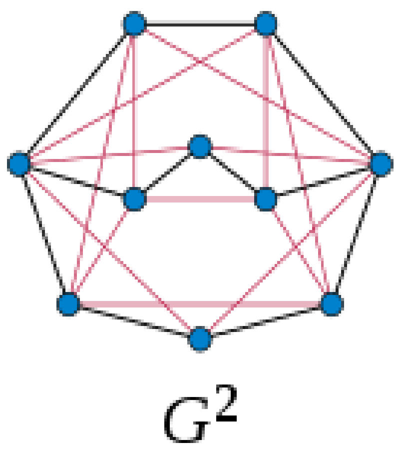




N-οστή Δύναμη

- N-οστή δύναμη – n-th power

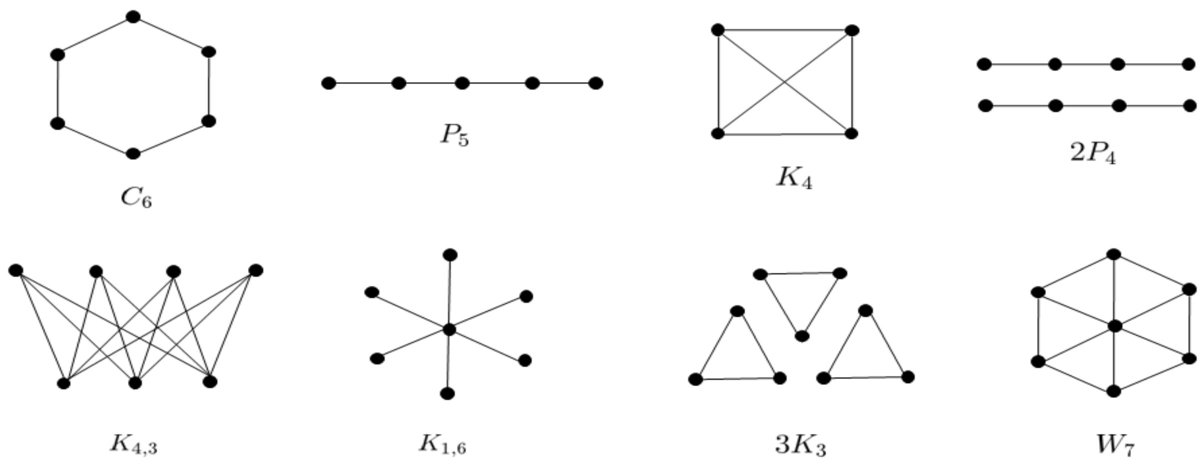




Πράξεις (2) ...

- Συμπλήρωμα – complement
- Διμερές, πλήρες διμερές (αστεροειδές γράφημα $K_{1,n}$)
- Διαγραφή κόμβου/ακμής – deletion (G-{e}, G-{v})
- Κόμβος τομής ή σημείο άρθρωσης (articulation point)
- Αποκόπτουσα ακμή ή γέφυρα (bridge)
- Δισυνεκτικό (biconnected)

…



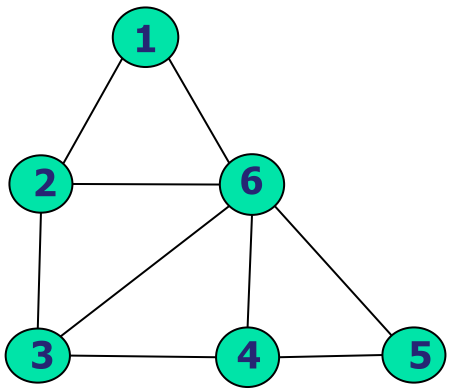
Αποθήκευση Γραφημάτων

- Στατικές αναπαραστάσεις
  - Πίνακας γειτνίασης – adjacency matrix
  - Πίνακας προσπτώσεων – incidence matrix

- Δυναμικές αναπαραστάσεις
  - Λίστες γειτνίασης – adjacency lists
  - Λίστες ακμών – edge lists (για αραιούς γράφους)

Αποθήκευση Γραφημάτων

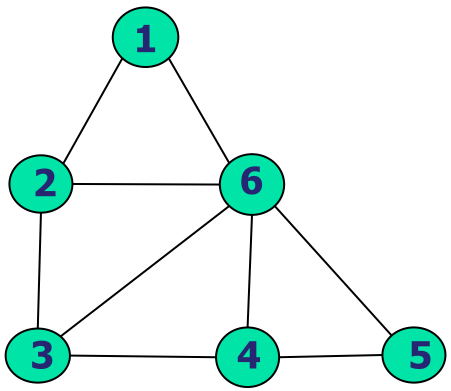
- Στατικές αναπαραστάσεις
  - Πίνακας γειτνίασης – adjacency matrix

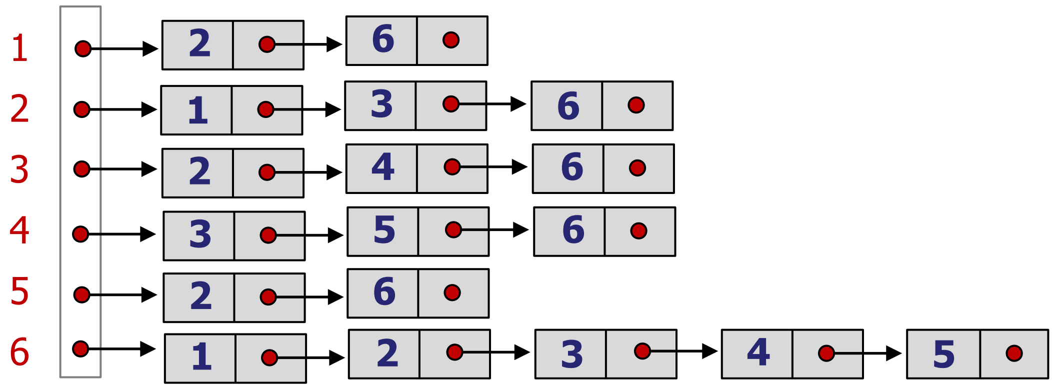


	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	0	0	1
2	1	0	1	0	0	1
3	0	1	0	1	0	1
4	0	0	1	0	1	1
5	0	0	0	1	0	1
6	1	1	1	1	1	0

Αποθήκευση Γραφημάτων

- Δυναμικές αναπαραστάσεις
  - Λίστες γειτνίασης – adjacency lists





Αλγόριθμοι και Γραφήματα

- Αλγοριθμική θεωρία γραφημάτων
- Πολυπλοκότητα χώρου και χρόνου
- Συμβολισμός O
- Ανάλυση μέσης και χειρότερης περίπτωσης

Ακολουθία Βαθμών

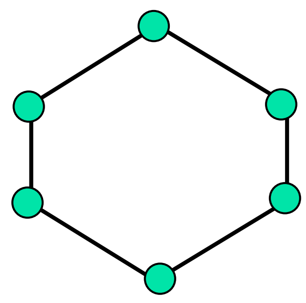
✓ Γραφική Ακολουθία Βαθμών

- Μη αύξουσα ακολουθία ακεραίων S
- Γραφική ακολουθία εάν S ⇒ G
- Εαν S ⇒ G, τότε G ονομάζεται *πραγματοποίηση* (realization) της ακολουθία S

❖ Συνθήκες:

I. Μη αρνητικές τιμές
II. Πλήθος περιττών βαθμών άρτιο
III. Τιμές μικρότερες από n

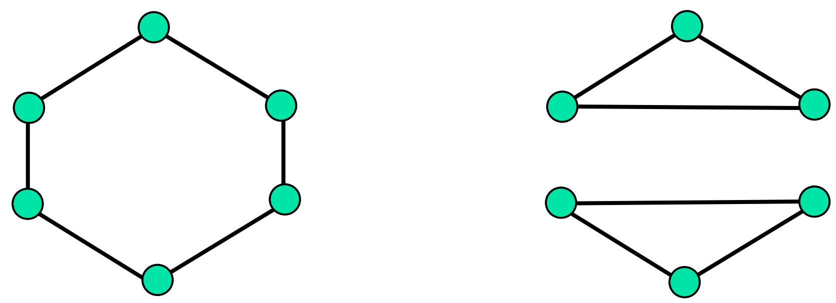
S = (2, 2, 2, 2, 2, 2)



Ακολουθία Βαθμών

- Ερώτηση: Είναι οι συνθήκες αυτές ικανές για να αντιστοιχίζεται μια ακολουθία βαθμών S σε μοναδικό γράφημα G?

- Παράδειγμα: 2, 2, 2, 2, 2, 2



- Απλή (simple) Γραφική Ακολουθία

  εάν είναι γραφική και υπάρχει μοναδική πραγματοποίησή της

Ακολουθία Βαθμών

- Θεώρημα (Havel [1955] and Hakimi [1962]):

Μια ακολουθία βαθμών

$$S = d_1, d_2, \ldots, d_n$$

είναι γραφική, εάν-ν η ακολουθία βαθμών

$$S_1 = \underbrace{d_2\mathbf{-1}, d_3\mathbf{-1}, \ldots, d_{d_1+1}\mathbf{-1}}_{d_1}, d_{d_1+2}, \ldots, d_n$$

είναι γραφική.

Ακολουθία Βαθμών

- Θεώρημα (Havel [1955] and Hakimi [1962]):

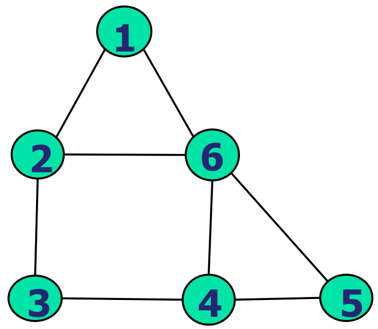
Μια ακολουθία βαθμών

$$S = d_1, d_2, \ldots, d_n$$

είναι γραφική, εάν-ν η ακολουθία βαθμών

$$S_1 = \underbrace{d_2\mathbf{-1}, d_3\mathbf{-1}, \ldots, d_{d_1+1}\mathbf{-1}}_{d_1}, d_{d_1+2}, \ldots, d_n$$

είναι γραφική.

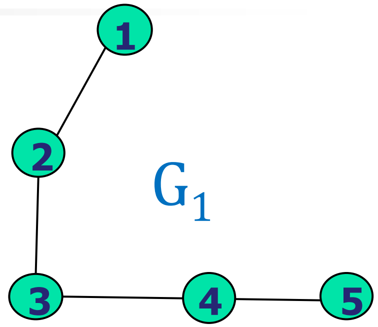


$$S = (4, \underbrace{3, 3, 2, 2, 2}_{2,\ 2,\ 1,\ 1,\ 2})$$

$S = (4, 3, 3, 2, 2, 2)$ εάν-ν $S_1 = (2, 2, 2, 1, 1)$

Ακολουθία Βαθμών

$S_1 = (2, 2, 1, 1, 2)$



G_1

- Απόδειξη:

($\Leftarrow$) Έστω ότι η

$$S_1 = d_2\text{-}1,\ d_3\text{-}1,\ \ldots,\ d_{d_1+1}\text{-}1,\ d_{d_1+2},\ \ldots,\ d_n$$

είναι γραφική, και έστω G_1 η πραγματοποίησή της.

Θεωρούμε επιγραφές των n-1 κόμβων του γραφήματος G_1 :

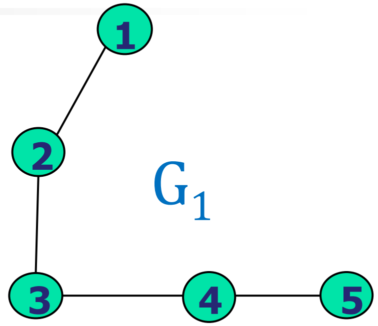
$$x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n$$

έτσι ώστε:

$$d(x_i) = \begin{cases} d_i - 1 & 2 \leq i \leq d_1+1 \\ d_i & d_1+2 \leq i \leq n \end{cases}$$

Ακολουθία Βαθμών

$S_1 = (2, 2, 1, 1, 2)$



G_1

- Απόδειξη:

(⇐) Έστω ότι η

$$S_1 = d_2\text{-}1,\ d_3\text{-}1,\ \ldots,\ d_{d_1+1}\text{-}1,\ d_{d_1+2},\ \ldots,\ d_n$$

είναι γραφική, και έστω G_1 η πραγματοποίησή της.

Θεωρούμε επιγραφές των n-1 κόμβων του γραφήματος G_1 :

$$x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n$$

έτσι ώστε: 2, 4, 3, 5, 1

$$d(x_i) = \begin{cases} d_i - 1 & 2 \le i \le d_1+1 \\ d_i & d_1+2 \le i \le n \end{cases}$$

Ακολουθία Βαθμών

- Απόδειξη... συνέχεια (1):

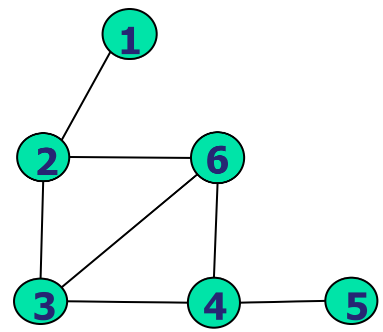
Από G_1 μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα νέο γράφημα G ως εξής:

(i) εισάγουμε ένα νέο κόμβο x_1, και

(ii) ακμές (x_1, x_i) για $2 \leq i \leq d_i+1$

Το γράφημα G έχει ακολουθία βαθμών την S.

Άρα, η ακολουθία S είναι γραφική.



2, 4, 3, 5, 1

Ακολουθία Βαθμών

- Απόδειξη… συνέχεια (2):

(⇒) Υποθέτουμε τώρα ότι η ακολουθία S είναι γραφική

$$S = d_1, d_2, \ldots, d_n$$

Θα δείξουμε ότι η S_1 είναι γραφική.

Επειδή S γραφική ⇒ υπάρχουν μία ή περισσότερες πραγματοποιήσεις της S, δηλαδή,

υπάρχουν γραφήματα $G_1, G_2, \ldots, G_k$ $(k \geq 1)$ τάξης n,
με ακολουθία βαθμών την S.

Ακολουθία Βαθμών

- Απόδειξη… συνέχεια (3):

  Από τα γραφήματα αυτά, έστω ***G*** το γράφημα με την εξής ιδιότητα:

  (i) $V(G) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, όπου $d(x_i) = d_i$, $1 \leq i \leq n$

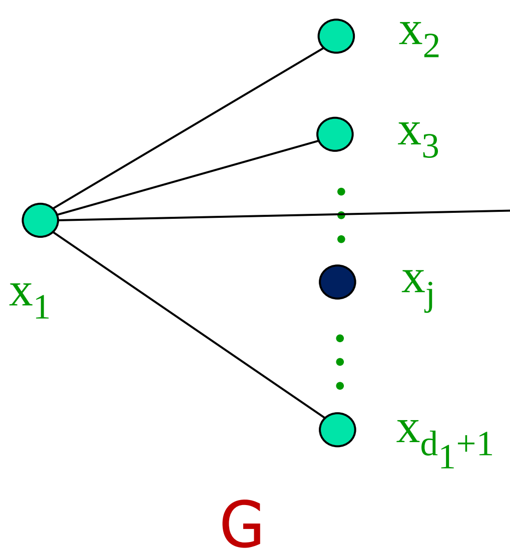
  (ii) το άθροισμα των βαθμών των γειτονικών κόμβων του x_1 είναι μέγιστο (maximum).

> Ισχυρισμός Α:
>
> Στο γράφημα ***G*** ο κόμβος $\mathbf{x_1}$ είναι γειτονικός σε d_1 κόμβους $x_2, x_3, \ldots, x_{d_1+1}$ με τους μεγαλύτερους βαθμούς $d_2, d_3, \ldots, d_{d_1+1}$

Ακολουθία Βαθμών

- Απόδειξη... συνέχεια (4):

  Υποθέτουμε ότι ισχύει το αντίθετο, δηλαδή ο κόμβος x_1 **δεν** είναι γειτονικός σε όλους τους d_1 κόμβους με τους μεγαλύτερους βαθμούς $d_2, d_3, \ldots, d_{d_1+1}$ στο γράφημα G.



Επειδή $d(x_1)=d_1$, υπάρχουν δύο κόμβοι x_j και x_i στο ***G***:

$d(x_j) > d(x_i)$ (από ιδιότητα S)

και

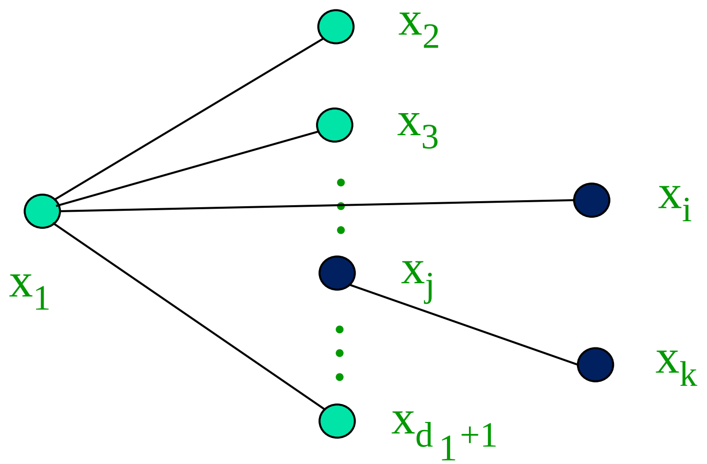
$(x_1, x_j) \notin E(G)$

$(x_1, x_i) \in E(G)$

Ακολουθία Βαθμών

- Απόδειξη... συνέχεια (5):

  Υποθέτουμε ότι ισχύει το αντίθετο, δηλαδή ο κόμβος x_1 **δεν** είναι γειτονικός σε όλους τους d_1 κόμβους με τους μεγαλύτερους βαθμούς $d_2, d_3, \ldots, d_{d_1+1}$ στο γράφημα G.



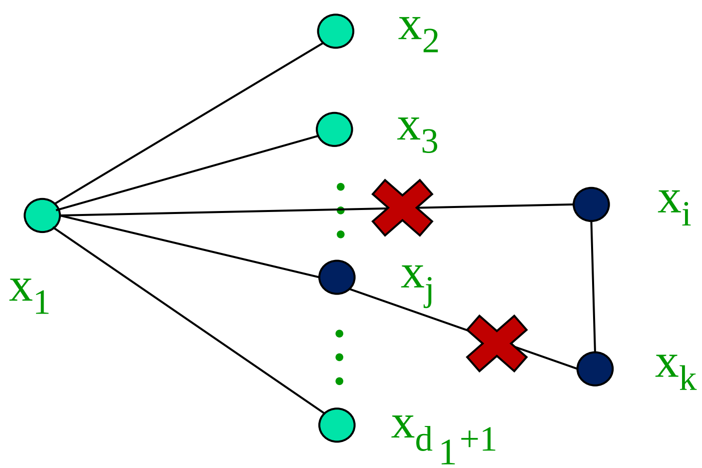
Τώρα, επειδή $d(x_j) > d(x_i)$, υπάρχει κόμβος x_k στο ***G***:

$$(x_j, x_k) \in E(G)$$
$$(x_i, x_k) \notin E(G)$$

Ακολουθία Βαθμών

- Απόδειξη… συνέχεια (6):

  Υποθέτουμε ότι ισχύει το αντίθετο, δηλαδή ο κόμβος x_1 **δεν** είναι γειτονικός σε όλους τους d_1 κόμβους με τους μεγαλύτερους βαθμούς $d_2, d_3, \ldots, d_{d_1+1}$ στο γράφημα G.



Ανταλλαγή ακμών στο ***G***:

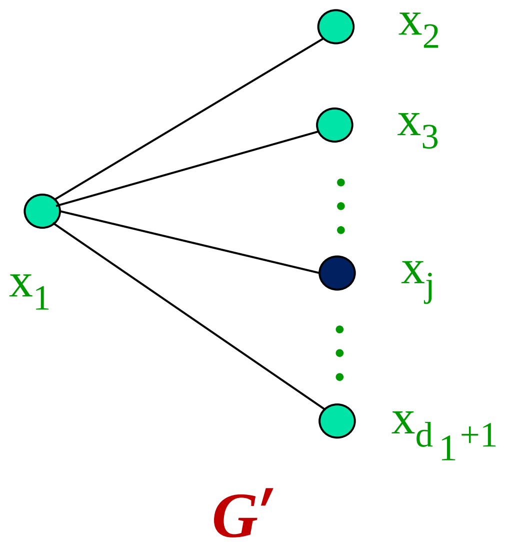
✖ (x_1, x_i) και (x_j, x_k)

➡ (x_1, x_j) και (x_i, x_k)

Ακολουθία Βαθμών

- Απόδειξη… συνέχεια (7):

  Υποθέτουμε ότι ισχύει το αντίθετο, δηλαδή ο κόμβος x_1 **δεν** είναι γειτονικός σε όλους τους d_1 κόμβους με τους μεγαλύτερους βαθμούς $d_2, d_3, \ldots, d_{d_1+1}$ στο γράφημα G.



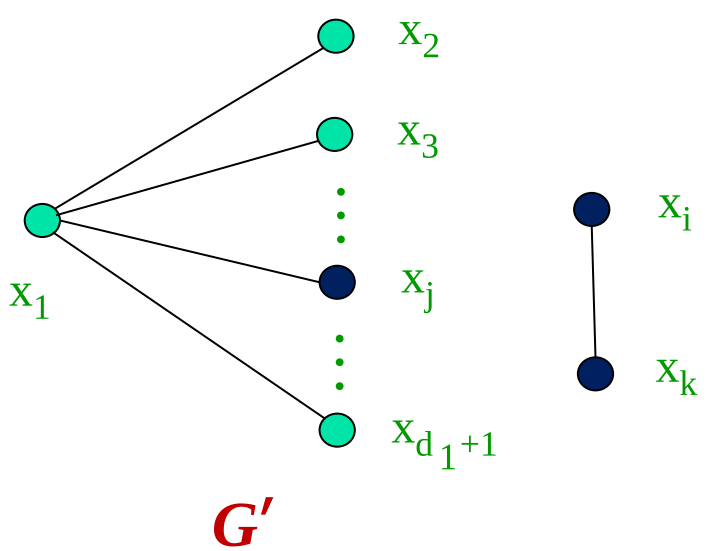
Έστω ***G′*** το γράφημα που προκύπτει από την ανταλλαγή των ακμών.

Ακολουθία Βαθμών

- Απόδειξη… συνέχεια (8):

  Τότε το ***G′*** έχει ακολουθία βαθμών την S (όπως και το G).

  Όμως, στο γράφημα ***G′*** το άθροισμα των βαθμών των γειτονικών κόμβων του x_1 είναι > από του G $\Rightarrow$ άτοπο!



Αντίφαση στην επιλογή του γραφήματος G.

Άρα ισχύει ο

Ισχυρισμός A.

Ακολουθία Βαθμών

- Απόδειξη... συνέχεια (9):

Ισχυρισμός Α:

Στο γράφημα ***G*** ο κόμβος $\mathbf{x_1}$ είναι γειτονικός σε d_1 κόμβους $x_2, x_3, \ldots, x_{d_1+1}$ με τους μεγαλύτερους βαθμούς $d_2, d_3, \ldots, d_{d_1+1}$

Έτσι, το γράφημα $G\text{-}x_1$ έχει ακολουθία βαθμών S_1 και επομένως η ακολουθία S_1 είναι γραφική.

Ακολουθία Βαθμών – Αλγόριθμος

- Αλγόριθμος:
  1. Αν κάποιο $d > n-1$ ⇒ ΟΧΙ
  2. Αν όλα είναι μηδενικά ⇒ ΝΑΙ
  3. Αν κάποιο είναι αρνητικό ⇒ ΟΧΙ
  4. Αναδιάταξη της ακολουθίας κατά μη αύξουσα τάξη
  5. Διαγράφεται ο πρώτος όρος (d_1) και αφαιρείται μια μονάδα από τους επόμενους d_1 όρους
  6. Πήγαινε στο Βήμα 2

- Παράδειγμα: 5, 4, 4, 3, 2, 1, 1

Ακολουθία Βαθμών – Παράδειγμα

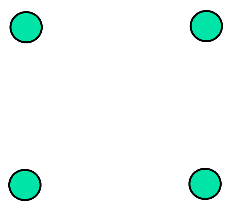
- Παράδειγμα: 5, 4, 4, 3, 2, 1, 1

- S_0 = 5, 4, 4, 3, 2, 1, 1

- Βήμα 1: S_1 = 3, 3, 2, 1, 0, 1 $\Rightarrow$ 3, 3, 2, 1, 1, 0
  Βήμα 2: S_2 = 2, 1, 0, 0, 1 $\Rightarrow$ 2, 1, 1, 0, 0
  Βήμα 3: S_3 = 0, 0, 0, 0

Ακολουθία Βαθμών – Παράδειγμα

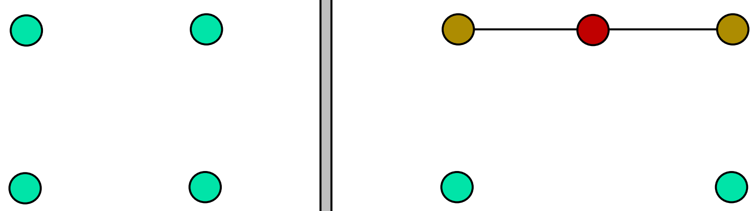
$S_3 = 0, 0, 0, 0$	$S_2 = 2, 1, 1, 0, 0$	$S_1 = 3, 3, 2, 1, 1, 0$	$S_0 = 5, 4, 4, 3, 2, 1, 1$



Ακολουθία Βαθμών – Παράδειγμα

1 1

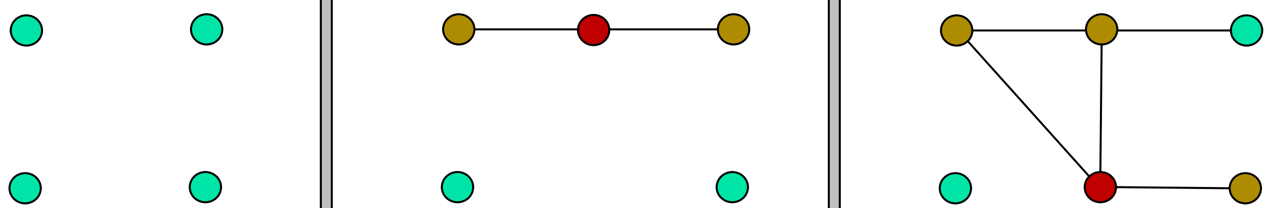
$S_3 = 0, 0, 0, 0$ | $S_2 = 2, 1, 1, 0, 0$ | $S_1 = 3, 3, 2, 1, 1, 0$ | $S_0 = 5, 4, 4, 3, 2, 1, 1$



Ακολουθία Βαθμών – Παράδειγμα

3 2 1

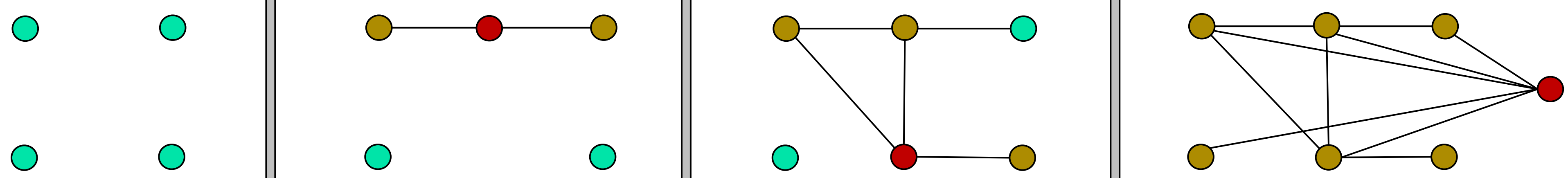
S_3 = 0, 0, 0, 0	S_2 = 2, 1, 1, 0, 0	S_1 = 3, 3, 2, 1, 1, 0	S_0 = 5, 4, 4, 3, 2, 1, 1



Ακολουθία Βαθμών – Παράδειγμα

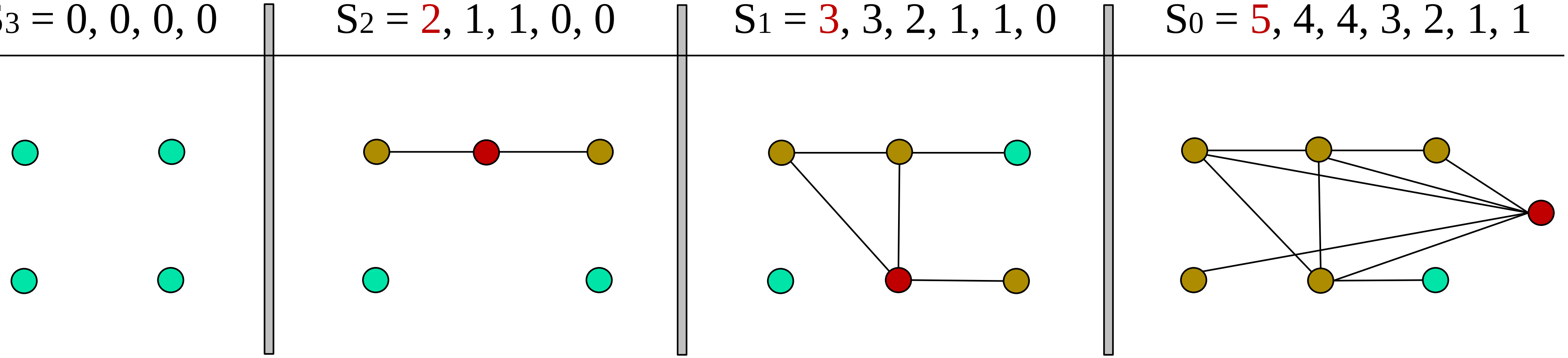
4 4 3 2 1

$S_3 = 0, 0, 0, 0$ | $S_2 = 2, 1, 1, 0, 0$ | $S_1 = 3, 3, 2, 1, 1, 0$ | $S_0 = 5, 4, 4, 3, 2, 1, 1$

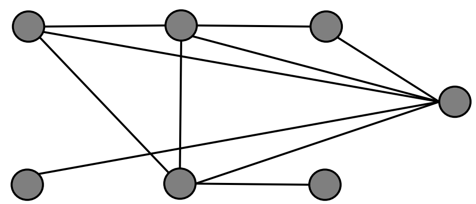


Ακολουθία Βαθμών – Παράδειγμα

$S_3 = 0, 0, 0, 0$	$S_2 = 2, 1, 1, 0, 0$	$S_1 = 3, 3, 2, 1, 1, 0$	$S_0 = 5, 4, 4, 3, 2, 1, 1$



S = (5, 4, 4, 3, 2, 1, 1) ⟺



Ακολουθία Βαθμών – Αλγόριθμος

- Θεώρημα: Μια ακολουθία βαθμών

  $$d_1, d_2, \ldots, d_n$$

  είναι γραφική, εάν και μόνο εάν

  (i) $\sum d_i$ είναι άρτιο, και

  (ii) $\sum_{1 \le i \le k} d_i \le k(k-1) + \sum_{k+1 \le i \le n} \min(k, d_i)$

  για κάθε $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Ακολουθία Βαθμών – Παράδειγμα

- Παράδειγμα: S = (5, 5, 5, 5, 2, 2, 2)

- Από το προηγούμενο Θεώρημα, απαιτείτε ο έλεγχος n-1 συνθηκών.
- Σε κάθε έλεγχο λαμβάνονται οι k πρώτοι κόμβοι…

k=1 $\quad d_1 = 5 \leq 1 \cdot 0 + \sum_{2 \leq i \leq 7} \min(1, d_i) = 6$

k=2 $\quad d_1+d_2 = 10 \leq 2 \cdot 1 + \sum_{3 \leq i \leq 7} \min(2, d_i) = 2+10=12$

k=3 $\quad d_1+d_2+d_3 = 15 \leq 3 \cdot 2 + \sum_{4 \leq i \leq 7} \min(3, d_i) = 6+9=15$

k=4 $\quad d_1+d_2+d_3+d_4=20 \leq 4 \cdot 3 + \sum_{5 \leq i \leq 7} \min(4, d_i) = 12+6=18$

Ακολουθία Βαθμών – Παράδειγμα

- Παράδειγμα: S = (5, 5, 5, 5, 2, 2, 2)

  - Από το προηγούμενο Θεώρημα, απαιτείτε ο έλεγχος n-1 συνθηκών.
  - Σε κάθε έλεγχο λαμβάνονται οι k πρώτοι κόμβοι…

k=4 $\quad d_1+d_2+d_3+d_4=20 \leq 4\cdot 3 + \sum_{5 \leq i \leq 7} \min(4, d_i) = 12+6=18$

$$20 \leq 18 \Rightarrow \textbf{False}$$

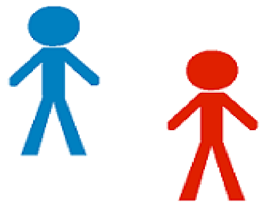
Η ακολουθία S δεν είναι ΓΡΑΦΙΚΗ…

E1 (*Σύστημα Κοινωνικής Δικτύωσης*)

E1

Η εταιρία MS-Social με κύρια δραστηριότητα σε υπηρεσίες «κοινωνικής δικτύωσης», διαθέτει το λογισμικό κοινωνικής δικτύωσης Net-book© στο οποίο έχουν εγγραφεί n χρήστες (users), έστω

$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n \ (n \geq 1)$$



οι οποίοι συνδέονται μεταξύ του με **άμεση ή έμμεση σχέση γνωριμίας** και την οποία σχέση έχουν γνωστοποιήσει στο Net-book©.

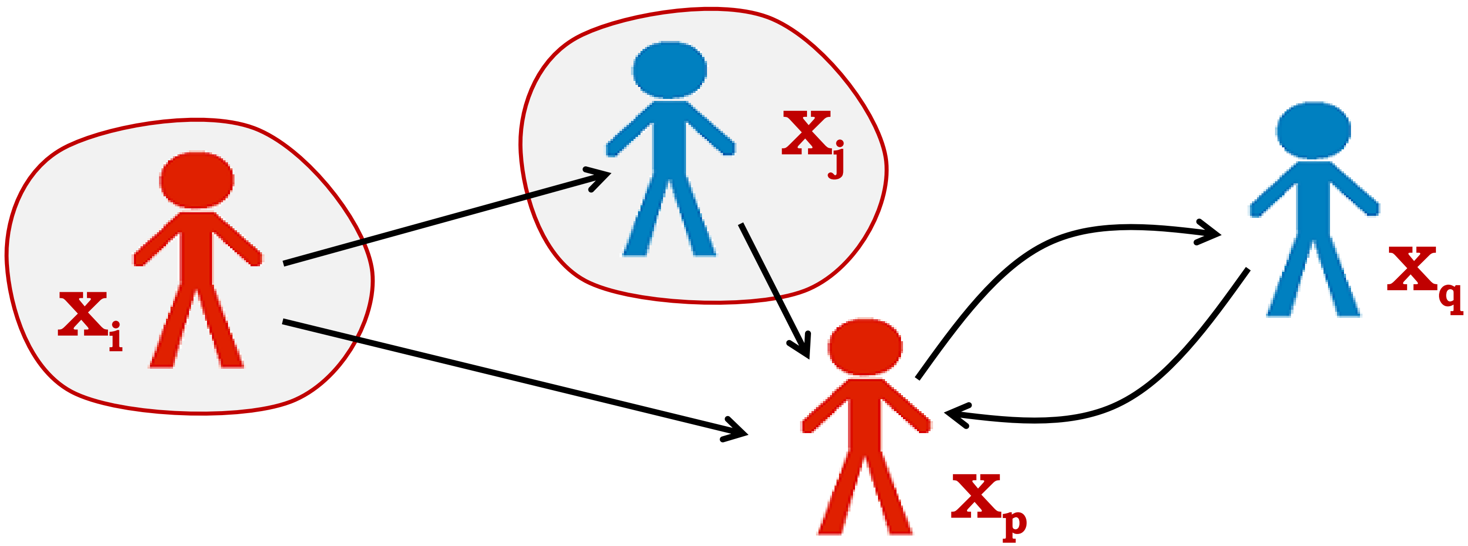
E1 (*Σύστημα Κοινωνικής Δικτύωσης*)

E1

Ο χρήστης X_i συνδέεται με **άμεση ή έμμεση σχέση γνωριμίας** με τον χρήστη X_j εάν:

ο χρήστη X_i γνωρίζει τον X_j

χωρίς αυτό να σημαίνει ότι κατ' ανάγκη και ο X_j γνωρίζει τον X_i, $1 \leq i, j \leq n$.



Ορισμός

E1 (*Σύστημα Κοινωνικής Δικτύωσης*)

E1

Η εταιρία MS-Social θέλει αρχικά να δημιουργήσει και να προσφέρει μια νέα υπηρεσία στο σύστημα Net-book© όπου:

ένας χρήστης θα μπορεί να βλέπει την δική του

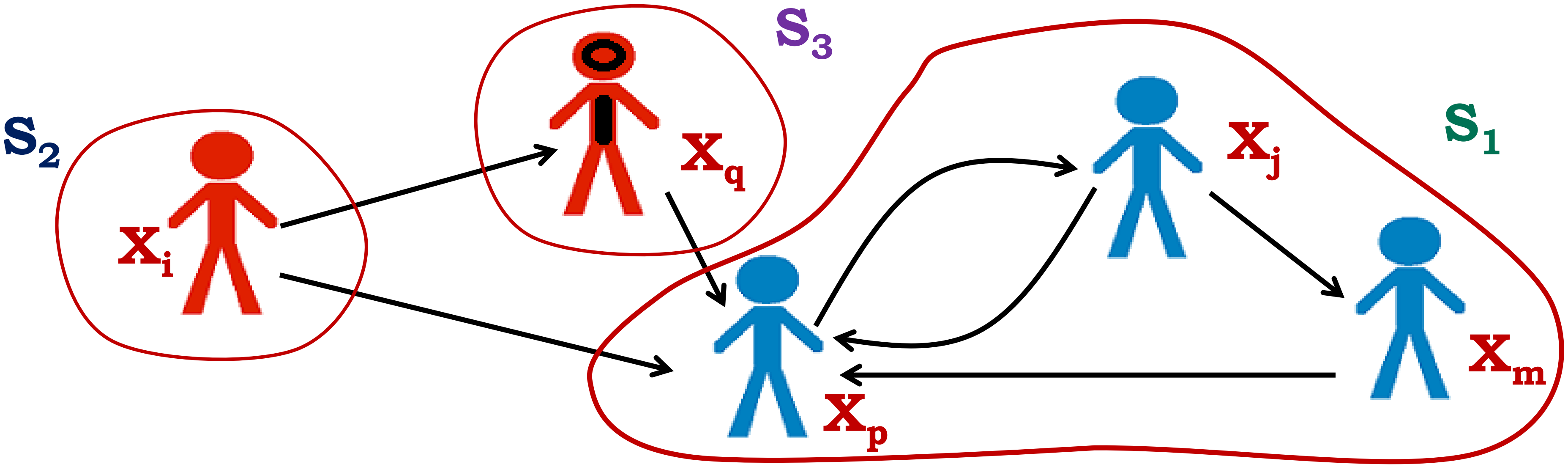
«Ομάδα Γνωριμίας»

E1 (*Σύστημα Κοινωνικής Δικτύωσης*)

E1

Μια ομάδα χρηστών S είναι **«ομάδα γνωριμίας»** εάν:
∀ X_i και X_j της ομάδας S

X_i (αντ. X_j) γνωρίζει άμεσα ή έμμεσα τον χρήστη X_j (αντ. X_i), $1 \leq i, j \leq |S|$.



Ορισμός

E1 (*Σύστημα Κοινωνικής Δικτύωσης*)

E1

Επίσης, η εταιρία MS-Social θέλει για δική της χρήση να γνωρίζει όλες της ομάδες γνωριμίας

$$\mathbf{S_1, S_2, \ldots, S_k} \ (1 \leq k \leq n)$$

του Net-book© δικτύου της.

Επιπρόσθετα, η εταιρία θέλει να γνωρίζει τις

- ✓ **Ισχυρές ομάδες γνωριμίας**

και

- ✓ **Ασθενής ομάδες γνωριμίας**

του Net-book© δικτύου της.

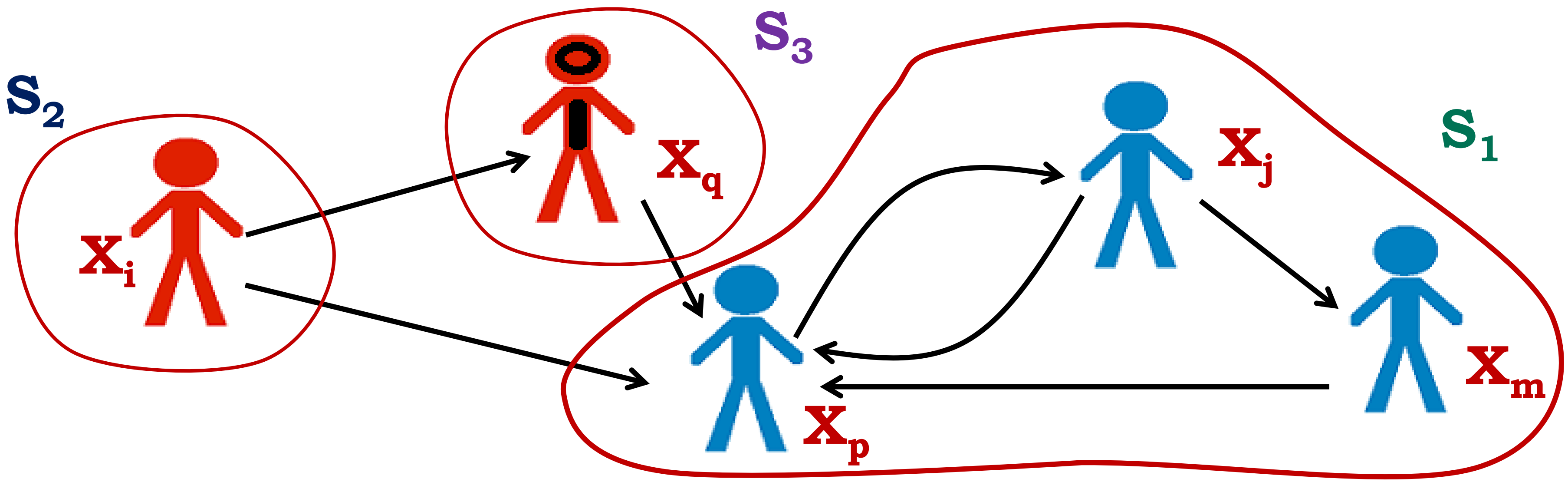
E1

E1 (*Σύστημα Κοινωνικής Δικτύωσης*)

Μία ομάδα γνωριμίας S_i ονομάζεται

Ισχυρή

εάν κανένας χρήστης του δικτύου εκτός της ομάδας S_i δεν έχει άμεση ή έμμεση σχέση γνωριμίας με κάποιο μέλος της S_i, $1 \leq i \leq k$.



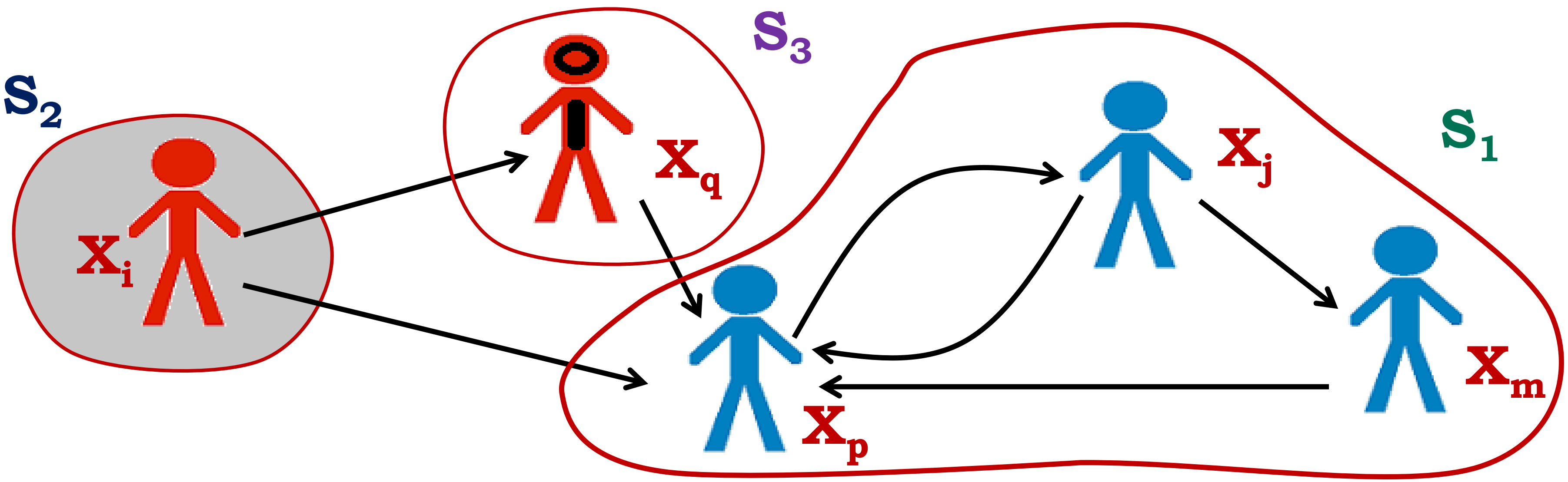
E1 (*Σύστημα Κοινωνικής Δικτύωσης*)

E1

Μία ομάδα γνωριμίας S_i ονομάζεται

Ισχυρή

εάν κανένας χρήστης του δικτύου εκτός της ομάδας S_i δεν έχει άμεση ή έμμεση σχέση γνωριμίας με κάποιο μέλος της S_i, $1 \leq i \leq k$.



Ορισμός

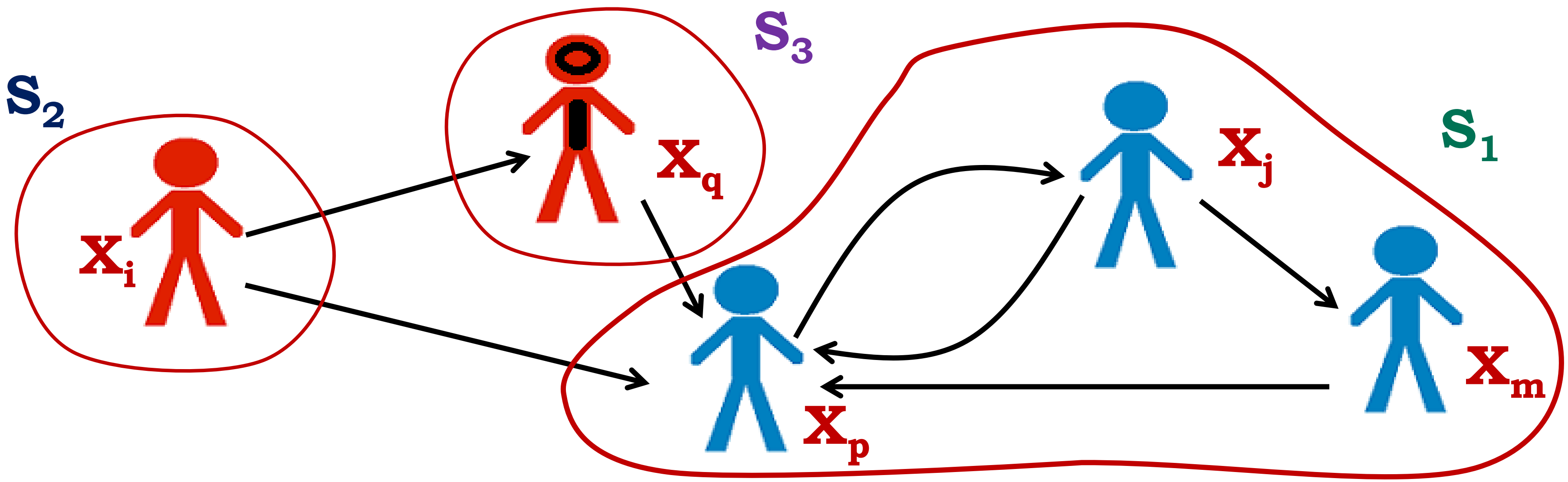
E1 (*Σύστημα Κοινωνικής Δικτύωσης*)

E1

Μία ομάδα γνωριμίας S_i ονομάζεται

Ασθενής

εάν κανένα μέλος της ομάδας S_i δεν έχει άμεση ή έμμεση σχέση γνωριμίας με κάποιο χρήστη του δικτύου εκτός της S_i, $1 \leq i \leq k$.



Ορισμός

E1 (*Σύστημα Κοινωνικής Δικτύωσης*)

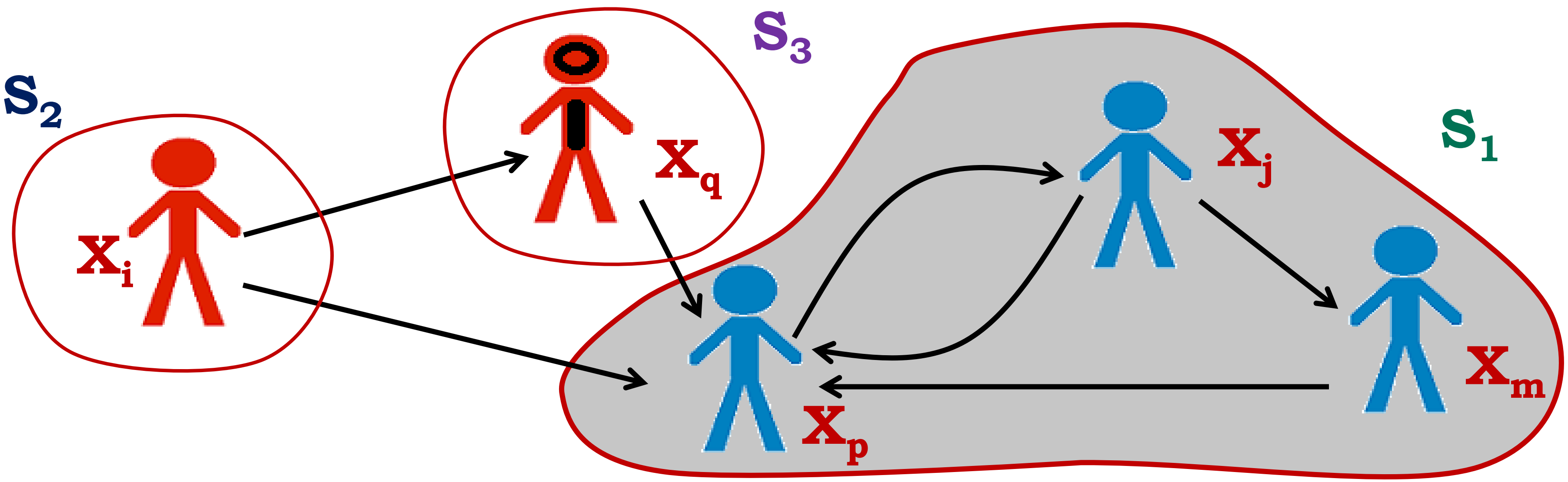
E1

Ορισμός

Μία ομάδα γνωριμίας S_i ονομάζεται

Ασθενής

εάν κανένα μέλος της ομάδας S_i δεν έχει άμεση ή έμμεση σχέση γνωριμίας με κάποιο χρήστη του δικτύου εκτός της S_i, $1 \leq i \leq k$.



E1 (*Σύστημα Κοινωνικής Δικτύωσης*)

E1

Σχεδιάστε και υλοποιήστε έναν O(n+m) αλγόριθμο ο οποίος θα υπολογίζει όλες τις ομάδες γνωριμίας του δικτύου Net-book©

$$\mathbf{S_1, S_2, \ldots, S_k \; (1 \le \mathit{k} \le \mathit{n})}$$

και θα κρατάει σε κατάλληλες δομές δεδομένων πληροφορίες τέτοιες ώστε:

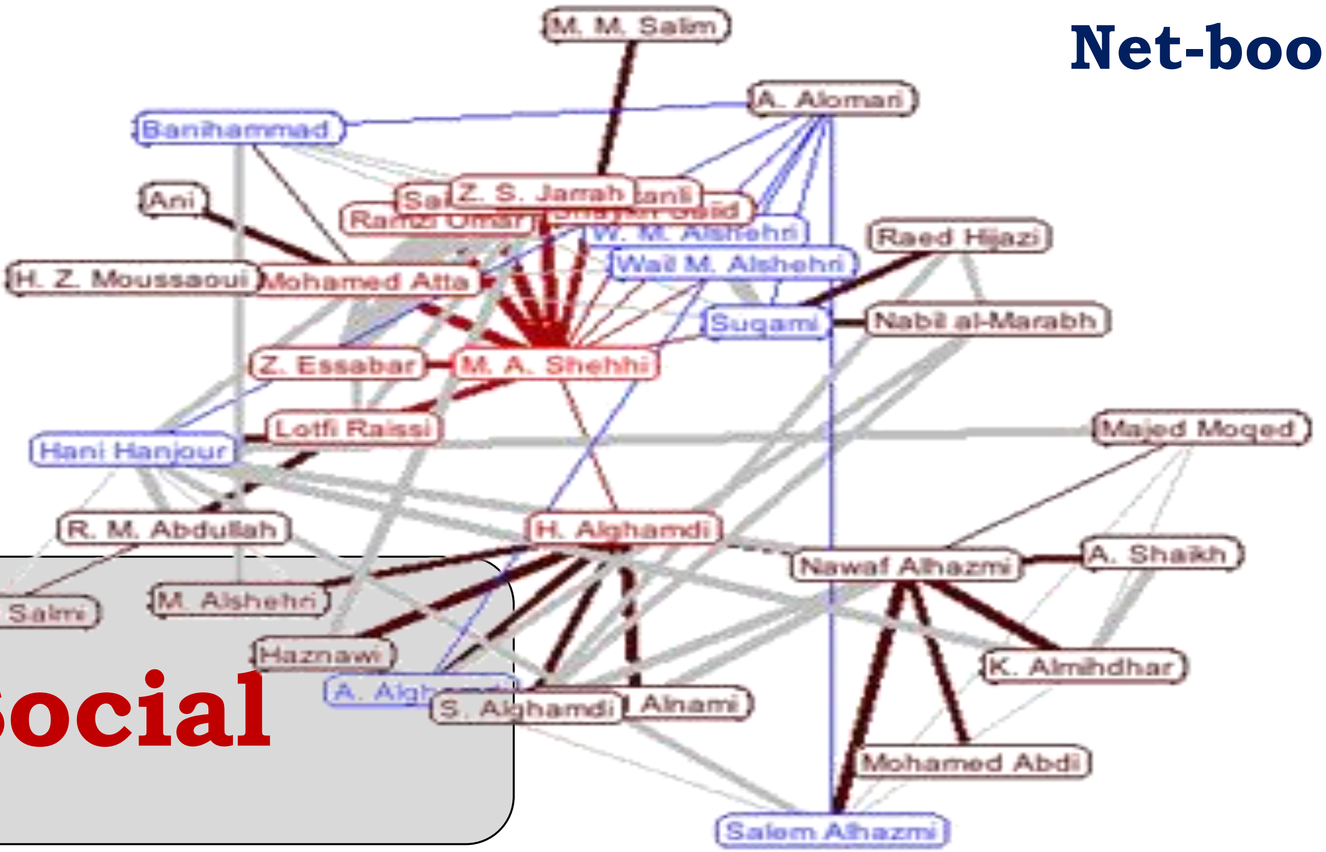
(1) το σύστημα να απαντάει σε **σταθερό χρόνο** στον χρήστη **X_i σε ποια από τις *k* ομάδες γνωριμίας ανήκει** ($1 \le i \le n$), εμφανίζοντας τον αύξοντα αριθμό της ομάδας αυτής, και

(2) να εμφανίζει στην οθόνη **τα μέλη της ομάδα γνωριμίας του X_i** ($1 \le i \le n$), σε **χρόνο γραμμικό** ως προς το πλήθος των μελών της ομάδας.

(3) να υπολογίζει όλες τις **Ισχυρές** και **Ασθενής** ομάδες γνωριμίας του δικτύου Net-book© και **για κάθε τέτοια ομάδα να εμφανίζει τα μέλη της**.

E1 (*Σύστημα Κοινωνικής Δικτύωσης*)

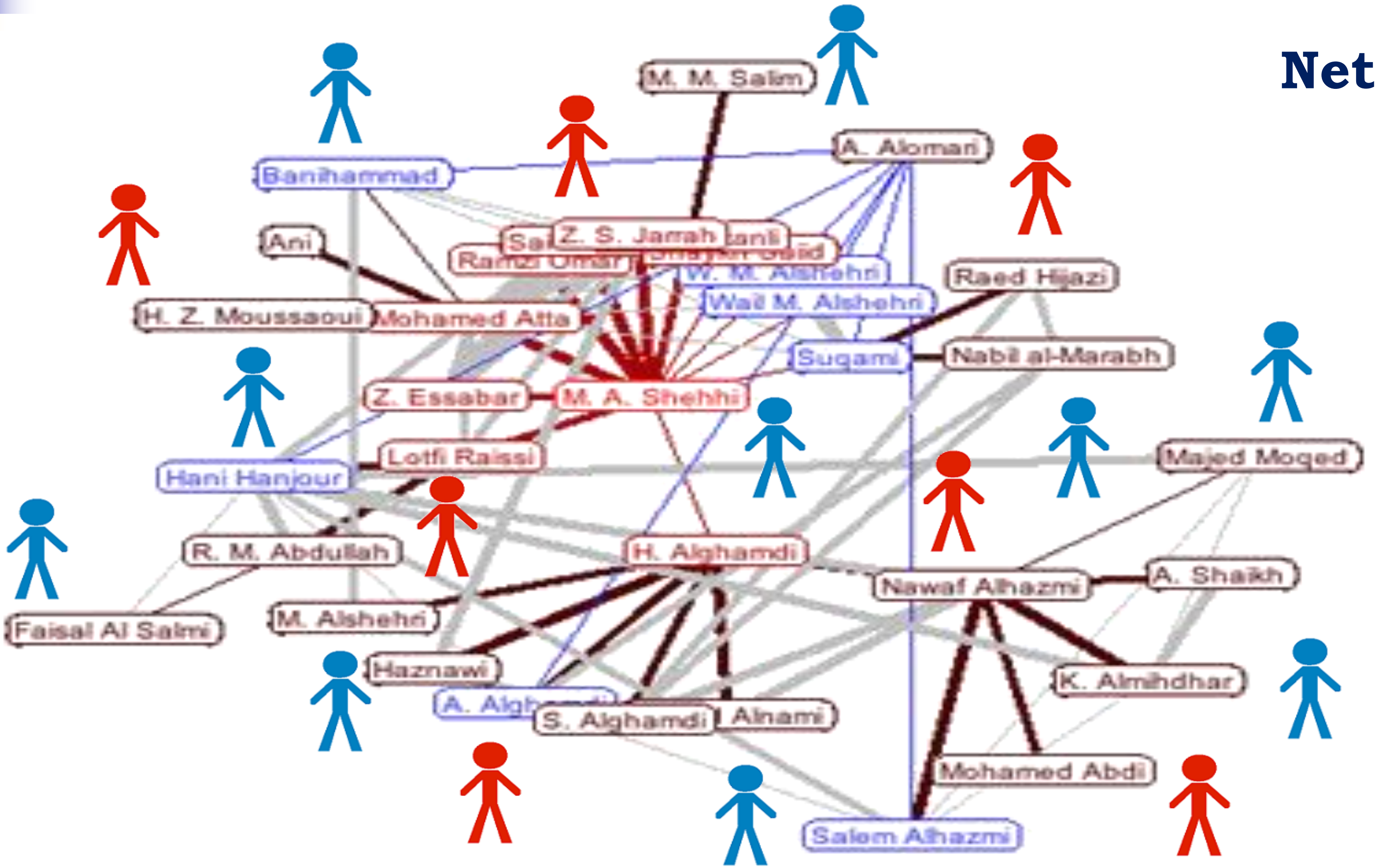
Net-book©



MS-Social

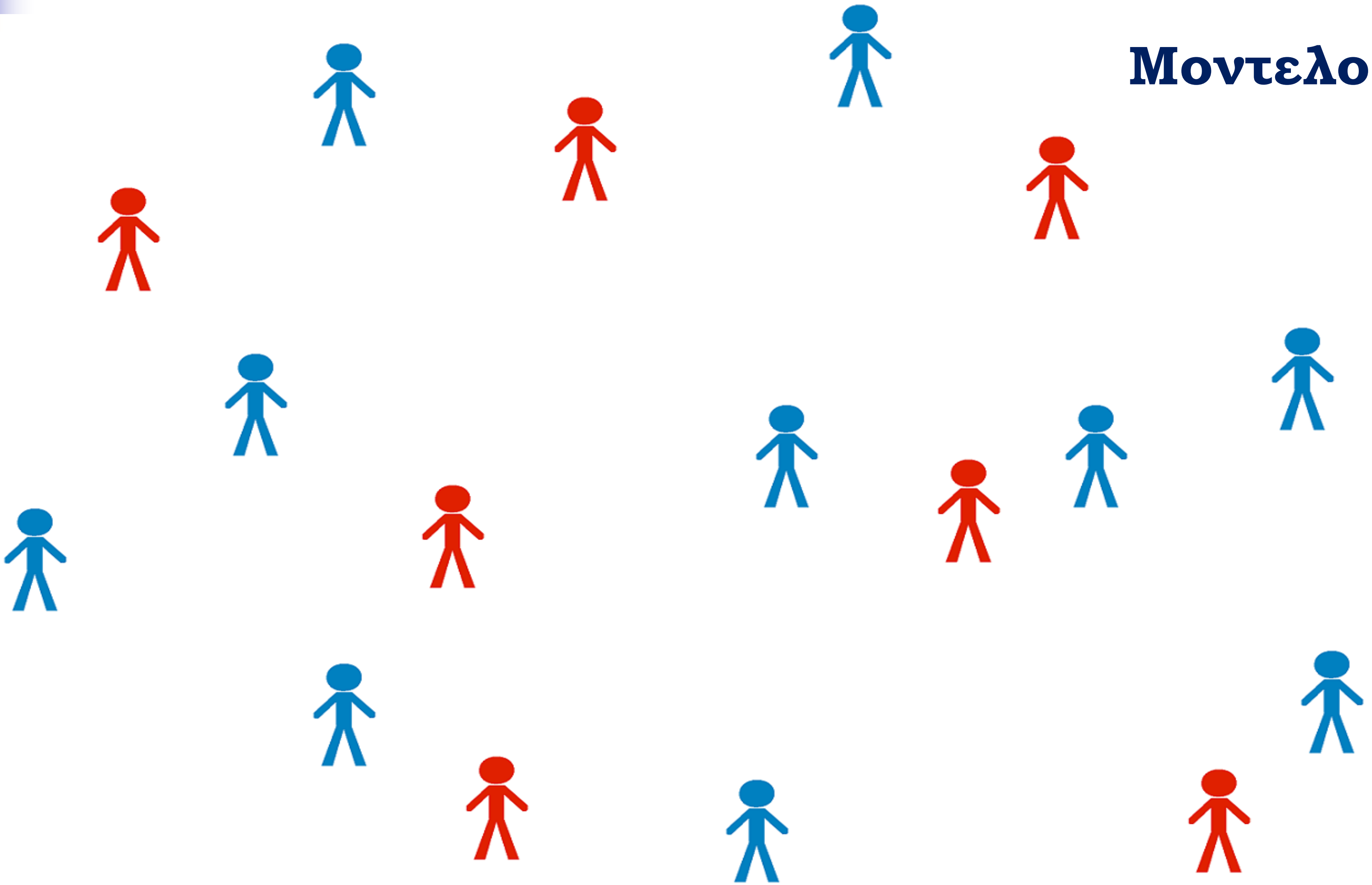
E1 (*Σύστημα Κοινωνικής Δικτύωσης*)

Net-book©



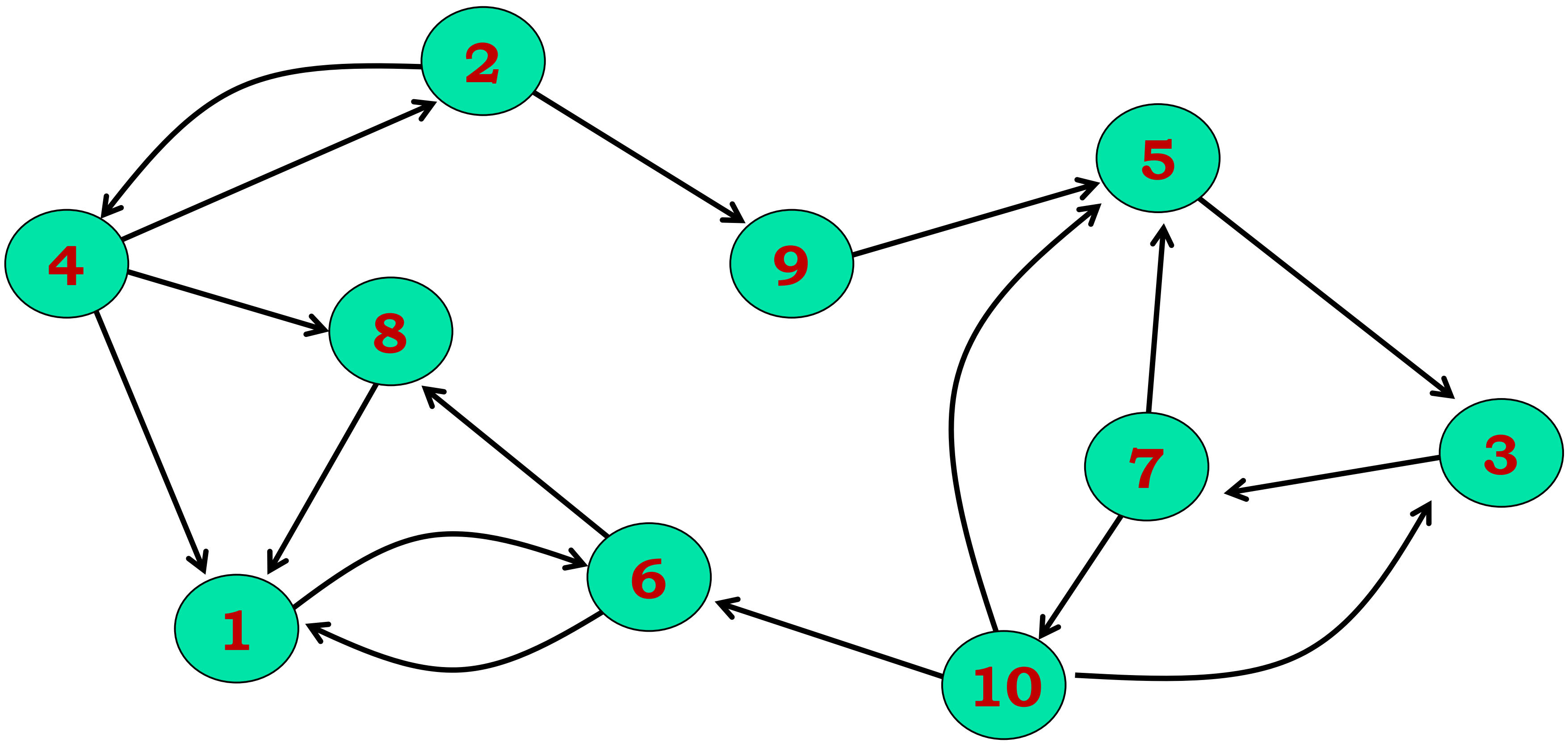
E1 (*Σύστημα Κοινωνικής Δικτύωσης*)

Μοντελοποίηση



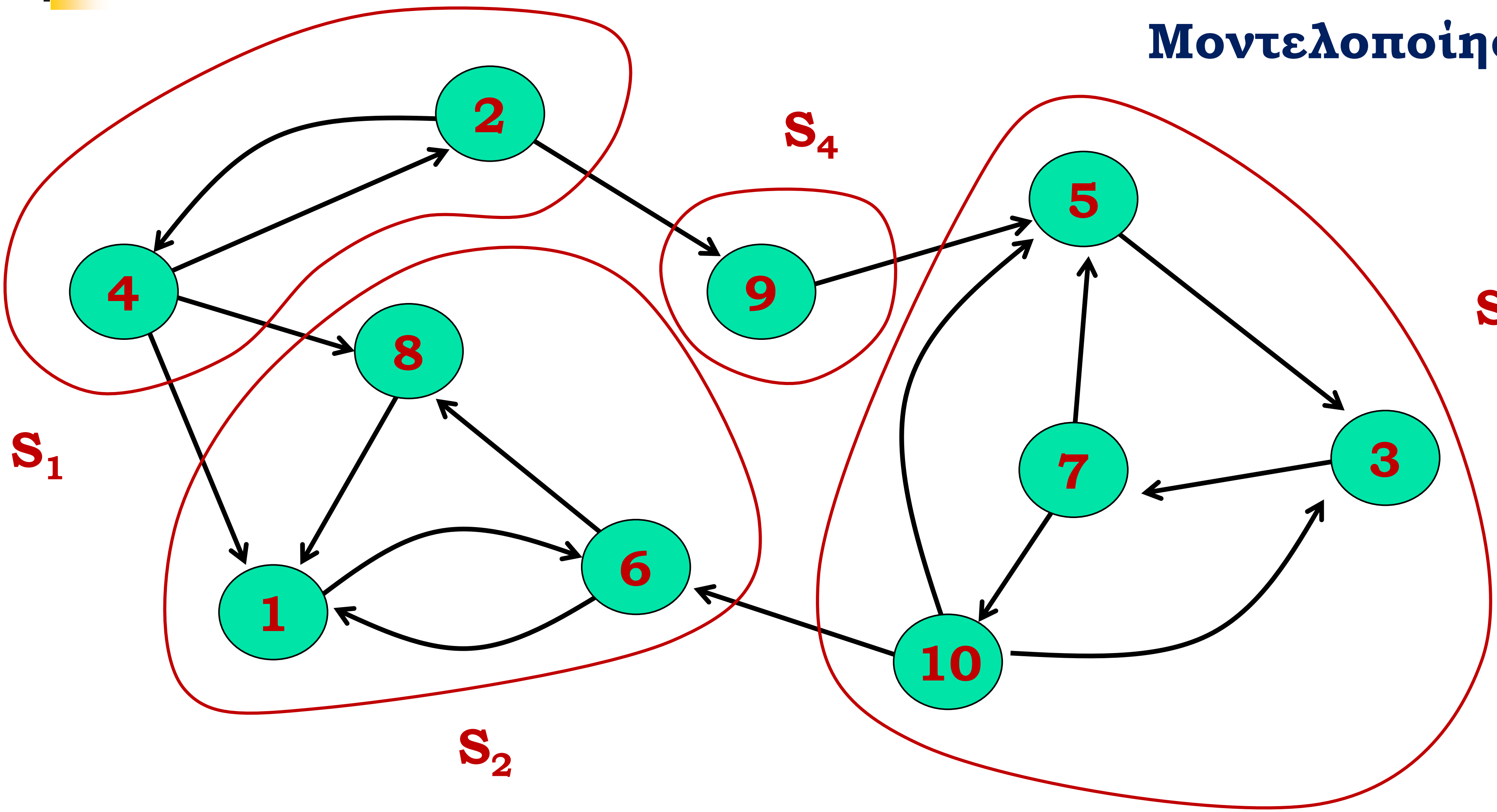
E1 (*Σύστημα Κοινωνικής Δικτύωσης*)

Μοντελοποίηση



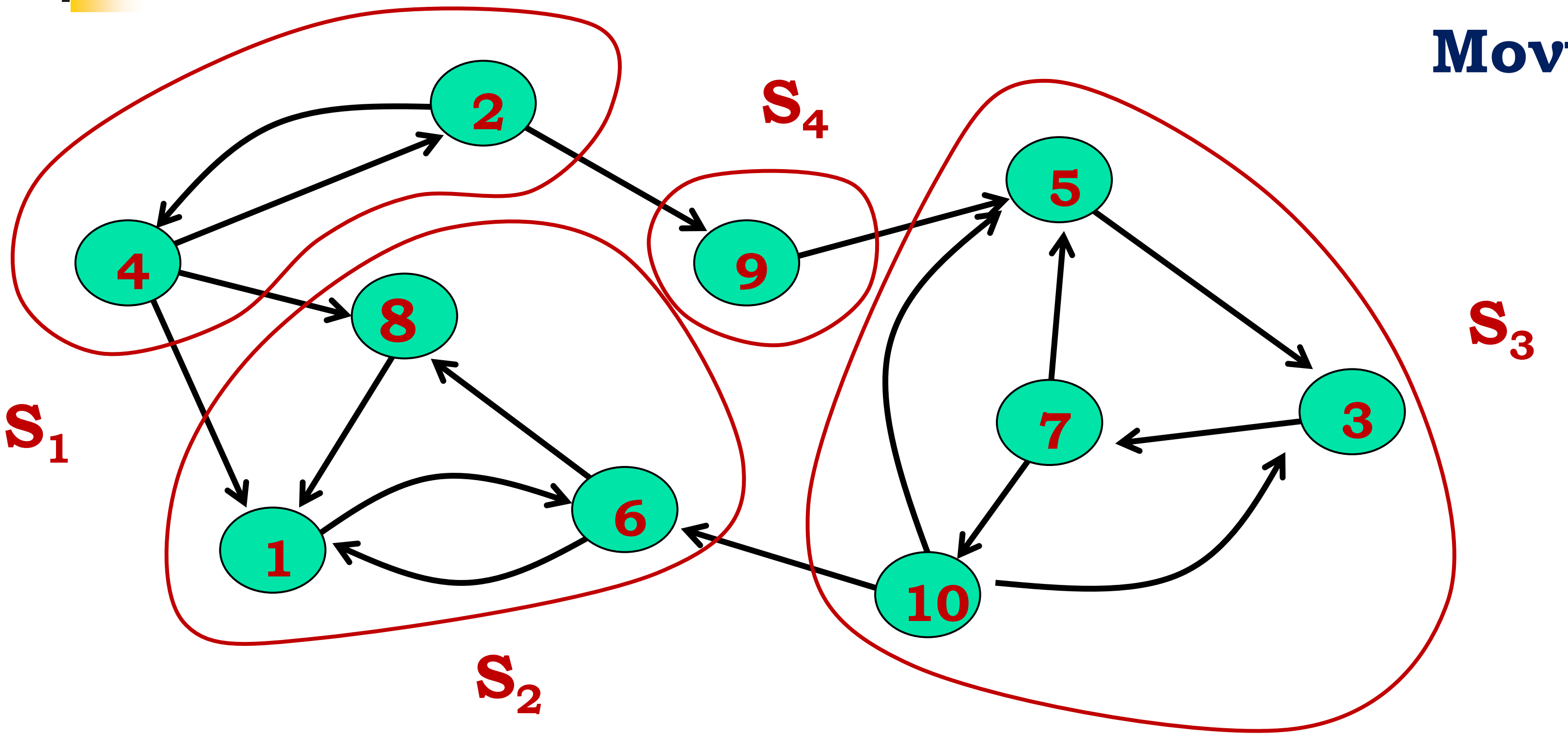
E1 (*Σύστημα Κοινωνικής Δικτύωσης*)

Μοντελοποίηση



E1 (*Σύστημα Κοινωνικής Δικτύωσης*)

Μοντελοποίηση



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A :	2	1	3	1	3	2	3	2	4	3

E1 (*Σύστημα Κοινωνικής Δικτύωσης*)

Μοντελοποίηση

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A :	2	1	3	1	3	2	3	2	4	3

- **Ερώτηση:**

  Οι χρήστες X_i και X_j ανήκουν στην ίδια ομάδα γνωριμίας?

  if A[i] = A[j] then ΝΑΙ, ανήκουν στην $S_{A[i]}$

  else ΟΧΙ, δεν ανήκουν στην ίδια !!!

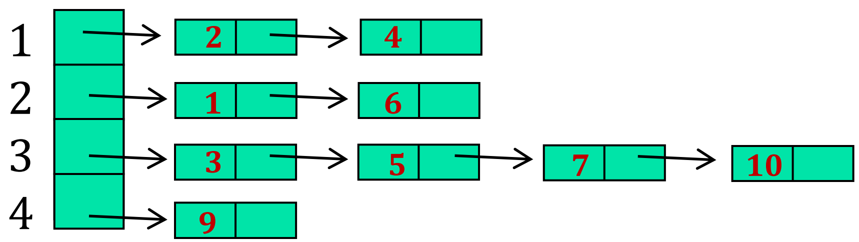
Ε1 (*Σύστημα Κοινωνικής Δικτύωσης*)

Μοντελοποίηση

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A :	2	1	3	1	3	2	3	2	4	3

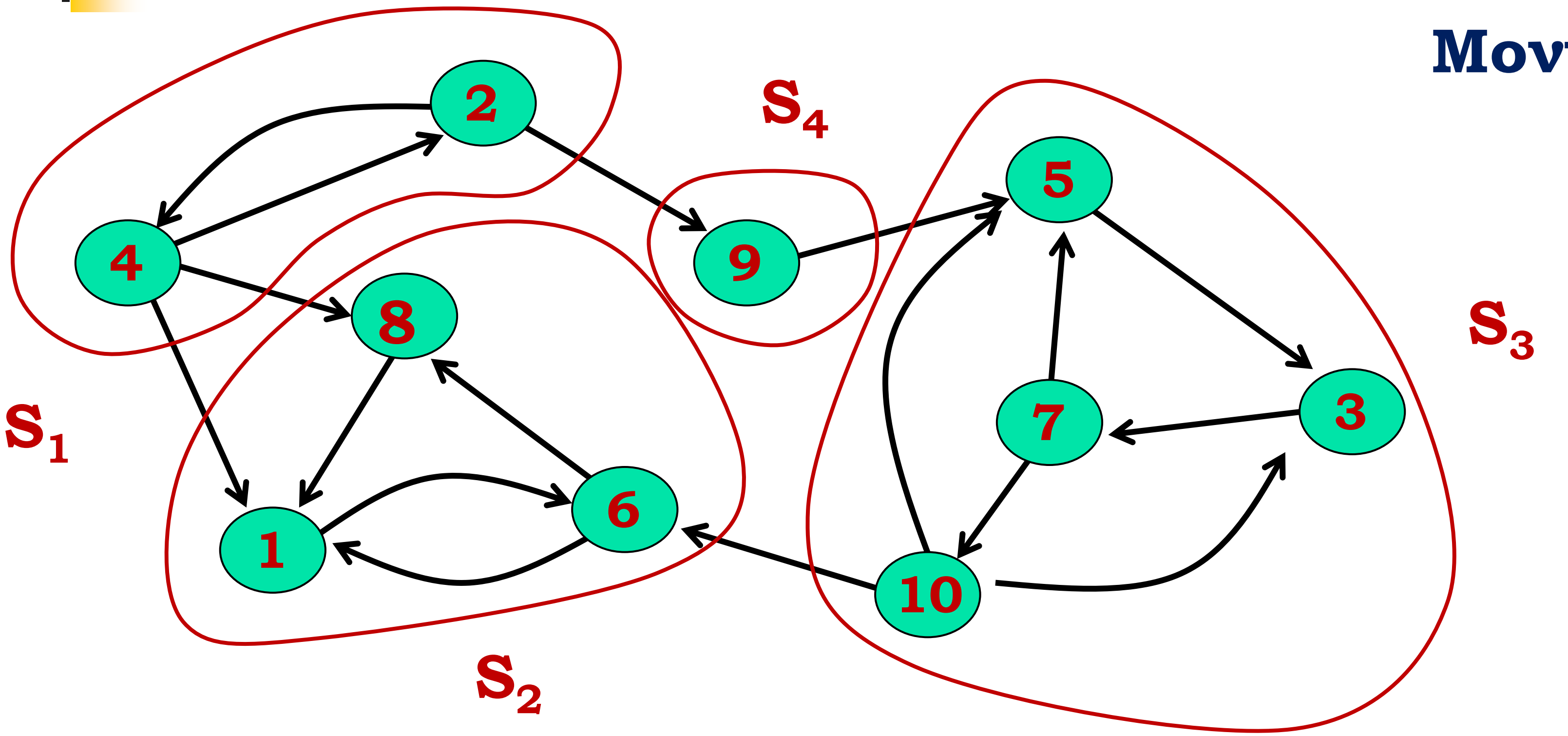
- **Ερώτηση:**

  Ποιοι είναι οι χρήστες της ομάδας S_i ?



E1 (*Σύστημα Κοινωνικής Δικτύωσης*)

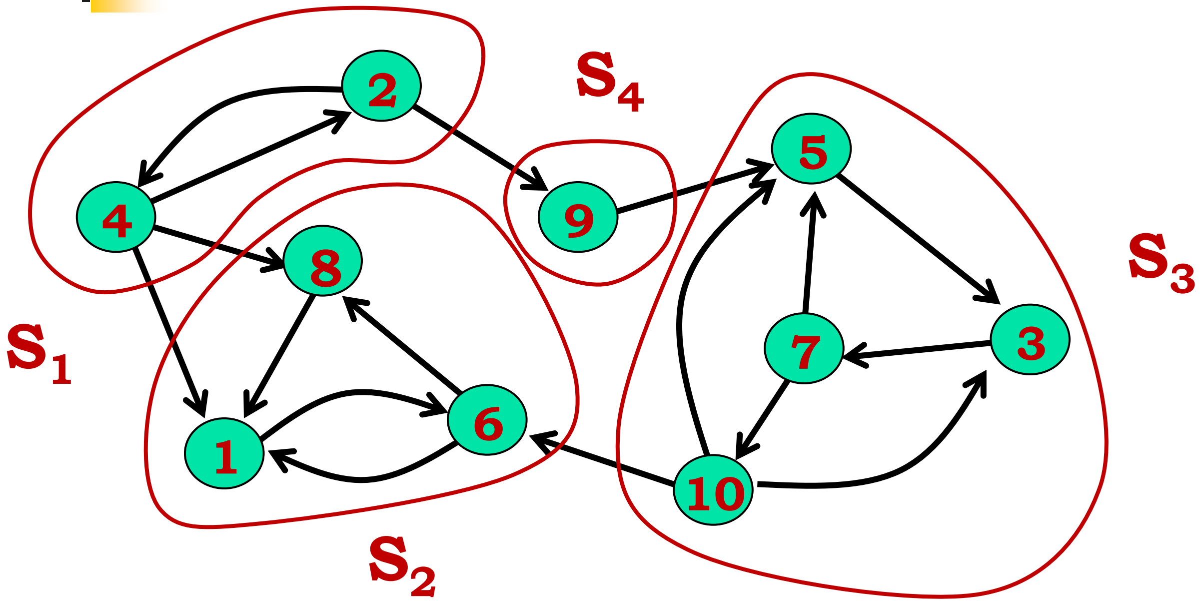
Μοντελοποίηση



- **Ερώτηση:**

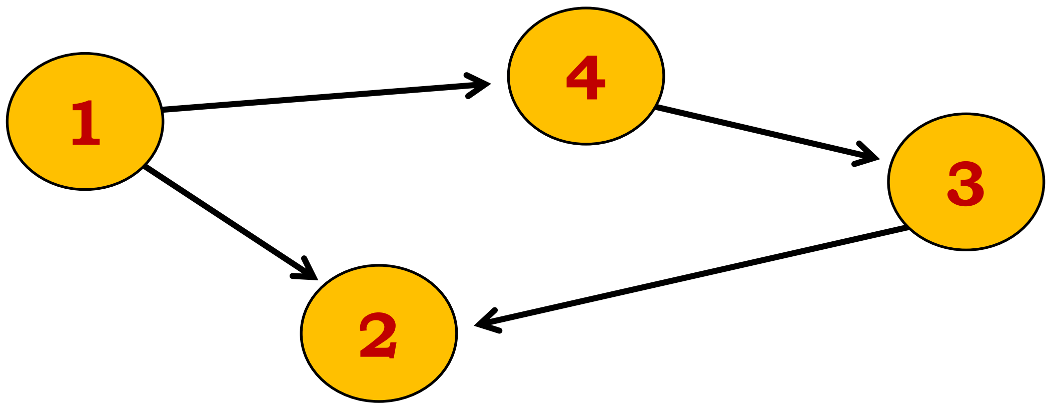
  Ποιες είναι οι Ισχυρές και Ασθενής ομάδες γνωριμίας του δικτύου?

E1 (*Σύστημα Κοινωνικής Δικτύωσης*)



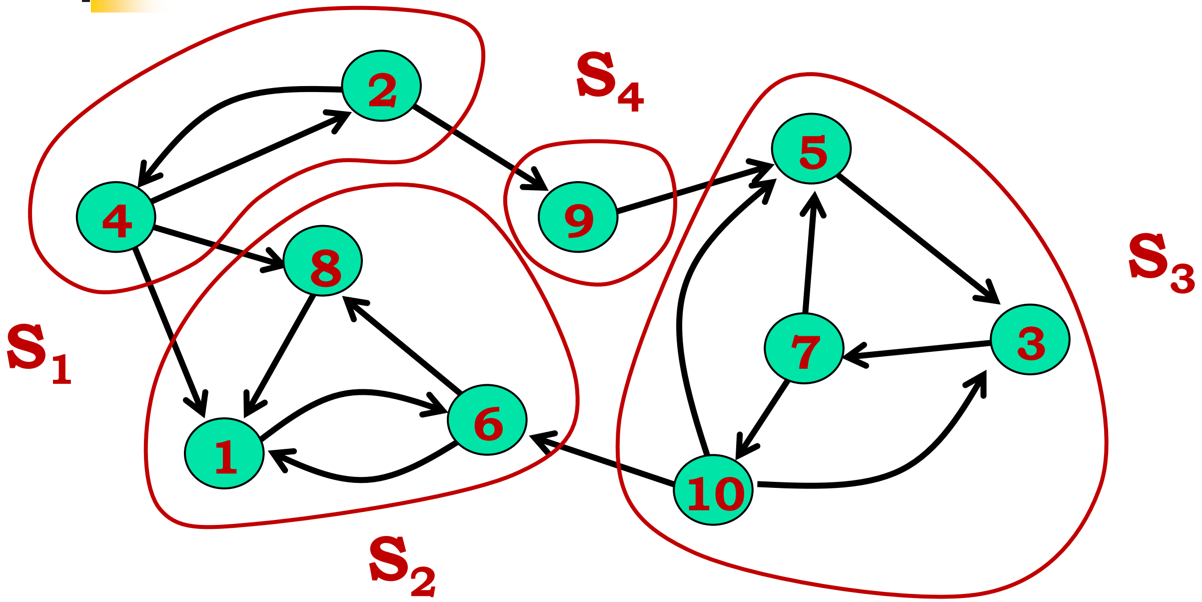
Μοντελοποίηση

Άκυκλο Κατευθυνόμενο

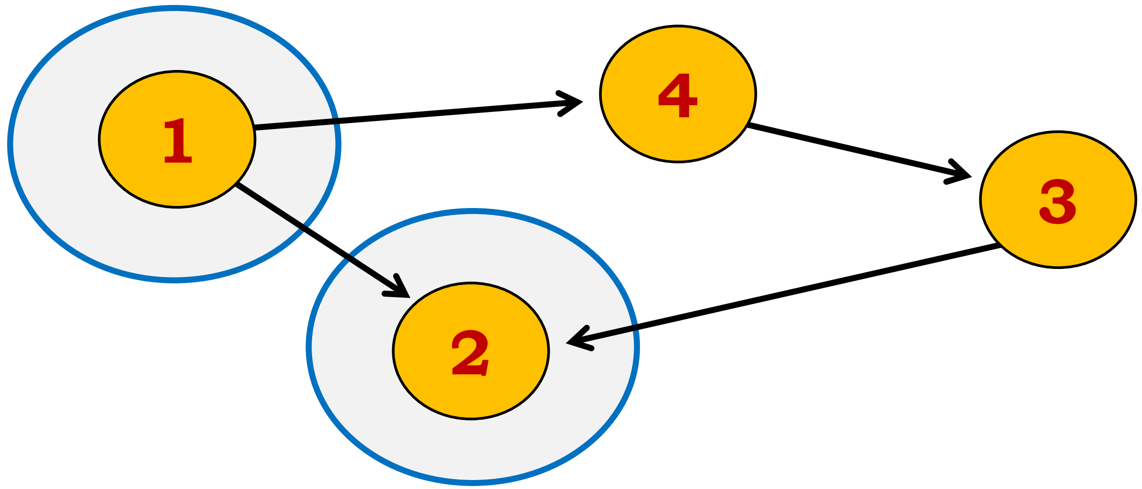


E1 (*Σύστημα Κοινωνικής Δικτύωσης*)

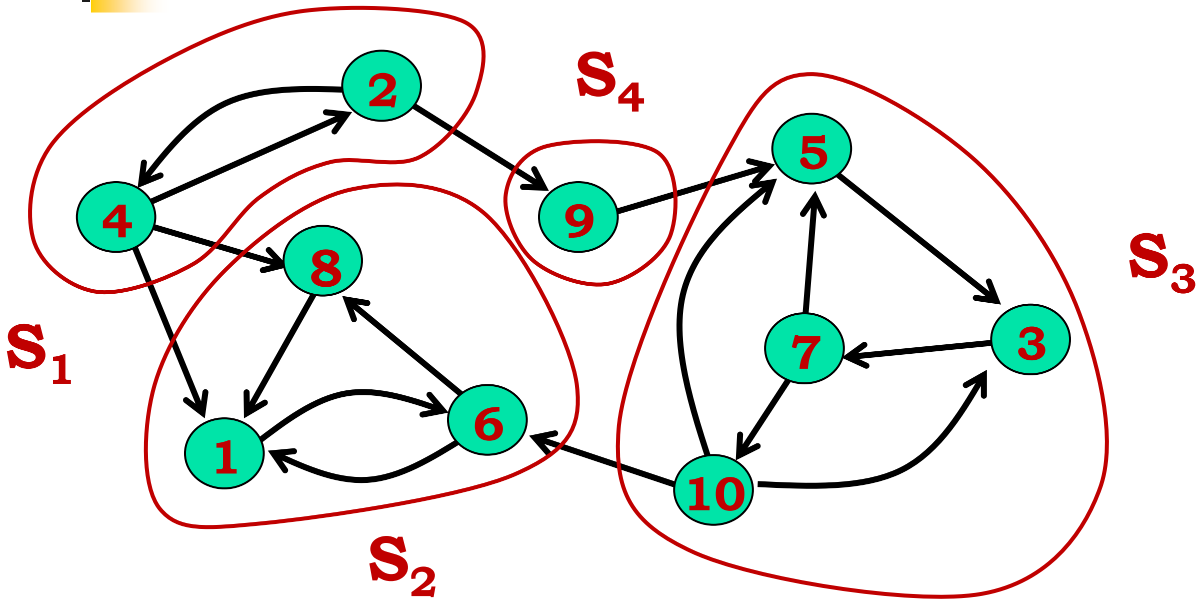
Μοντελοποίηση



Άκυκλο
Κατευθυνόμενο

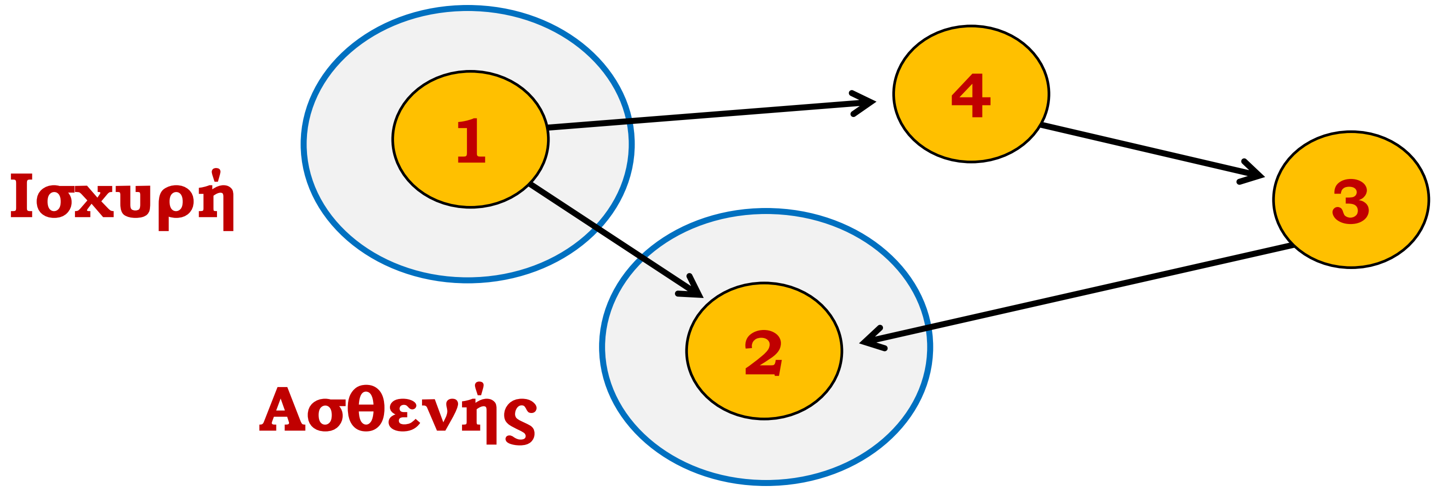


E1 (*Σύστημα Κοινωνικής Δικτύωσης*)



Μοντελοποίηση

Άκυκλο
Κατευθυνόμενο



E1 (*Σύστημα Κοινωνικής Δικτύωσης*)

- **Αλγόριθμος O(n+m):**

Πολυπλοκότητα

1) DFS Διέλευση Γραφήματος

2) Αντίστροφο Γράφημα

3) Βαθμοί Κόμβων Γραφήματος

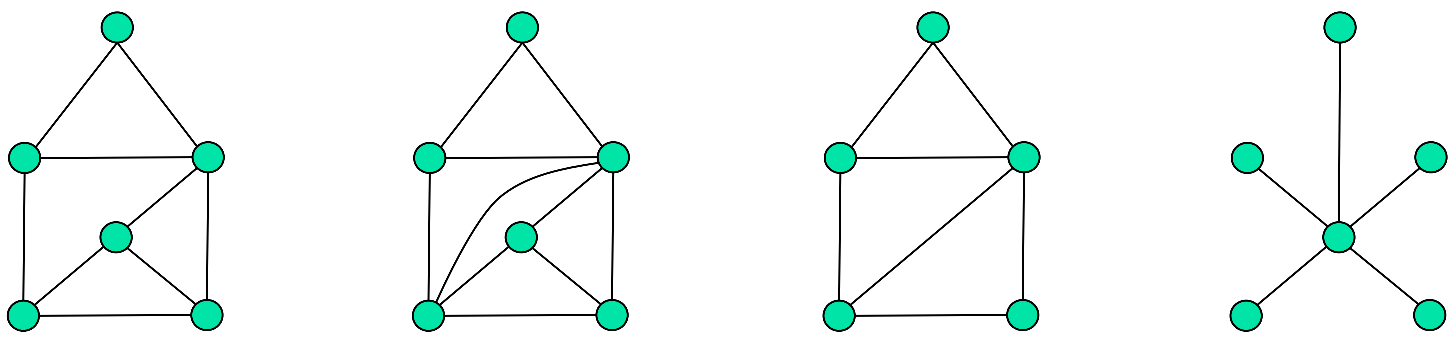
T(n) = O(n+m)

Τριγωνικά και Μεταβατικά Γραφήματα

- Τριγωνική Ιδιότητα

Κάθε απλός κύκλος μήκους $l > 3$ έχει χορδή.

- Τριγωνικά Γραφήματα (Triangulated graphs or chord graphs)



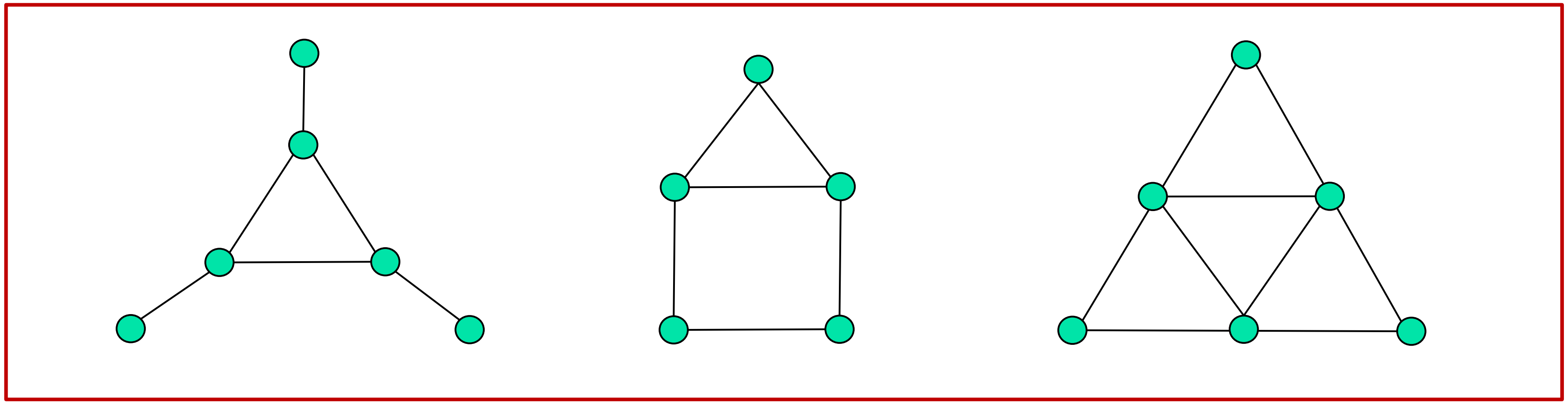
Τριγωνικά και Μεταβατικά Γραφήματα

- Μεταβατική Ιδιότητα

  Κάθε ακμή μπορεί να πάρει one-way κατεύθυνση έτσι ώστε στο προκύπτον κατευθυνόμενο γράφημα (V, F) να ισχύει:

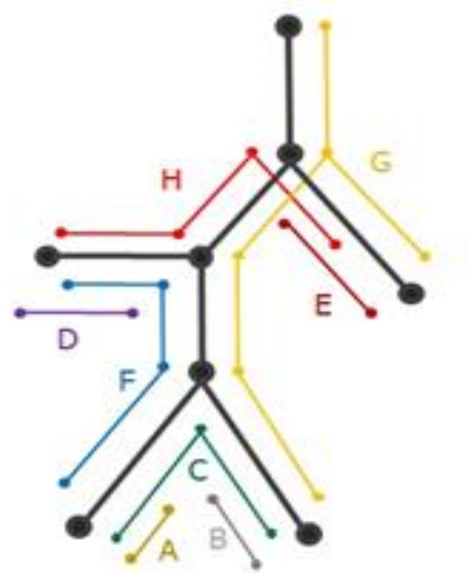
$$ab \in F \text{ and } bc \in F \Rightarrow ac \in F \ (\forall\ a, b, c \in V)$$

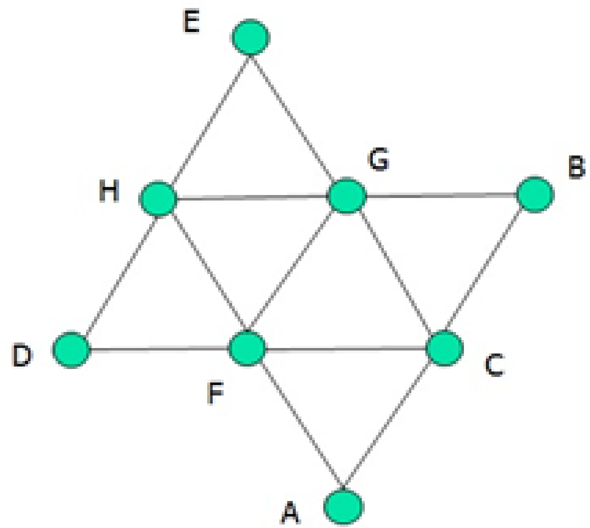
- Μεταβατικά Γραφήματα (Comparability graph)



Τριγωνική Ιδιότητα

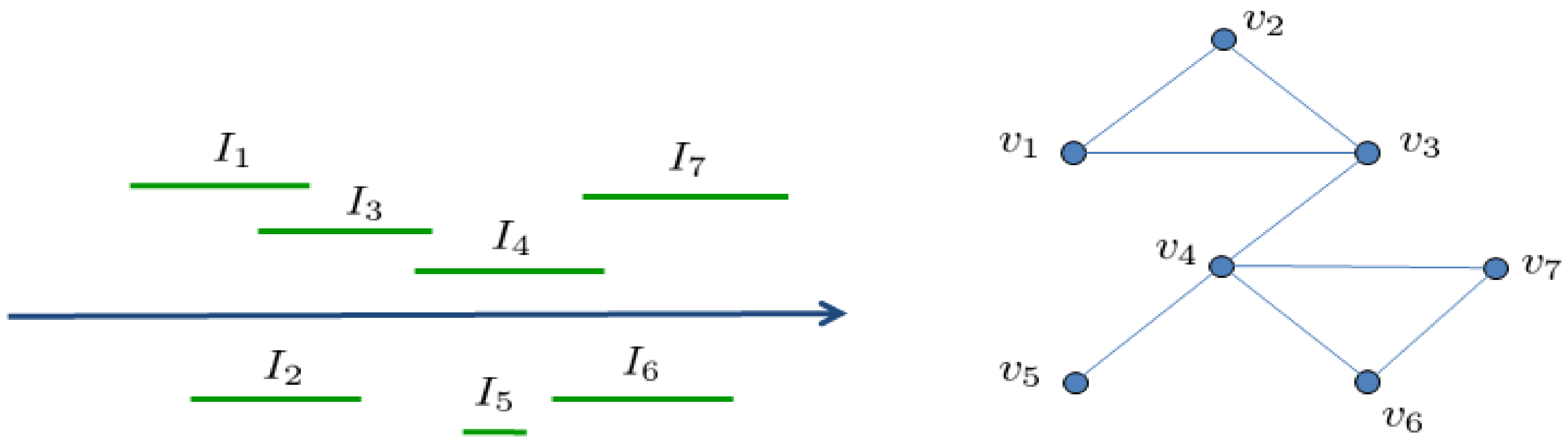
Τριγωνικά γραφήματα





Τριγωνική Ιδιότητα

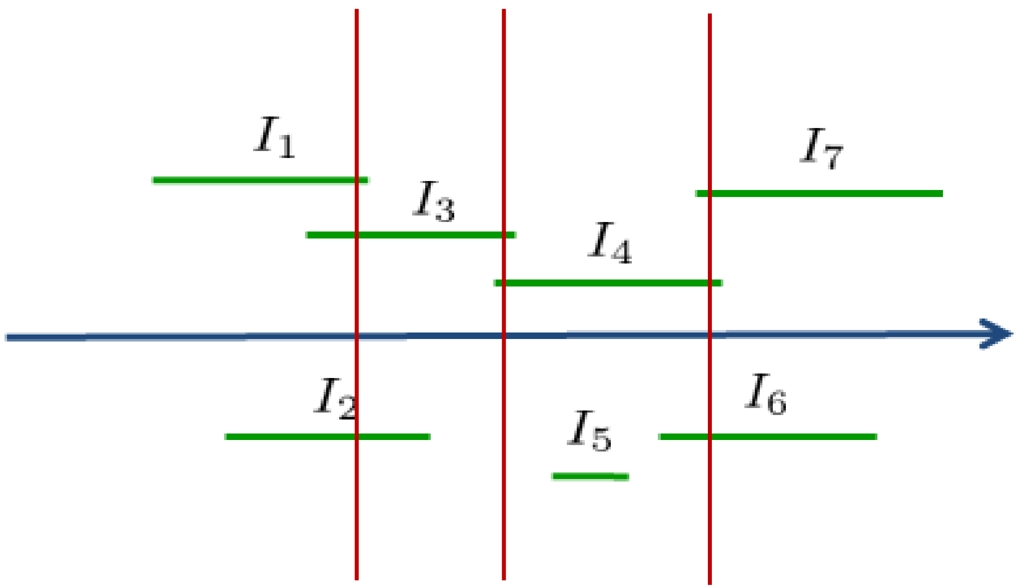
Γραφήματα διαστημάτων

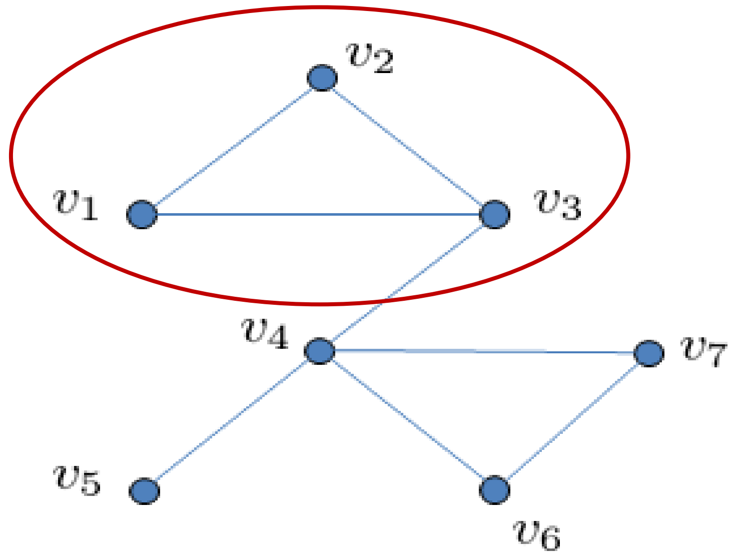


Μια Εφαρμογή

- Έστω ότι έχουμε C_1, C_2, …, C_n φάρμακα, και έστω $[x_i, x_i']$ είναι η θερμοκρασία συντήρησης του φαρμάκου C_i, $1 \le i \le n$;

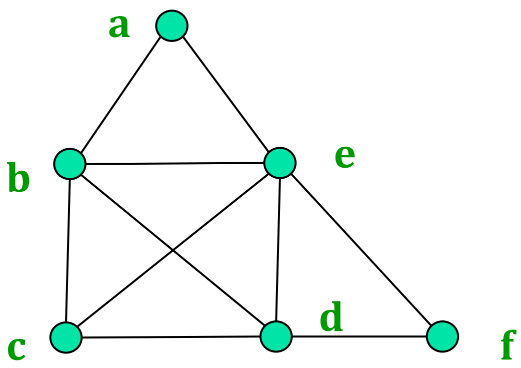
Θέλουμε η θερμοκρασία **T** του ψυγείου για την συντήρηση max πλήθος φαρμάκων





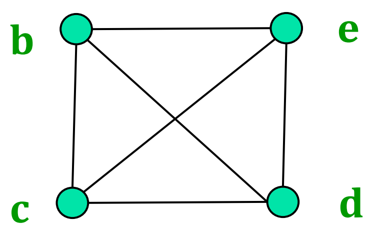
Βασικές Έννοιες – Αριθμός Κλίκας

- Αριθμός Κλίκας ω(G) - Clique number
  το πλήθος των κόμβων της μέγιστης (maximum) κλίκας στο γράφημα G



⇒

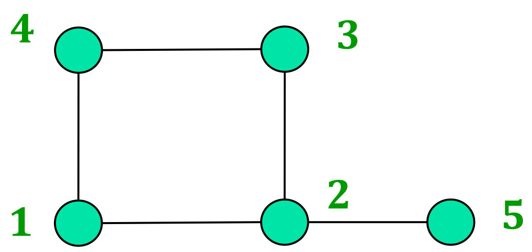
Max κλίκα του G



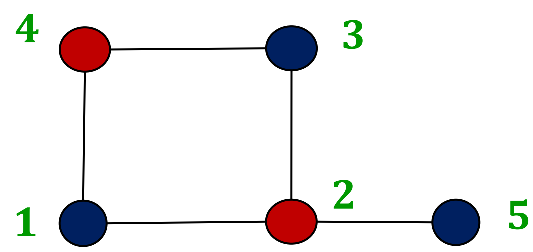
$\omega(G) = 4$

Βασικές Έννοιες – Χρωματικός Αριθμός

- Χρωματικός Αριθμός χ(G) - Chromatic number
  ο μικρότερος δυνατός αριθμός ***c*** για τον οποίο υπάρχει ένας κατάλληλος ***c***-χρωματισμός (***c***-coloring) στο γράφημα G.



V = {1,3,5} + {2,4}

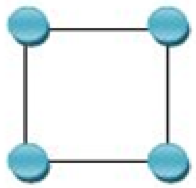


ω(G)=2

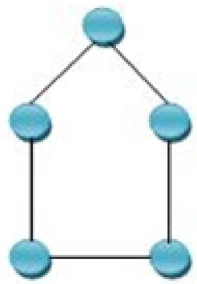
χ(G) = 2

Σχέσεις ω(G) και χ(G)

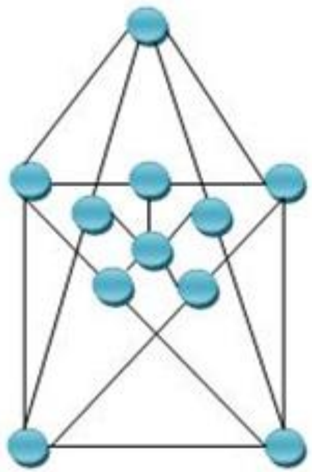
- Για κάθε γράφημα G ισχύει: $\omega(G) \leq \chi(G)$



$\omega(G) = 2$
$\chi(G) = 2$



$\omega(G) = 2$
$\chi(G) = 3$



$\omega(G) = 2$
$\chi(G) = 4$

$\omega(G) = 2$
$\chi(G) = \kappa > 2$

Τέλεια Γραφήματα

- Έστω $G = (V, E)$ ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα:

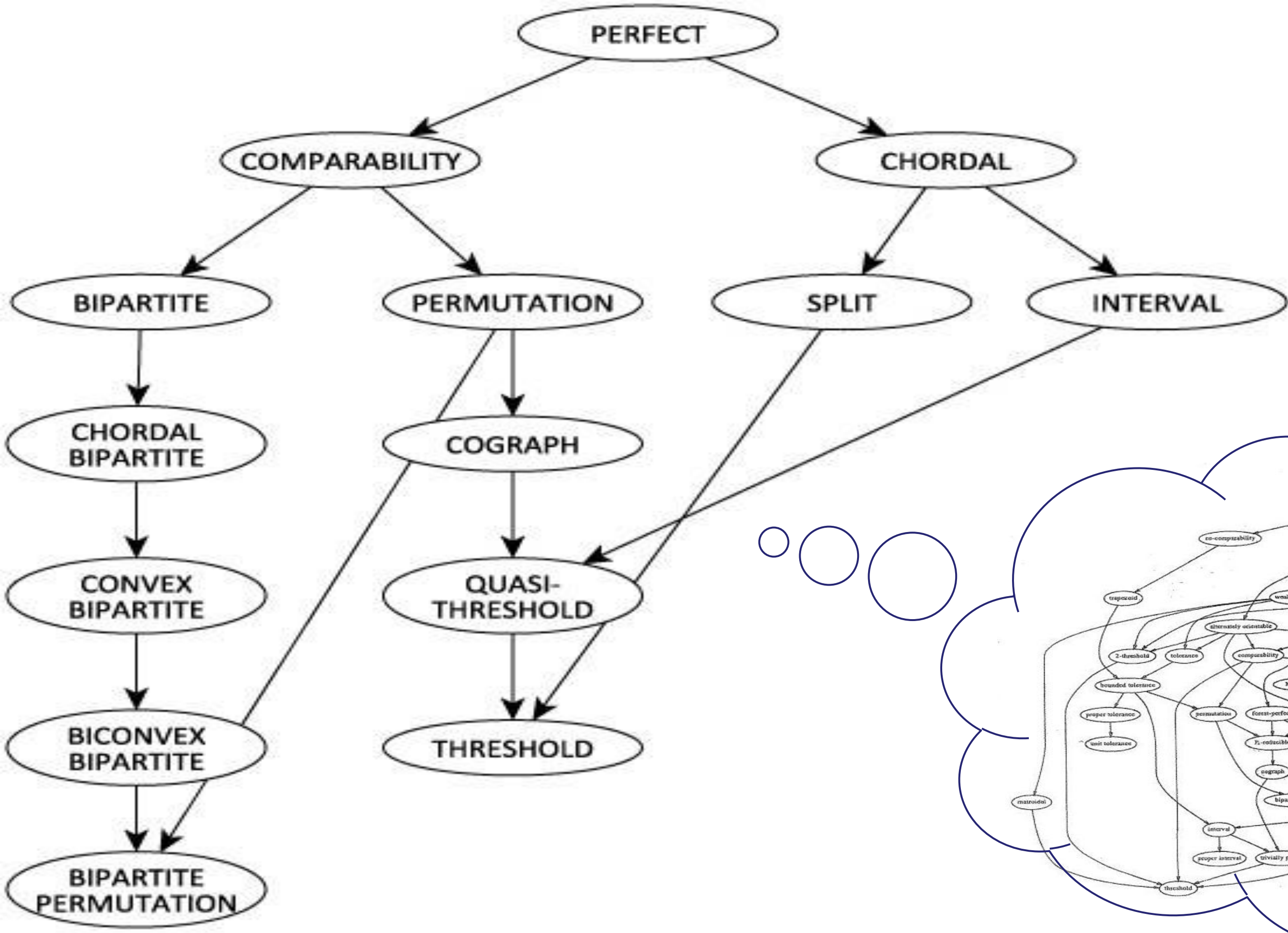
$$(P_1) \quad \omega(G_A) = \chi(G_A) \qquad \forall A \subseteq V$$

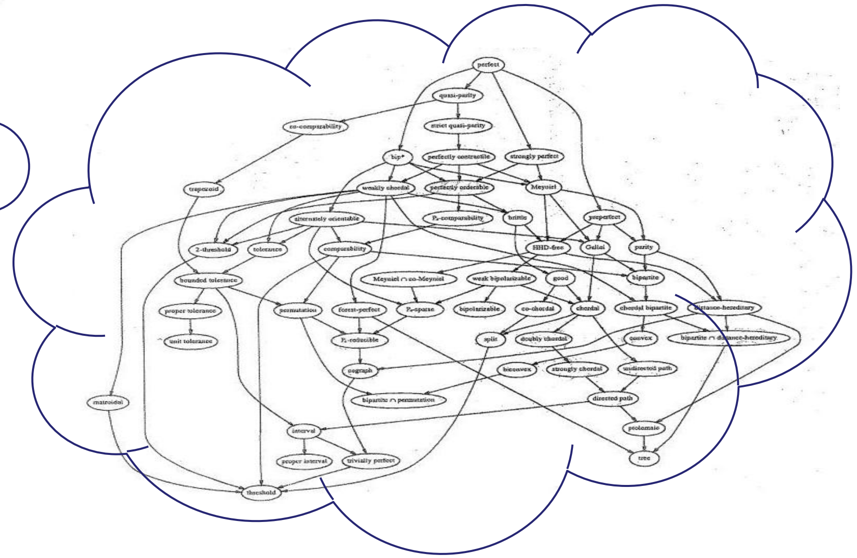
$$(P_2) \quad \alpha(G_A) = \kappa(G_A) \qquad \forall A \subseteq V$$

Το γράφημα G ονομάζεται

Τέλειο (Perfect)

Classes of Perfect Graphs





E2 (*Φαρμακευτική Εταιρία*)

E2

Μια φαρμακευτική εταιρία, με εμπορική ονομασία MSF, παράγει και διακινεί *n* φαρμακευτικά σκευάσματα

$$\mathbf{F_1, F_2, \ldots, F_n} \ (\boldsymbol{n} \geq \mathbf{1})$$

τα οποία διατηρεί σε χώρους ψύξεις (ψυγεία).

Κάθε φαρμακευτικό σκεύασμα F_i έχει ένα εύρος θερμοκρασίας

$$[\mathbf{s_i}, \mathbf{t_i}]$$

στο οποίο διατηρείται ($1 \leq i \leq n$).

E2 (*Φαρμακευτική Εταιρία*)

E2

Σχεδιάστε και αναλύστε έναν αλγόριθμο ο οποίος θα υπολογίζει

- **το μέγιστο πλήθος φαρμάκων** (Fmax),

από τα F_1, F_2, …, F_n ($n \geq 1$), που μπορούν να αποθηκευθούν σε ένα χώρο ψύξης (ψυγείο), θεωρητικά απεριόριστης χωρητικότητας, και

- **την ελάχιστη θερμοκρασία** (Cmin)

που πρέπει να έχει ο χώρος ψύξης για την ασφαλή διατήρησή τους.

E2 (*Φαρμακευτική Εταιρία*)

E2

Παράδειγμα:

Έστω ότι η εταιρία MSF παράγει 7 φαρμακευτικά σκευάσματα F_1, F_2, …, F_7 με τις παρακάτω θερμοκρασίες διατήρησης

[4, 15], [3, 8], [0, 12], [5, 16], [1, 13], [11, 16], [2, 14]

Τότε, το μέγιστο πλήθος φαρμάκων που μπορούν να αποθηκευθούν σε ένα χώρο ψύξης είναι

Fmax = 6

με ελάχιστη θερμοκρασία ασφαλούς διατήρησή τους

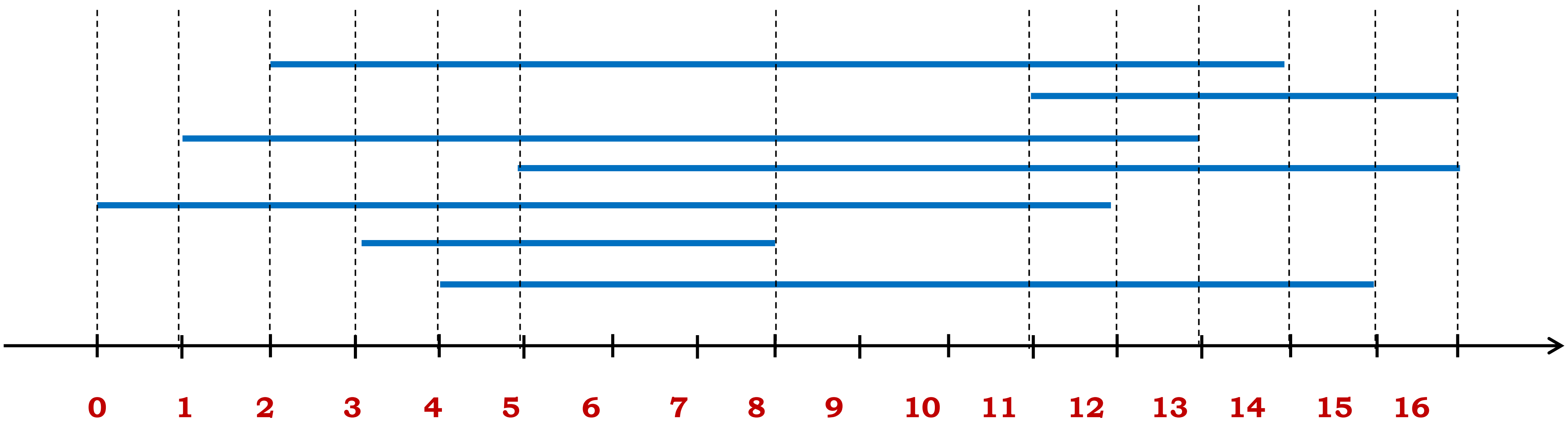
Cmin = 5.

E2 (*Φαρμακευτική Εταιρία*)

- **Μοντελοποίηση:**

F_1, F_2, …, F_7

[4, 15], [3, 8], [0, 12], [5, 16], [1, 13], [11, 16], [2, 14]

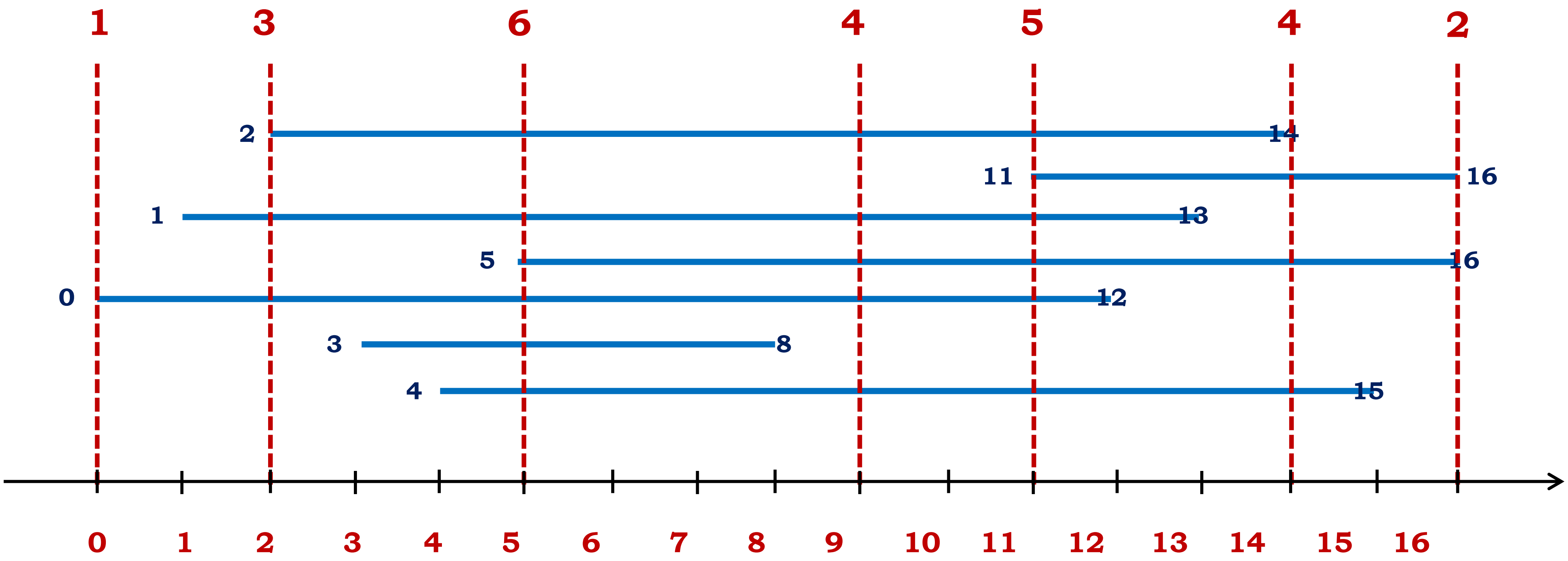


E2 (*Φαρμακευτική Εταιρία*)

Fmax = ?

Cmin = ?

Μοντελοποίηση:

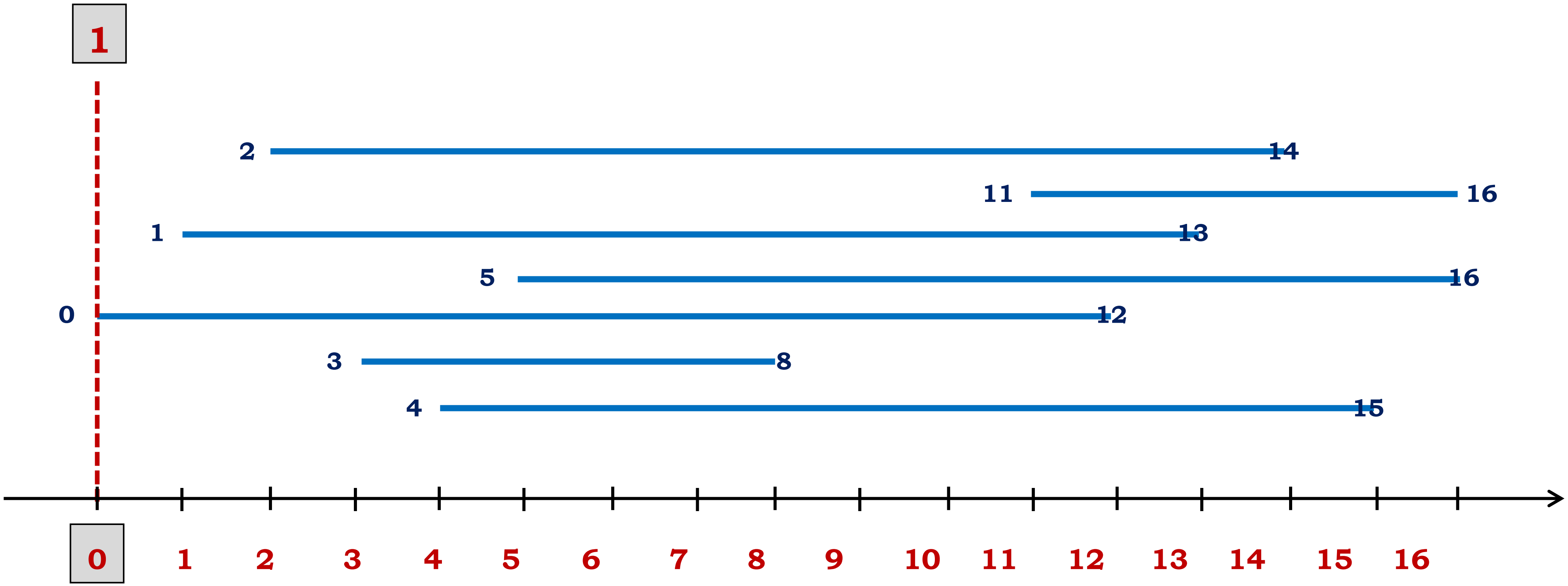


E2 (*Φαρμακευτική Εταιρία*)

Fmax = +max

Cmin = -min

- **Αλγόριθμος:**

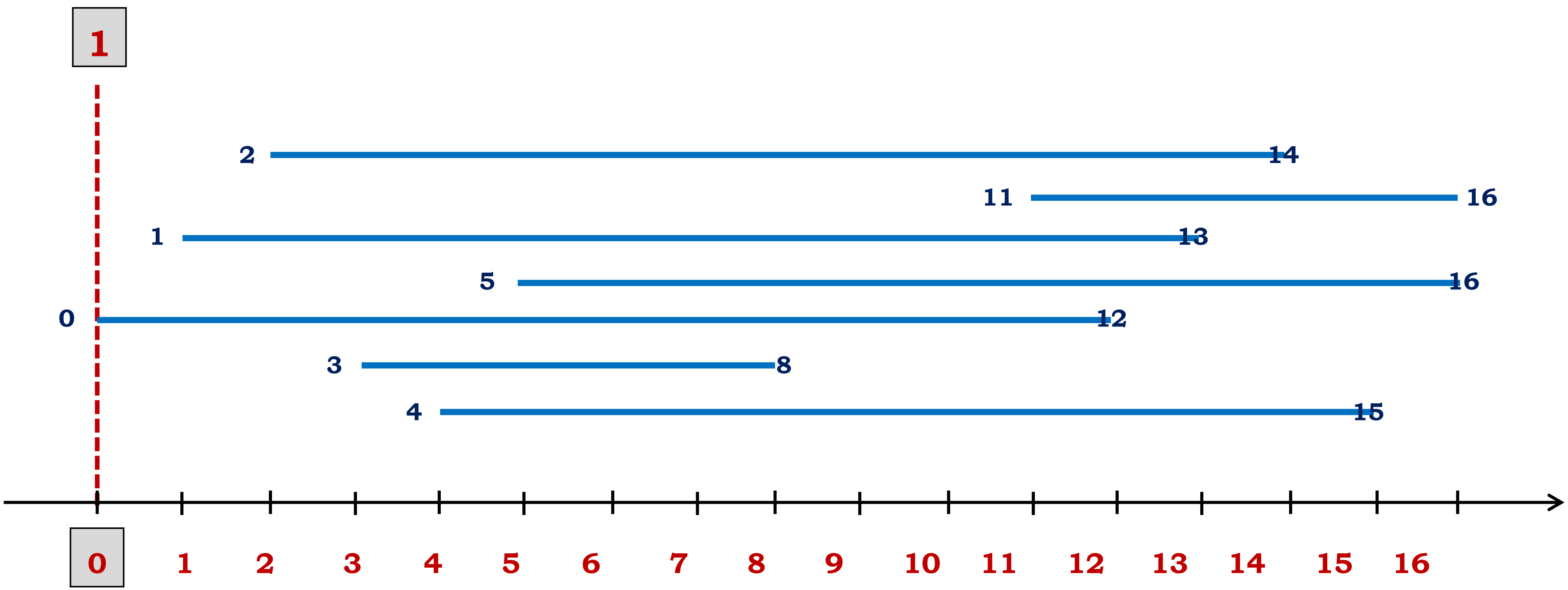


E2 (*Φαρμακευτική Εταιρία*)

Fmax = 1

Cmin = 0

Αλγόριθμος:

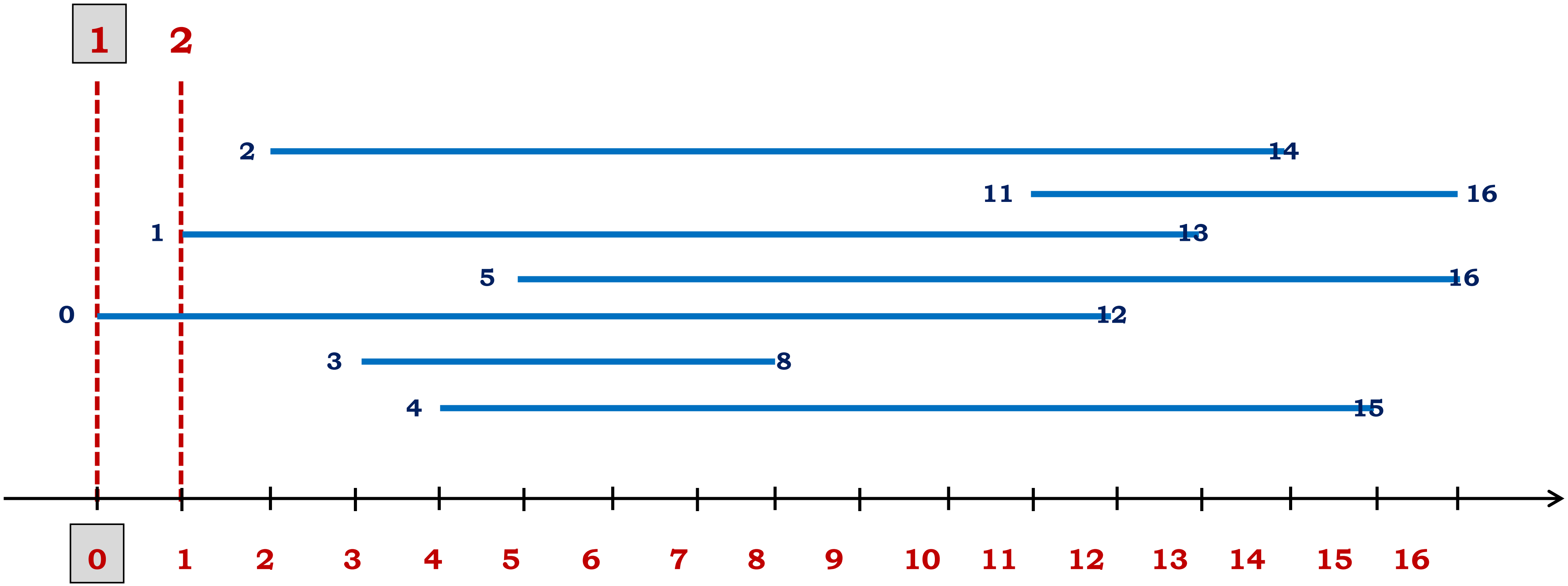


E2 (*Φαρμακευτική Εταιρία*)

Fmax = 1

Cmin = 0

- **Αλγόριθμος:**

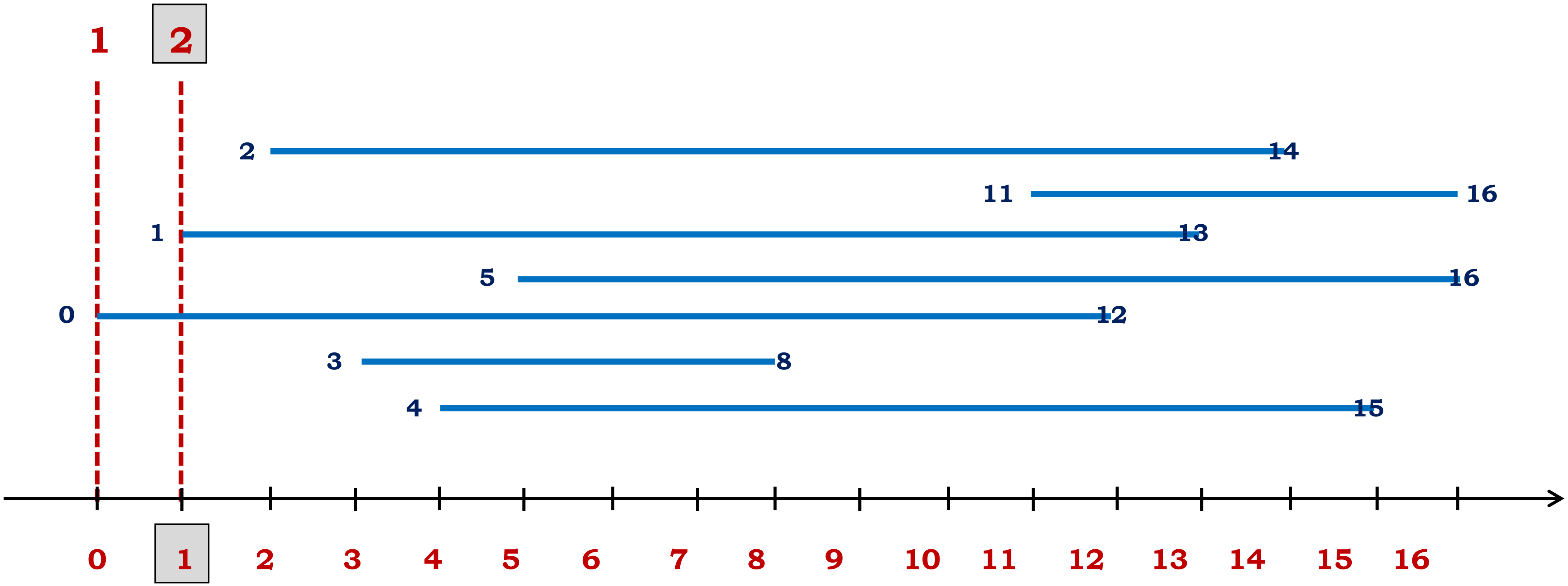


E2 (*Φαρμακευτική Εταιρία*)

Fmax = 2

Cmin = 1

Αλγόριθμος:

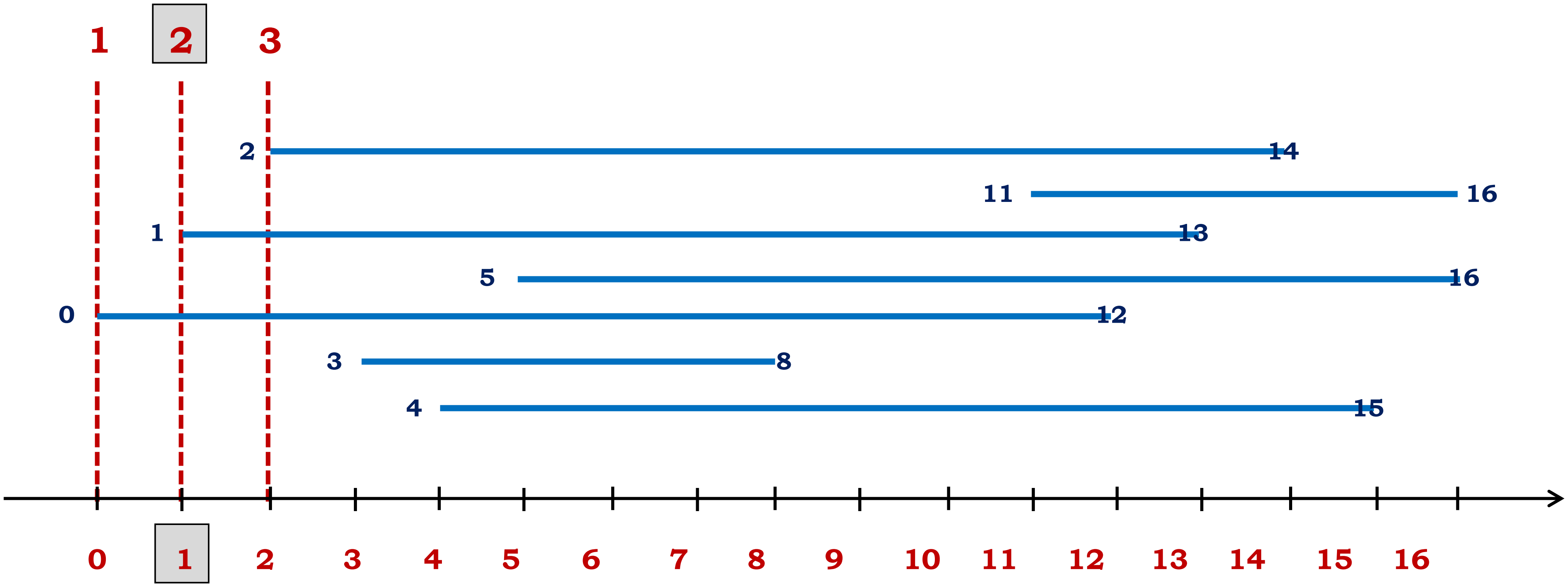


E2 (*Φαρμακευτική Εταιρία*)

$F_{max} = 2$

$C_{min} = 1$

- **Αλγόριθμος:**

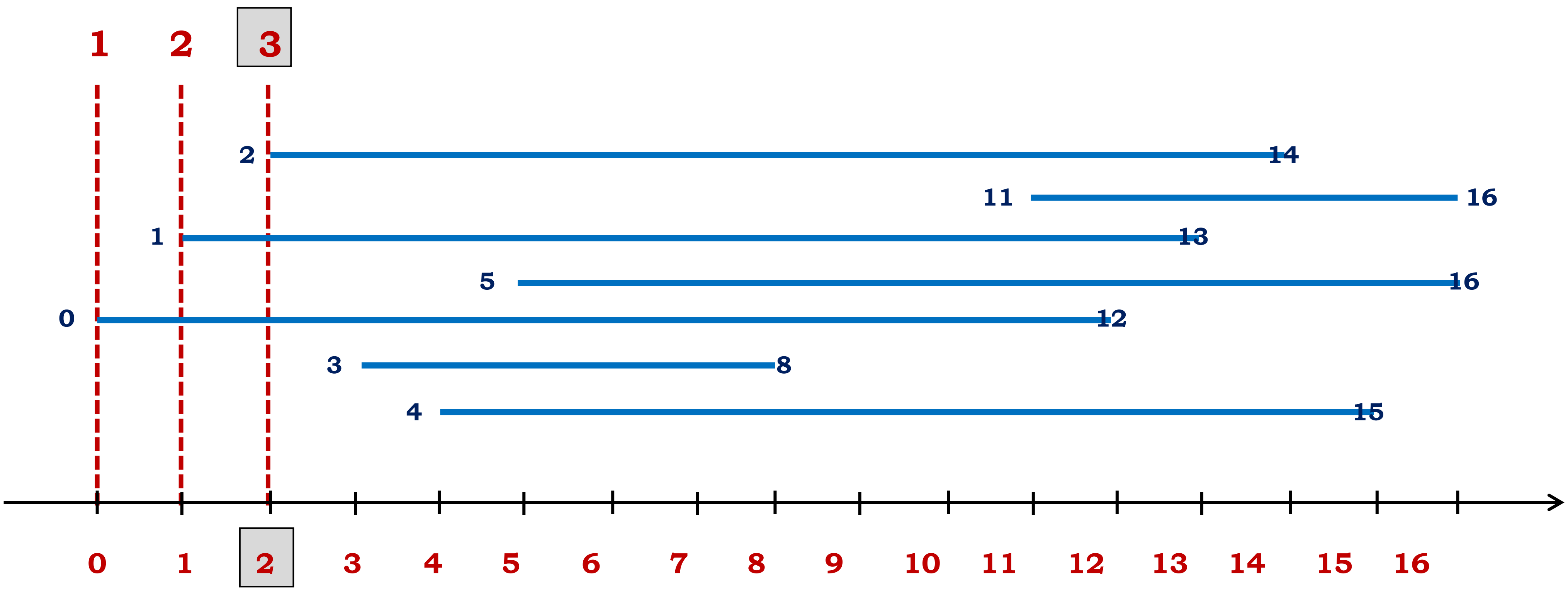


E2 (*Φαρμακευτική Εταιρία*)

Fmax = 3

Cmin = 2

- **Αλγόριθμος:**

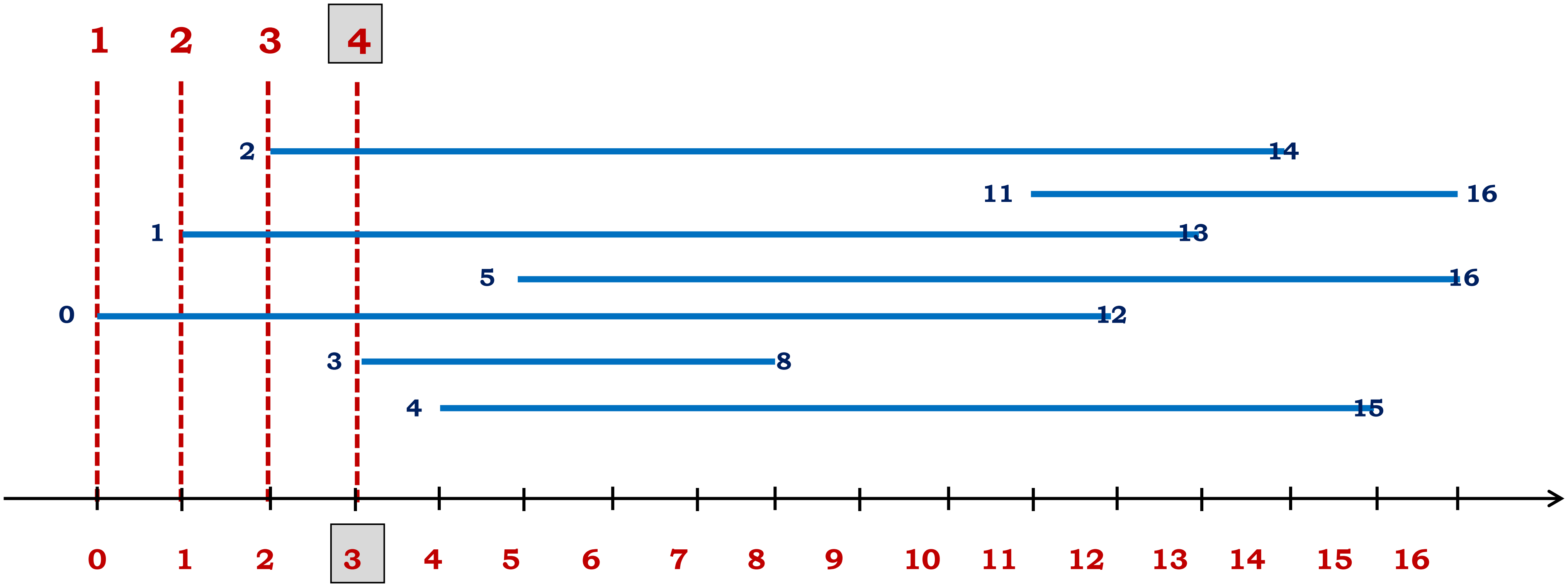


E2 (*Φαρμακευτική Εταιρία*)

Fmax = 4

Cmin = 3

- **Αλγόριθμος:**

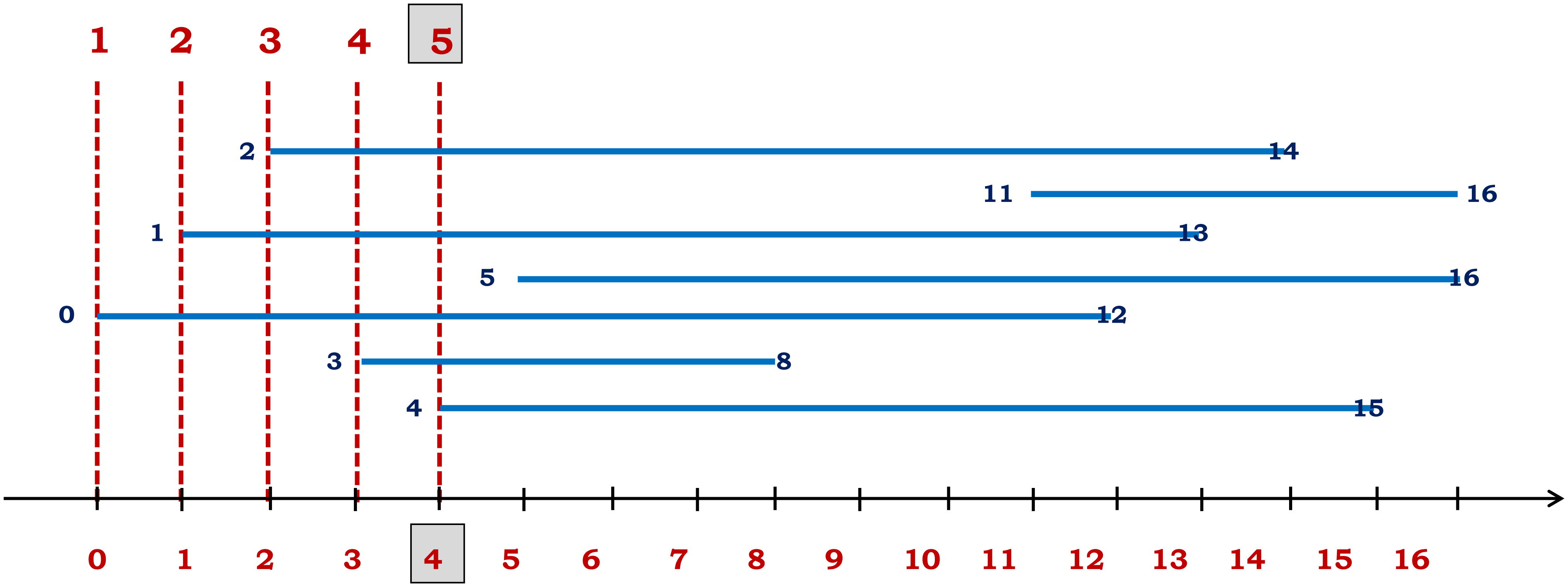


E2 (*Φαρμακευτική Εταιρία*)

Αλγόριθμος:

Fmax = 5

Cmin = 4

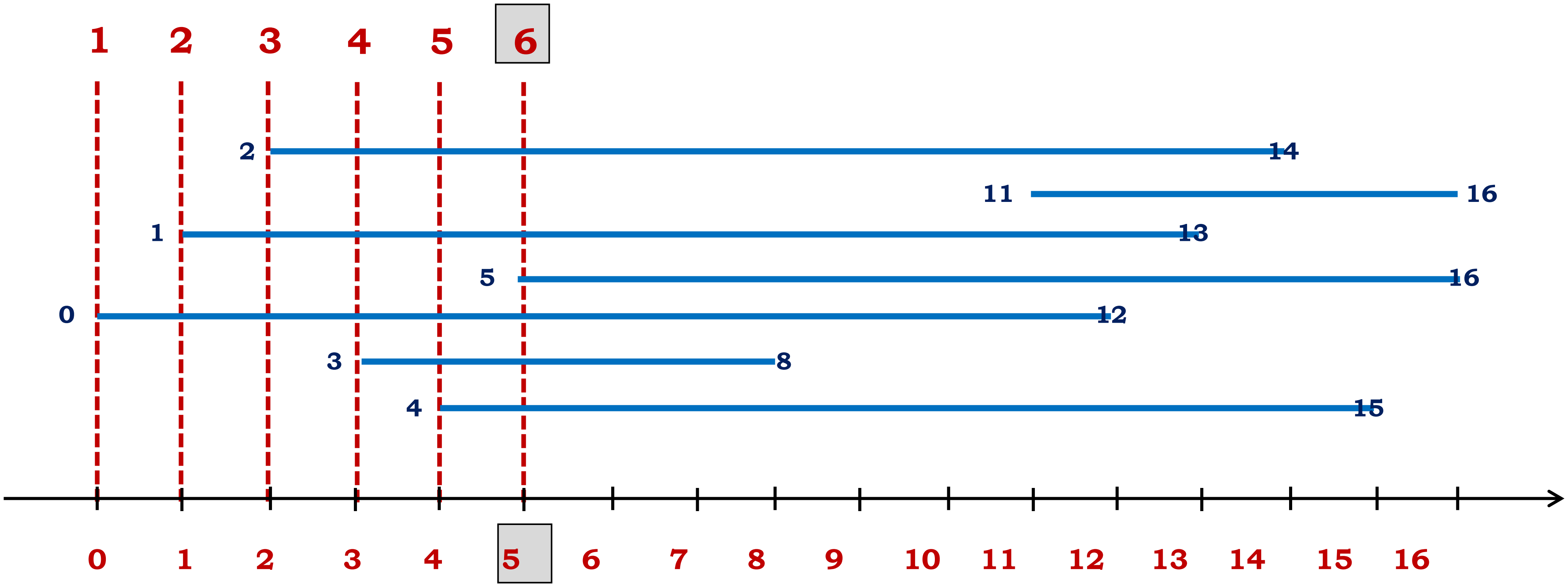


E2 (*Φαρμακευτική Εταιρία*)

Fmax = 6

Cmin = 5

- **Αλγόριθμος:**

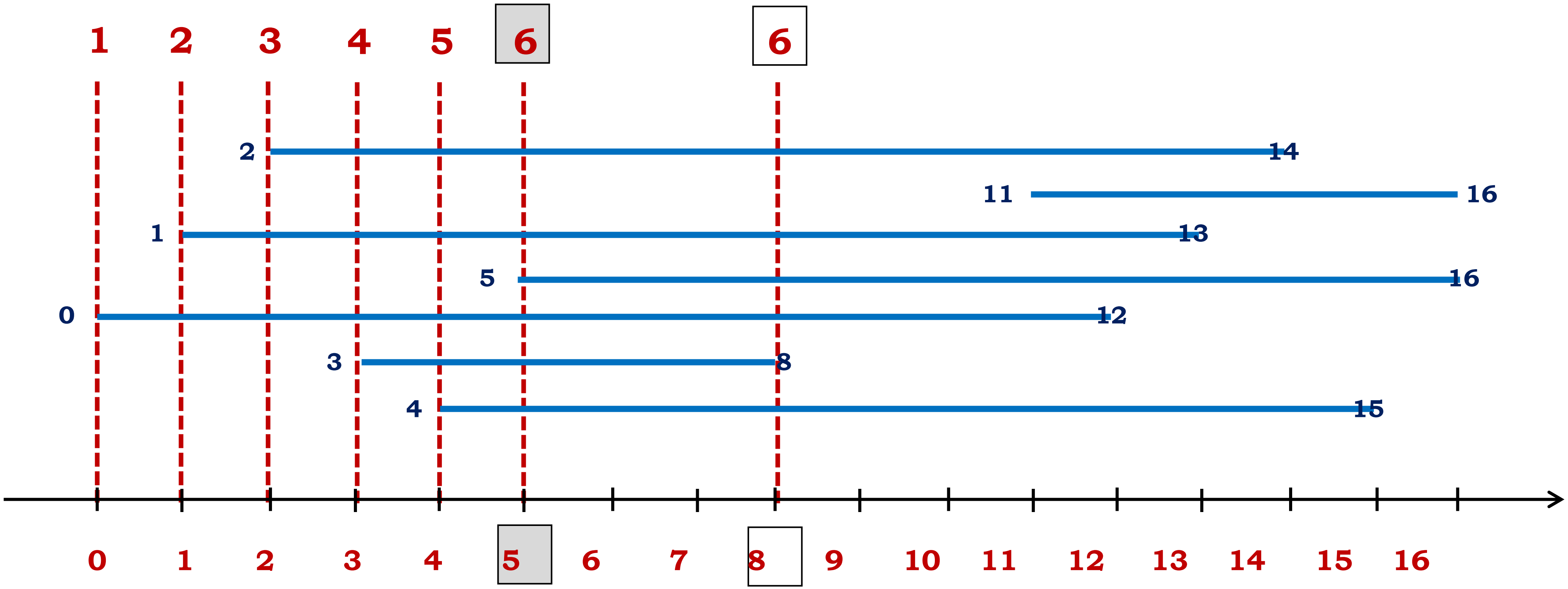


E2 (*Φαρμακευτική Εταιρία*)

Fmax = 6

Cmin = 5

Αλγόριθμος:

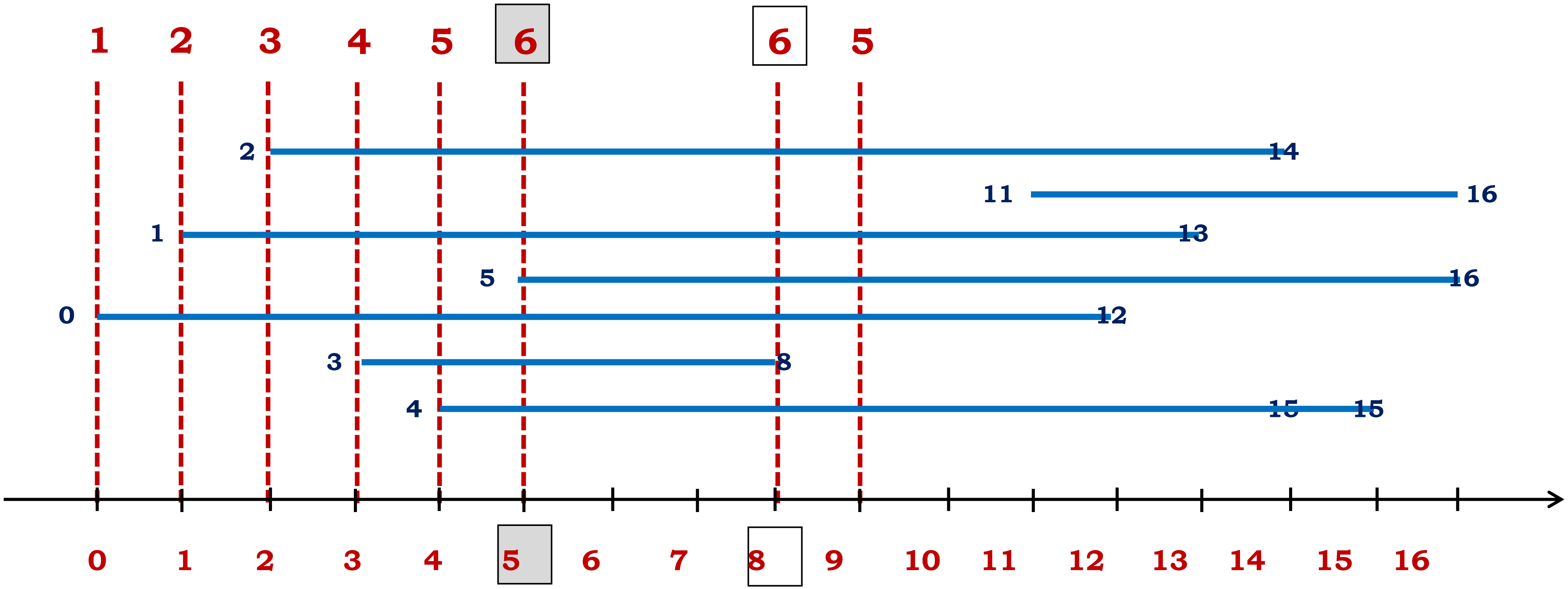


E2 (*Φαρμακευτική Εταιρία*)

- **Αλγόριθμος:**

Fmax = 6

Cmin = 5

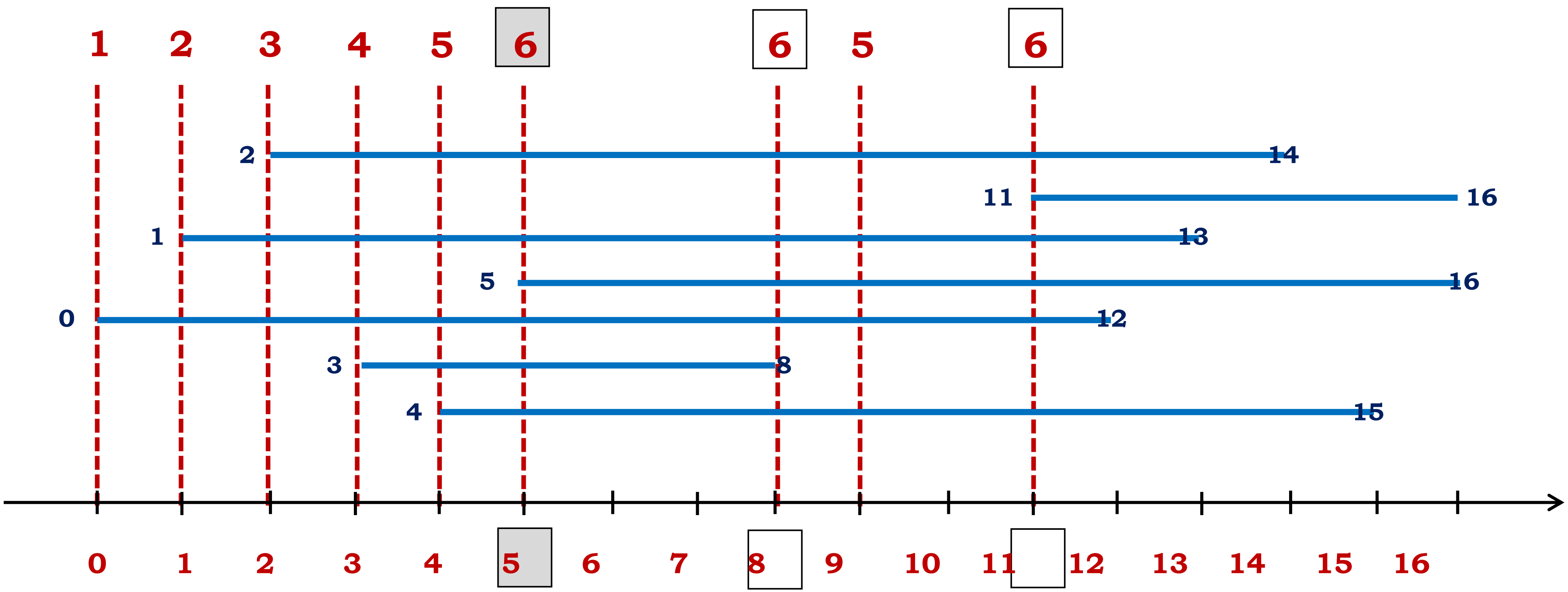


E2 (*Φαρμακευτική Εταιρία*)

- **Αλγόριθμος:**

Fmax = 6

Cmin = 5

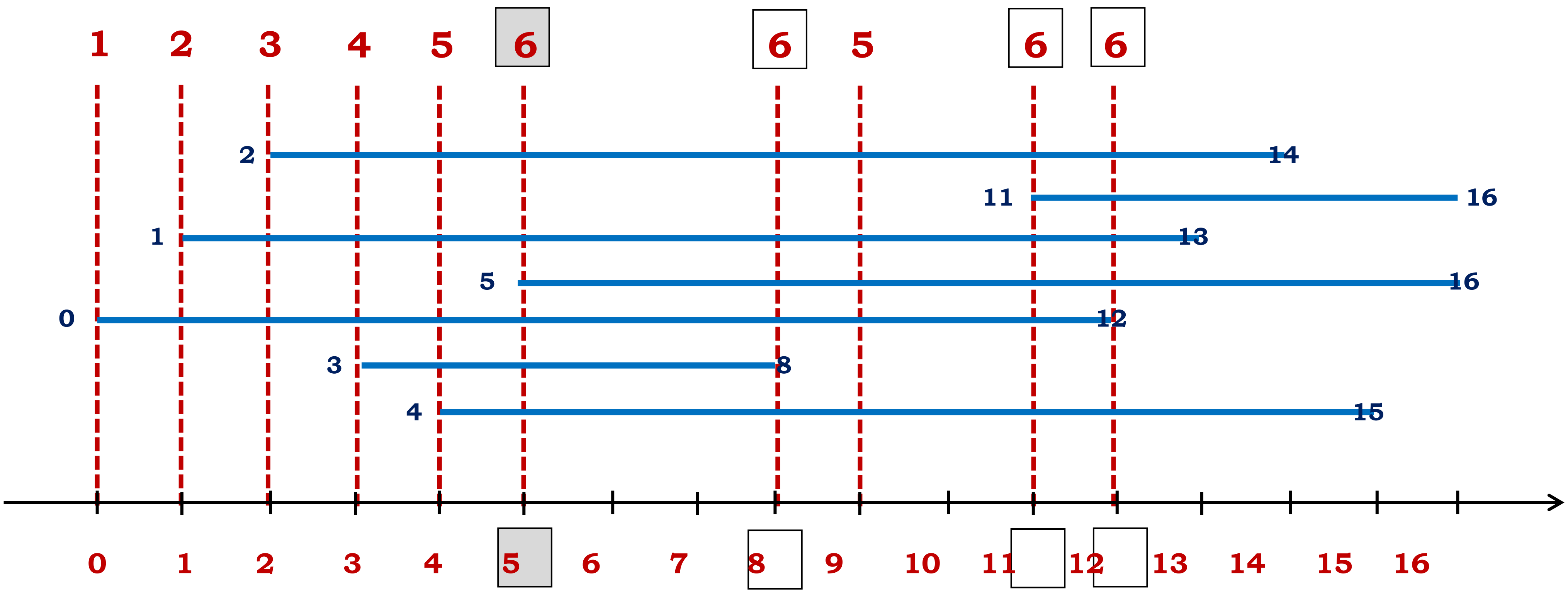


E2 (*Φαρμακευτική Εταιρία*)

Fmax = 6

Cmin = 5

- **Αλγόριθμος:**

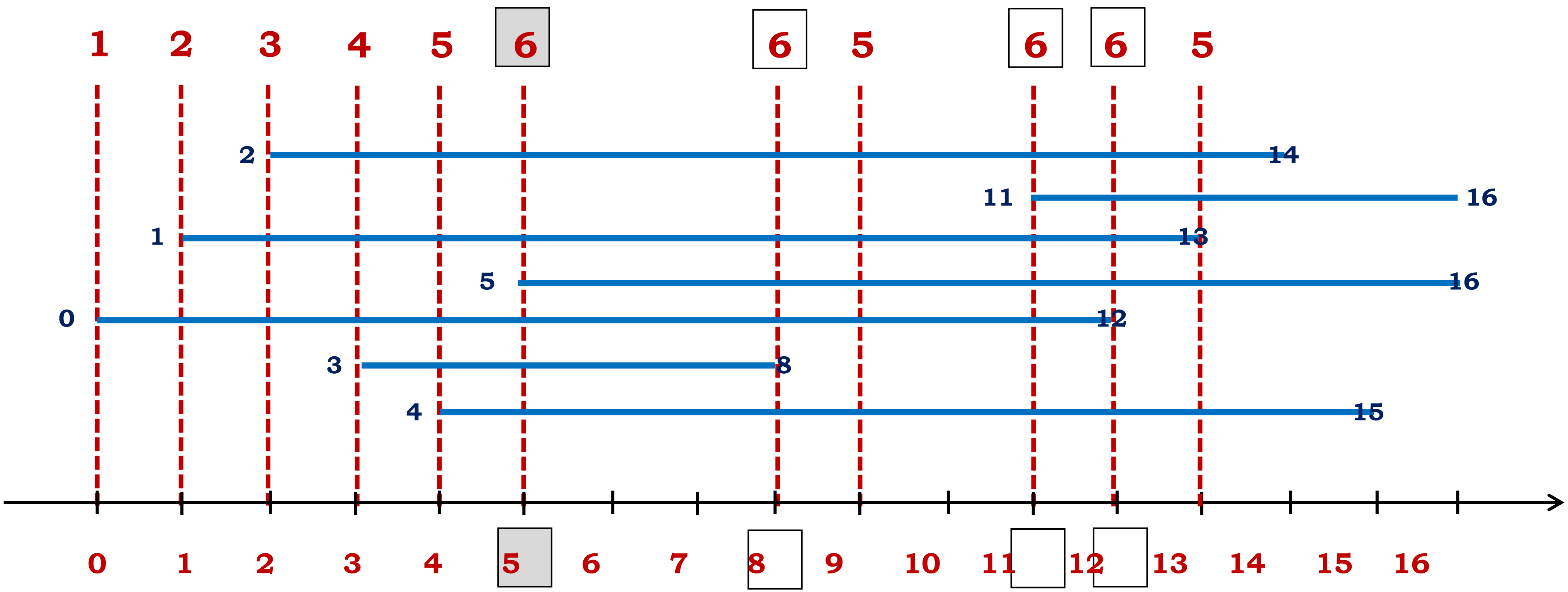


E2 (*Φαρμακευτική Εταιρία*)

- **Αλγόριθμος:**

Fmax = 6

Cmin = 5

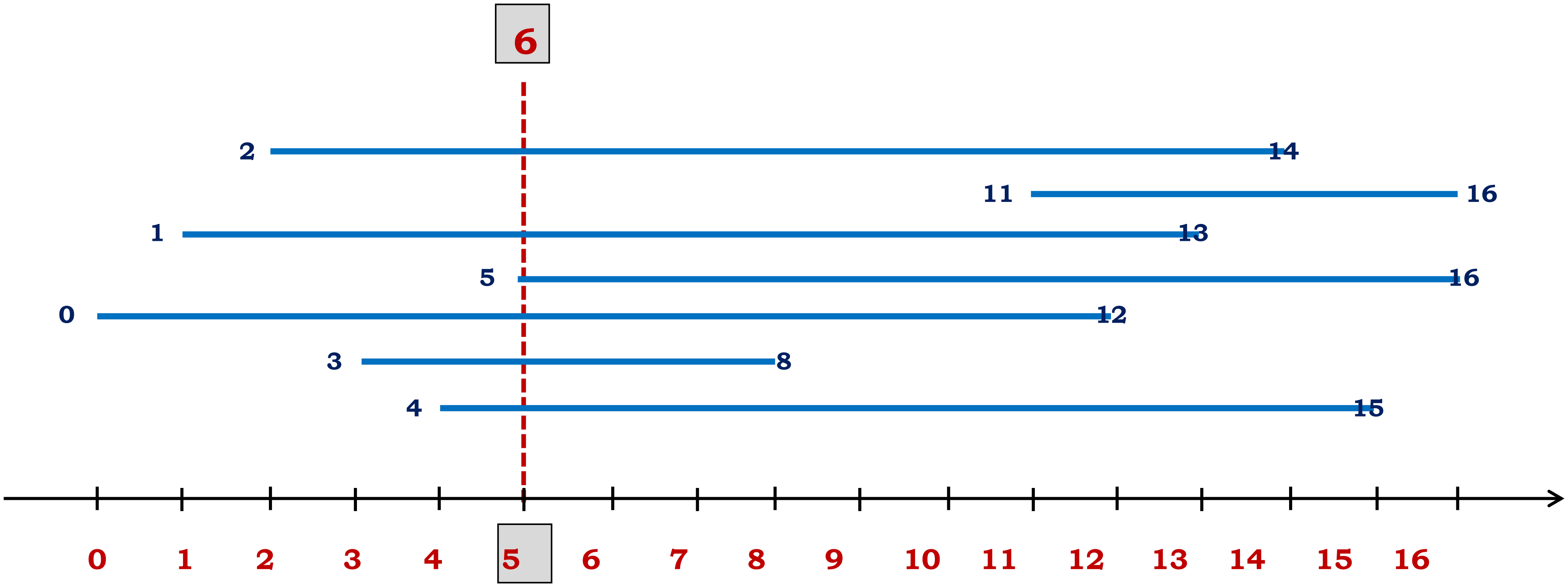


E2 (*Φαρμακευτική Εταιρία*)

- **Αλγόριθμος:**

Fmax = 6

Cmin = 5



E2 (*Φαρμακευτική Εταιρία*)

- **Δόμηση Πληροφορίας:**

$F_1, F_2, \ldots, F_7$

[4, 15], [3, 8], [0, 12], [5, 16], [1, 13], [11, 16], [2, 14]

A = (4, 3, 0, 5, 1, 11, 2)

???

B = (15, 8, 12, 16, 13, 16, 14)

E2 (*Φαρμακευτική Εταιρία*)

- **Δόμηση Πληροφορίας:**

$\mathbf{F_1, F_2, \ldots, F_7}$

[4, 15], [3, 8], [0, 12], [5, 16], [1, 13], [11, 16], [2, 14]

A = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 11) **!!!**

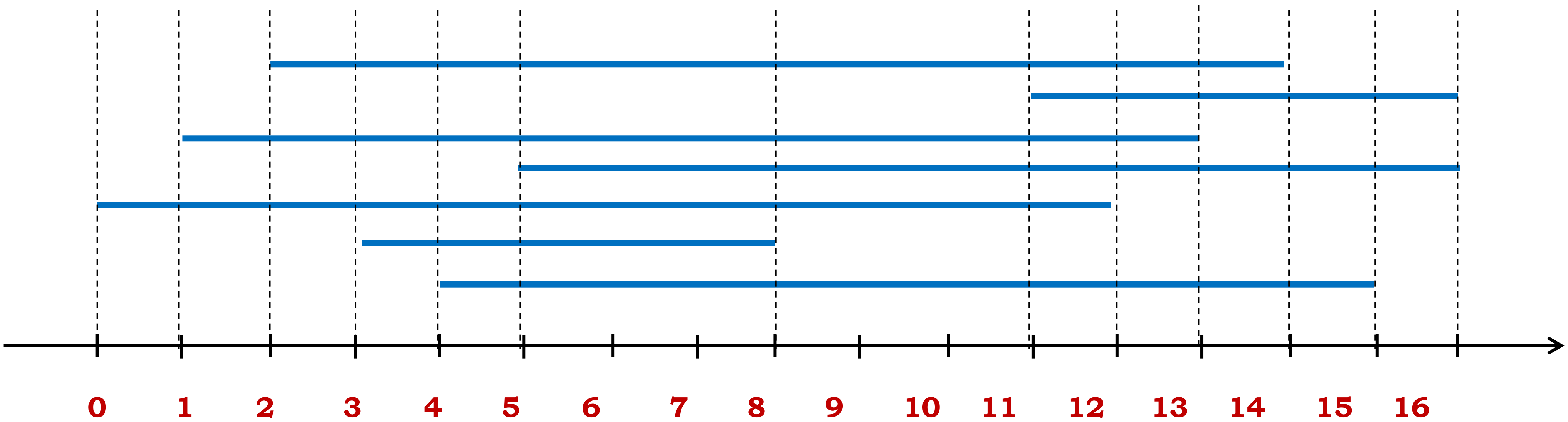
B = (8, 12, 13, 14, 15, 16, 16)

E2 (*Φαρμακευτική Εταιρία*)

- **Μοντελοποίηση:**

F_1, F_2, …, F_7

[4, 15], [3, 8], [0, 12], [5, 16], [1, 13], [11, 16], [2, 14]

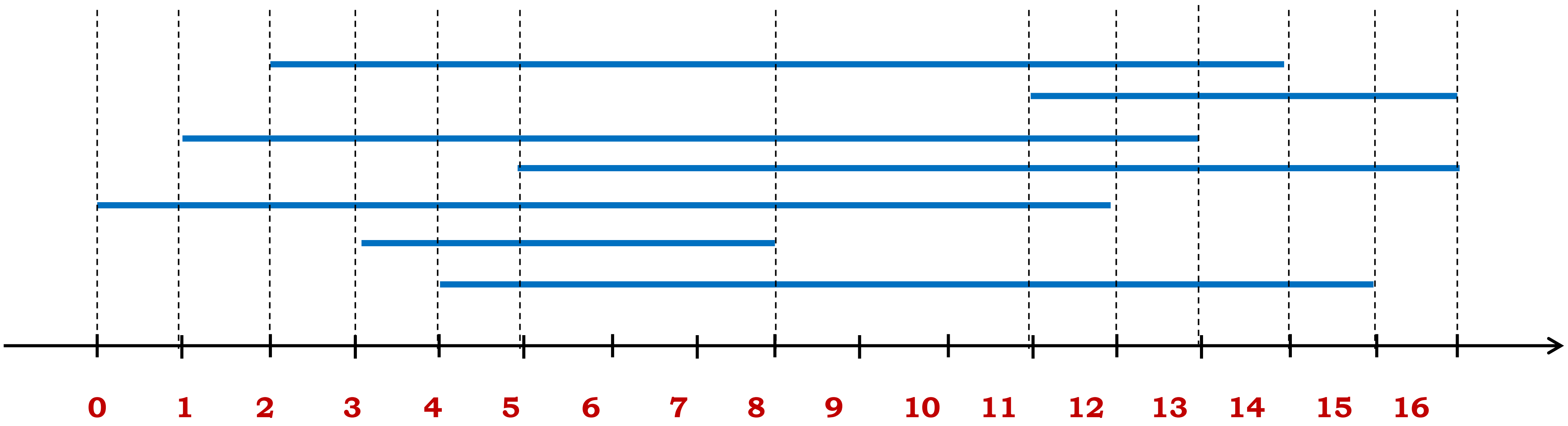


E2 (*Φαρμακευτική Εταιρία*)

- **Αλγόριθμος:**

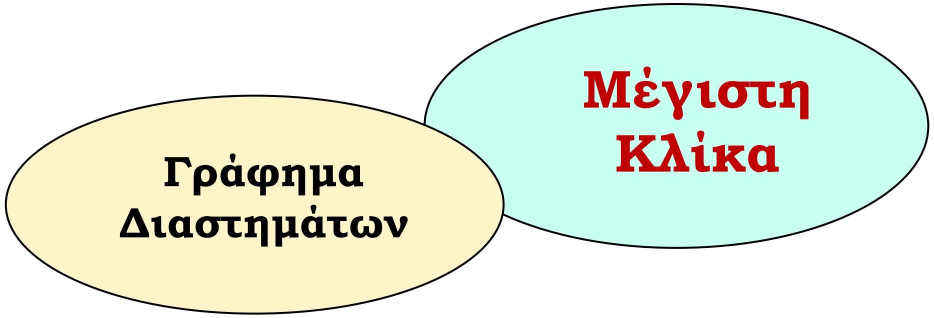
Γράφημα Διαστημάτων

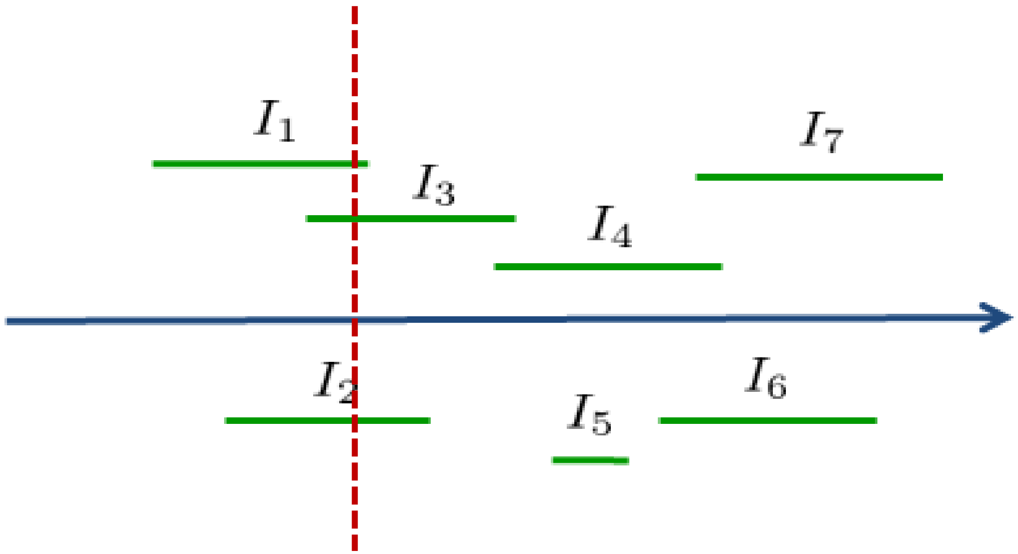
Μέγιστη Κλίκα

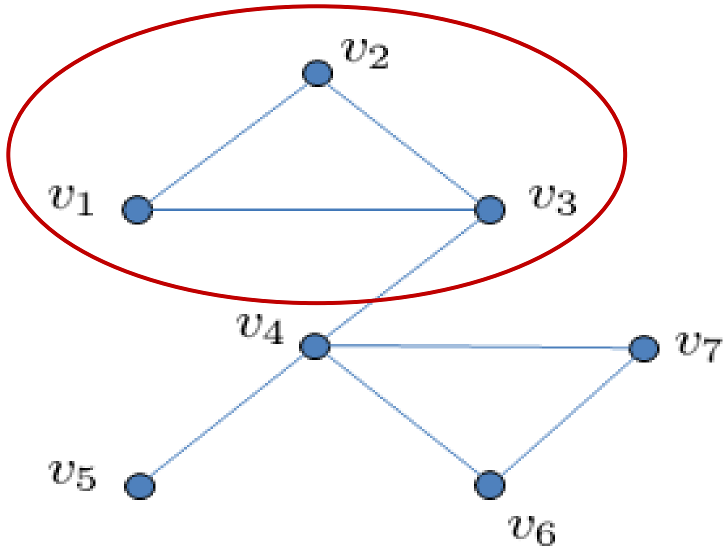


E2 (*Φαρμακευτική Εταιρία*)

- **Αλγόριθμος:**





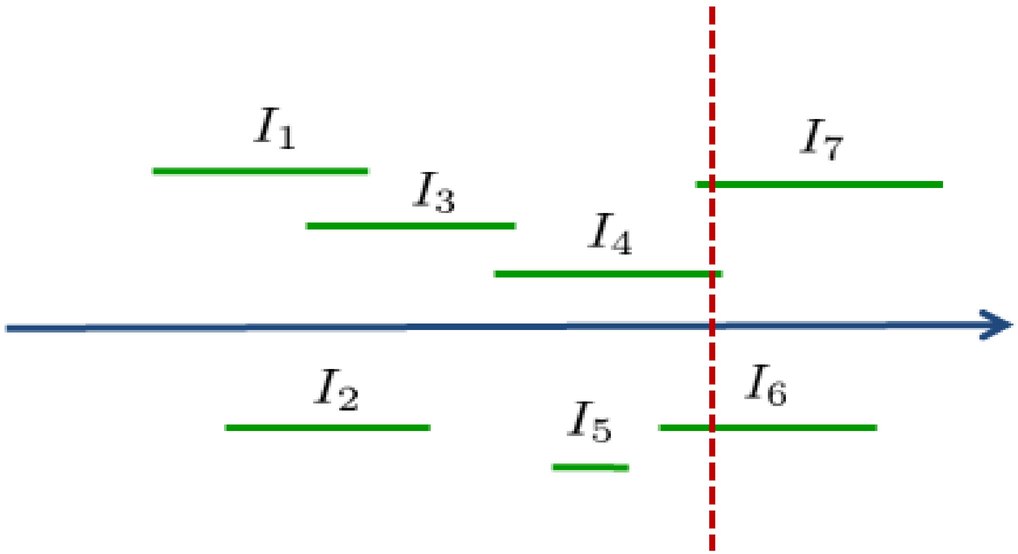


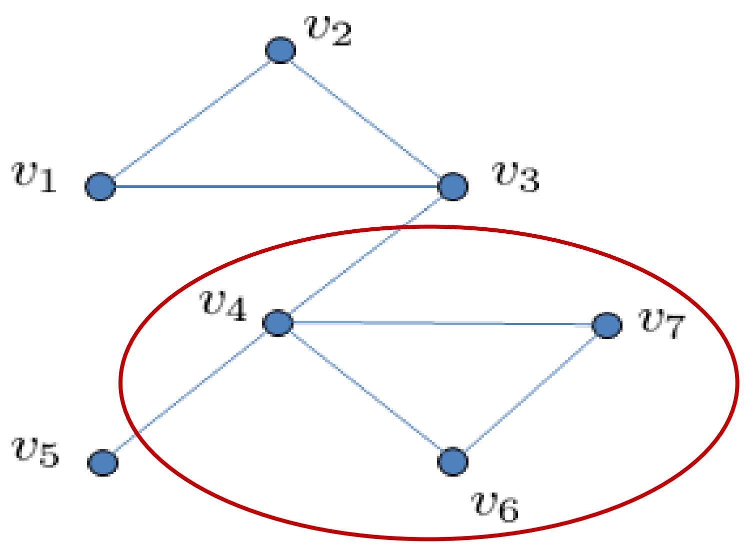
E2 (*Φαρμακευτική Εταιρία*)

- **Αλγόριθμος:**

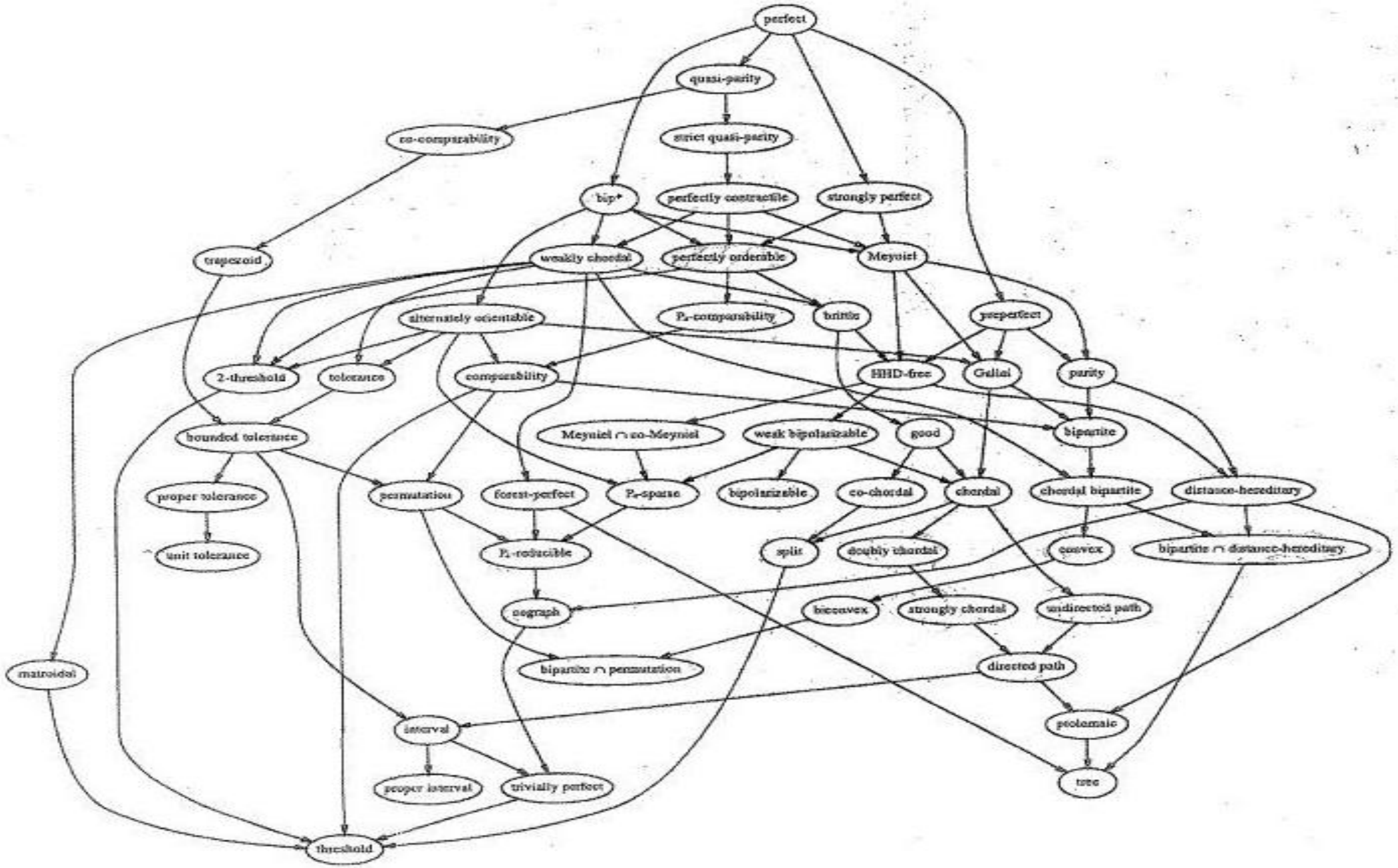
Γράφημα Διαστημάτων

Μέγιστη Κλίκα





Classes of Perfect Graphs



Intersection Graphs

Object – Graph

Graph Properties

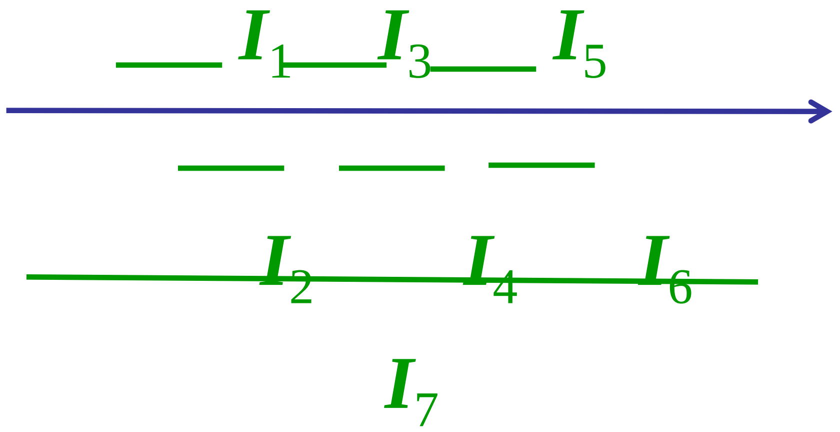
Intersection Graphs

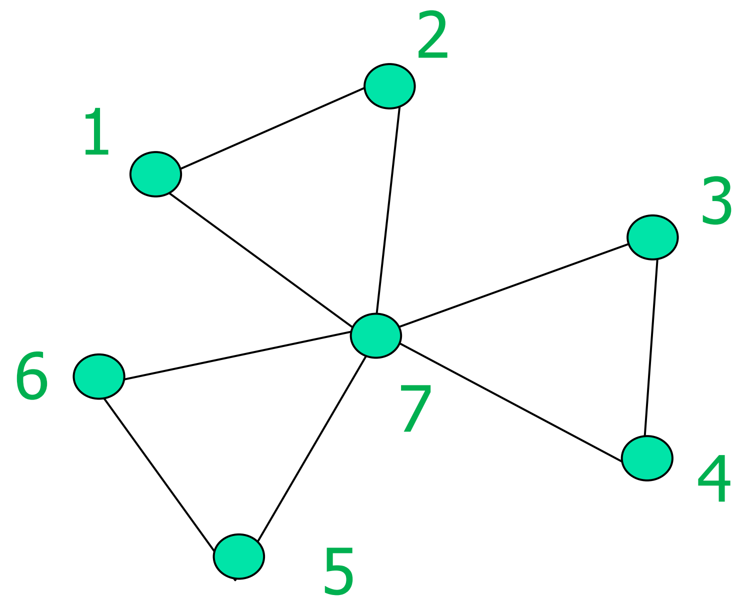
- Let F be a family of nonempty sets.
- The intersection graph of F is obtained be representing each set in F by a vertex:

$$\boxed{x \to y \iff S_X \cap S_Y \neq \varnothing}$$

Intersection Graphs (Interval)

- The intersection graph of a family of intervals on a linearly ordered set (like the real line) is called an interval graph

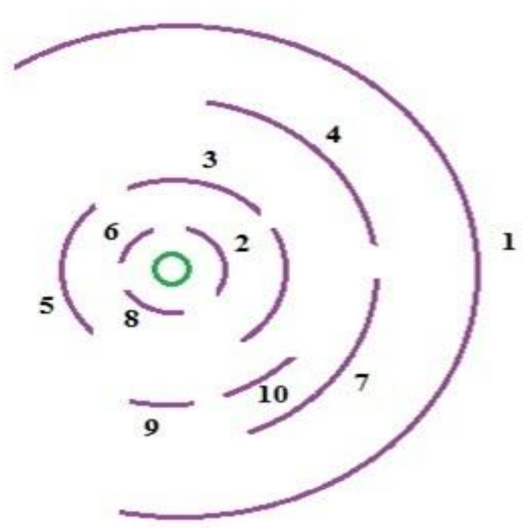


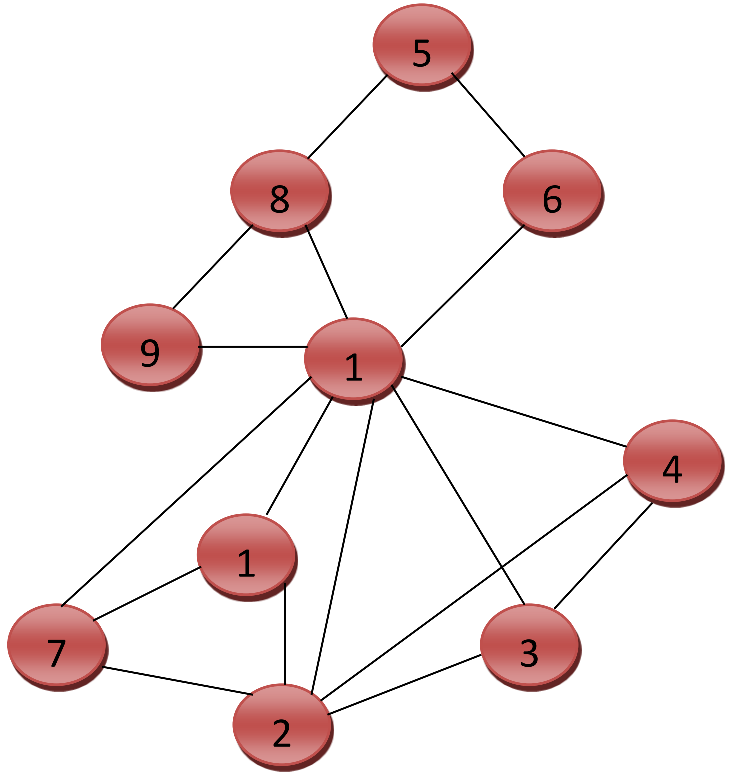


- Unit & Proper internal graph
- *No internal property contains another*

Intersection Graphs (Circular-arc)

- Circular-arc graphs properly contain the internal graphs.

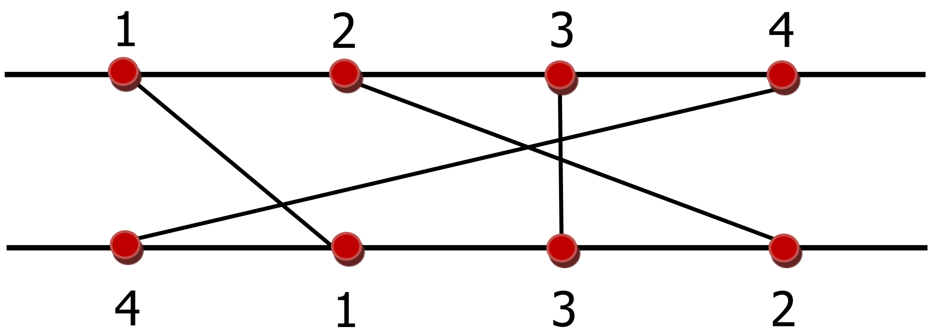




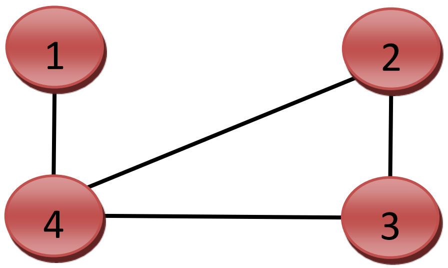
- proper circular - arc graphs

Intersection Graphs (Permutation)

- A permutation diagram consists of n points on each of two parallel lines and n straight line segments matching the points.



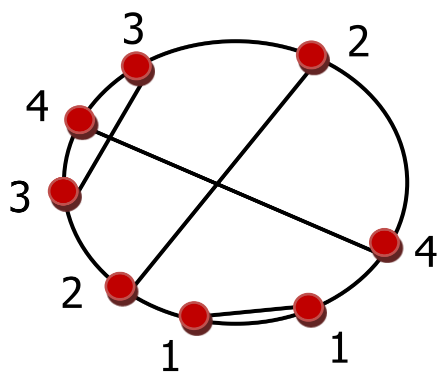
$\pi = [4,1,3,2]$

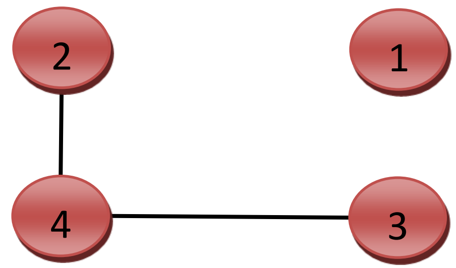


$G[\pi]$

Intersection Graphs (Chords-of-circle)

- Intersecting chords of a circle

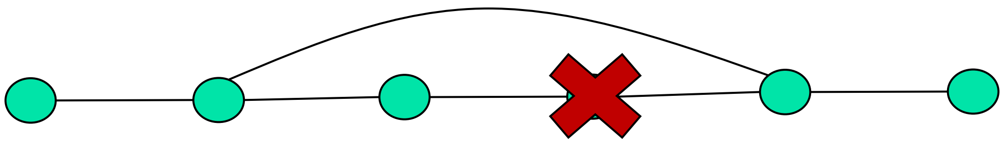




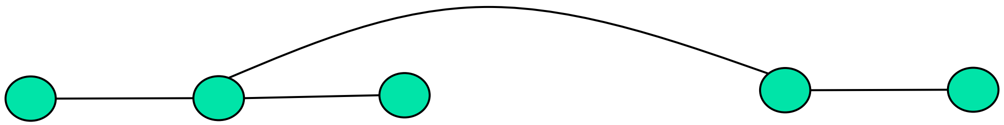
Intersection Graphs (cont…)

- Propositinon 1.1. An induced subgraph of an interval graph is an interval graph.

- In general…



Hamiltonian



non-Hamiltonian

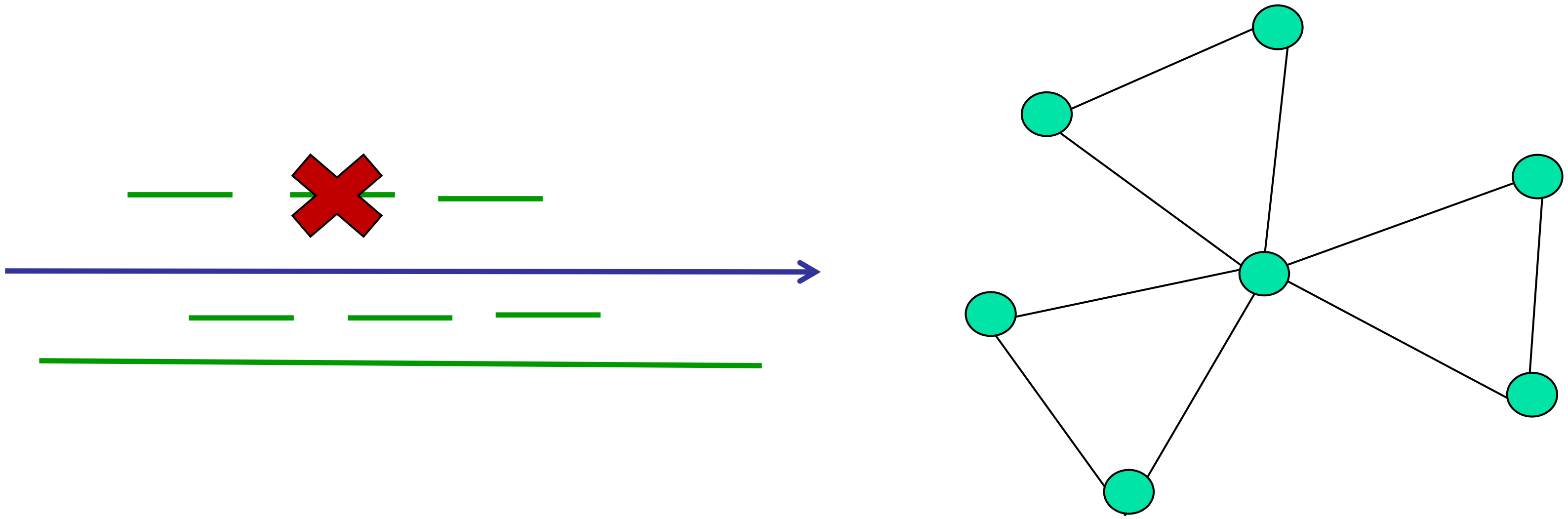
Intersection Graphs (cont…)

- Propositinon 1.1. An induced subgraph of an interval graph is an interval graph.

  Proof ?

G

Interval



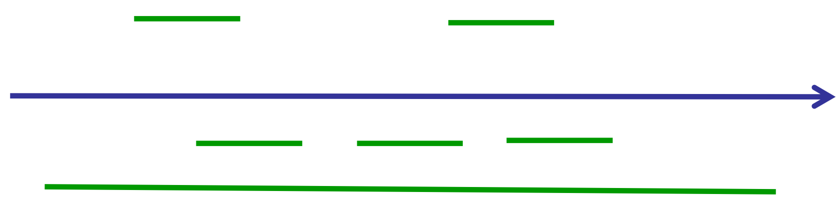
Intersection Graphs (cont...)

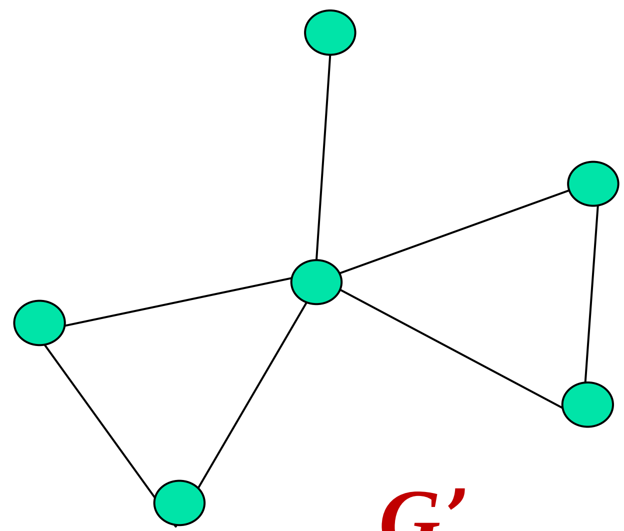
- Propositinon 1.1. An induced subgraph of an interval graph is an interval graph.

  Proof ?

G'

Interval





G'

Intersection Graphs (cont…)

- Propositinon 1.1. An induced subgraph of an interval graph is an interval graph.

Proof.

If $[I_V]$, $v \in V$, is an interval representation of a graph $G = (V, E)$. Then

- $[I_V]$, $v \in X$, is an interval representation of the induced subgraph $G_X = (X, E_X)$.

Algorithmic Graph Theory

Triangulated Property

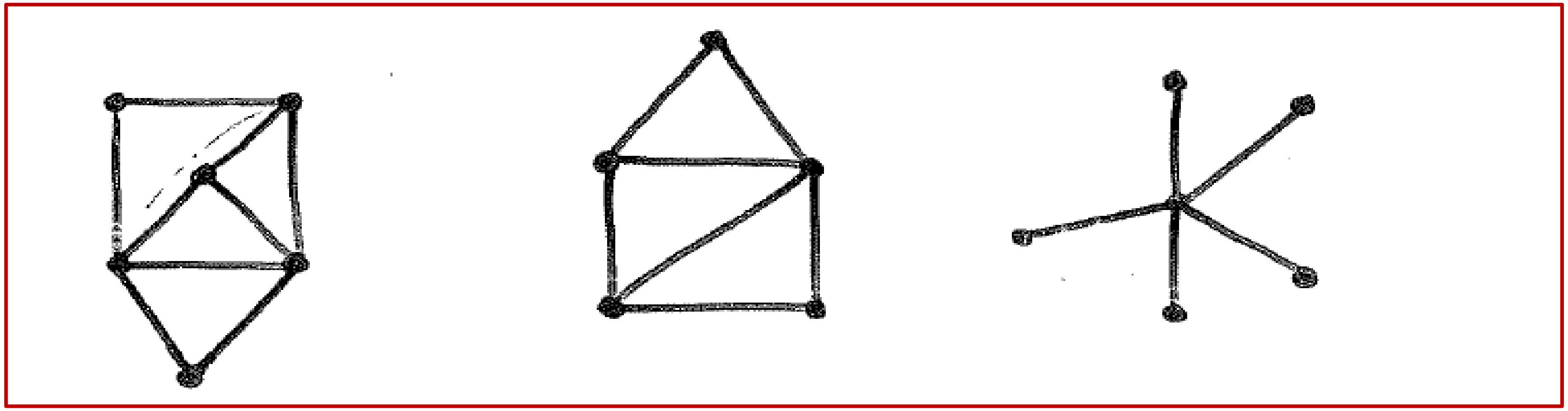
Transitive Orientation Property

Triangulated Property

- Triangulated Graph Property

  Every simple cycle of length l > 3 possesses a chord.

- Triangulated graphs (or chord graphs)



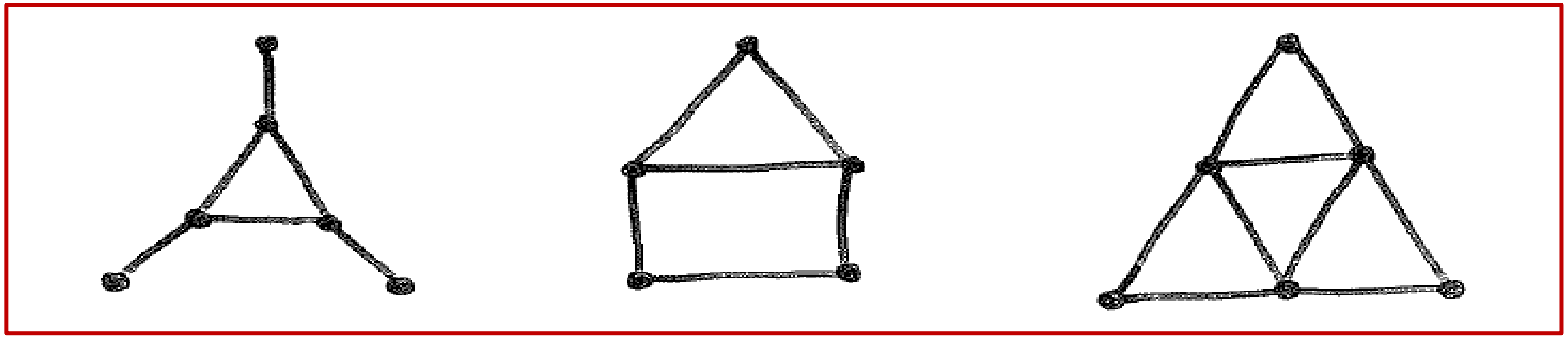
Transitive Orientation Property

- Transitive Orientation Property

  Each edge can be assigned a one-way direction in such a way that the resulting oriented graph (V, F):

  $$ab \in F \text{ and } bc \in F \Rightarrow ac \in F \ (\forall\ a, b, c \in V)$$

- Comparability graphs



Intersection Graph Properties (1)

- Proposition 1.2. An interval graph satisfies the triangulated graph property.

Proof.

Suppose G contains a cordless cycle $[v_0,v_1,\ldots,v_{l-1},v_0]$ with $l > 3$. Let $I_K \rightarrow v_K$.

For i =1, 2,…, l-1, choose a point $P_i \in I_{i-1} \cap I_i$.
Since I_{i-1} and I_{i+1} do not overlap, the points P_i constitute a strictly increasing or decreasing sequence.

Therefore, it is impossible for the intervals I_0 and I_{l-1} to intersect, contradicting the criterion that v_0v_{l-1} is an edge of G.

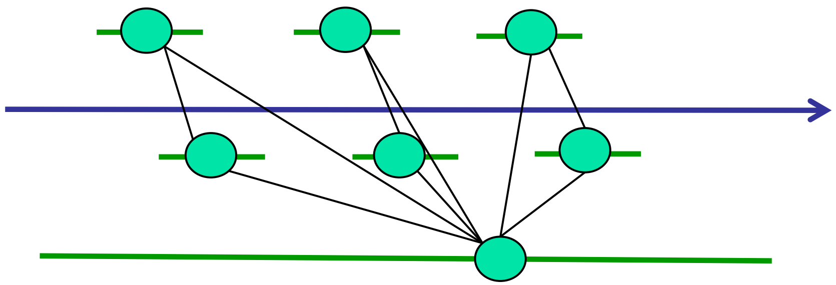
Intersection Graph Properties (2)

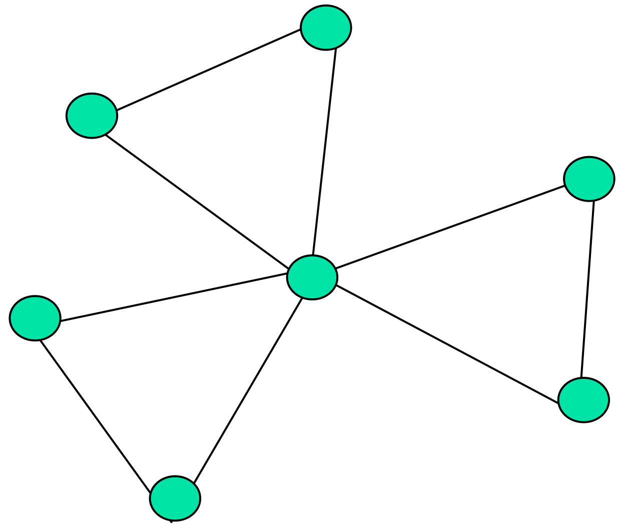
- Proposition 1.3. The complement of an internal graph satisfies the transitive orientation property.

Proof (1).

G

Interval





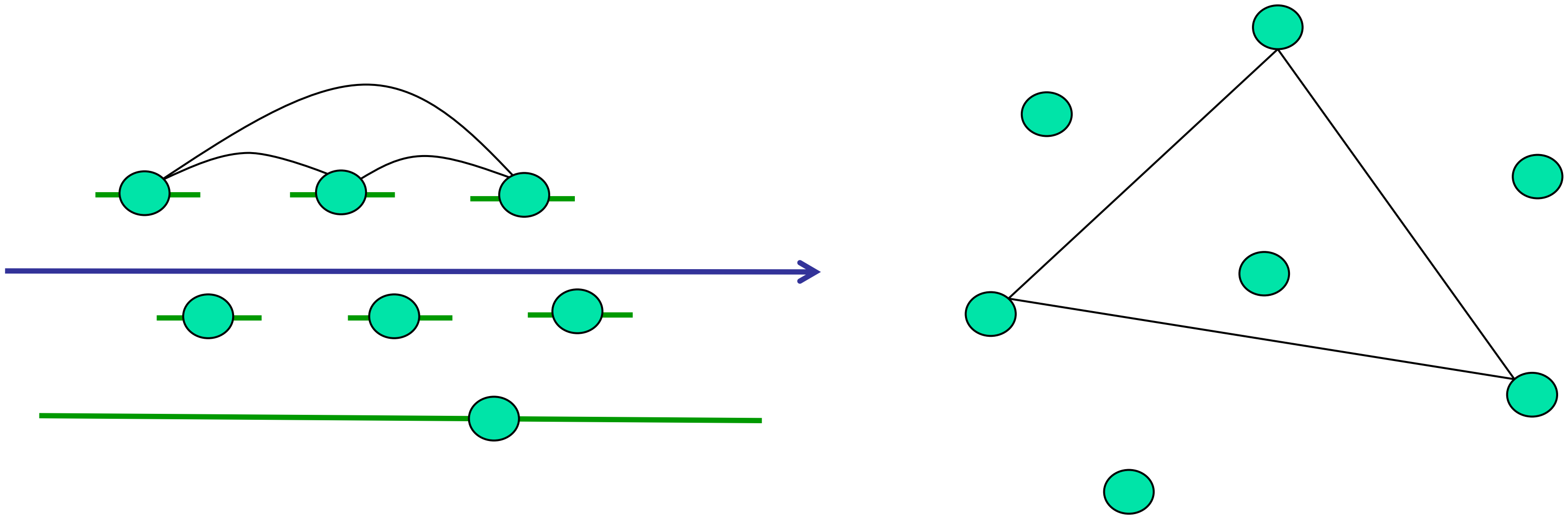
Intersection Graph Properties (3)

- Proposition 1.3. The complement of an internal graph satisfies the transitive orientation property.

Proof (1).

$\bar{G}$

Interval



Intersection Graph Properties (4)

- Proposition 1.3. The complement of an internal graph satisfies the transitive orientation property.

Proofv (2).

Let $\{I_v\}$ $v \in V$ be the interval representation for G = (V, E).

Define an orientation F of Ğ = (V, Ē) as follows:

$$xy \in F \Leftrightarrow I_X < I_Y \quad (\forall xy \in \bar{E}).$$

Here, $I_X < I_Y$ means that I_X lies entirely to the left of I_Y. Clearly the top is satisfied, since $I_X < I_Y < I_Z \Rightarrow I_X < I_Z$. Thus F is a transitive orientation of Ğ.

Intersection Graph Properties (5)

- Theorem 1.4. An undirected graph G is an interval graph if and only if (iff)
  - G is triangulated graph, and
  - its complement Ğ is a comparability graph.

Proof… M. Golumbic, pp. 172.

Algorithmic Graph Theory

Numbers $\omega(G)$

Numbers $\alpha(G)$

Numbers $\kappa(G)$

Numbers $\chi(G)$

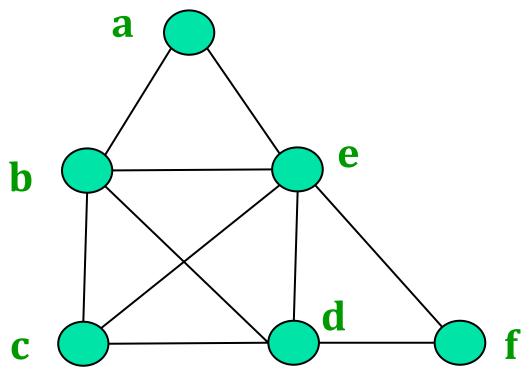
Graph Theoretic Foundations (2)

- Clique number $\omega(G)$

  the number of vertices in a maximum clique of G

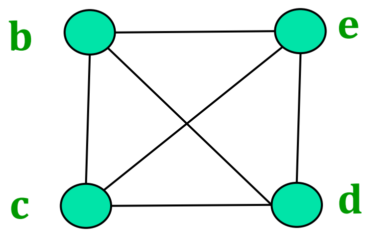
- Stability number $\alpha(G)$

  the number of vertices in a stable set of max cardinality



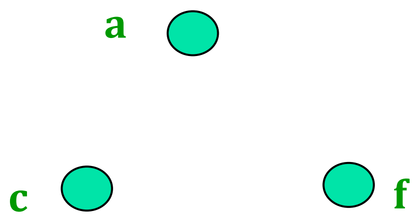
$\Rightarrow$

Max κλίκα του G



$\omega(G) = 4$

Max stable set of G



$\alpha(G) = 3$

Graph Theoretic Foundations (3)

- A clique cover of size k is a partition

$$V = C_1 + C_2 + \ldots + C_k$$

such that C_i is a clique.

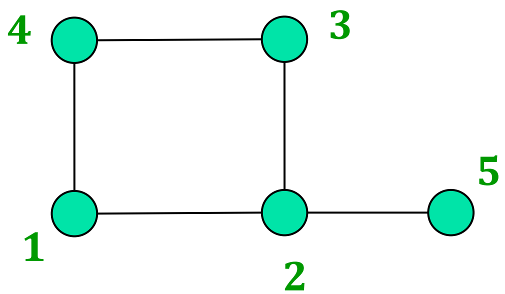
- A proper coloring of size c (*proper c-coloring*) is a partition

$$V = X_1 + X_2 + \ldots + X_c$$

such that X_i is a stable set.

Graph Theoretic Foundations (4)

- Clique cover number $\kappa(G)$
  the size of the smallest possible clique cover of G
- Chromatic number $\chi(G)$
  the smallest possible c for which there exists a proper c-coloring of G.



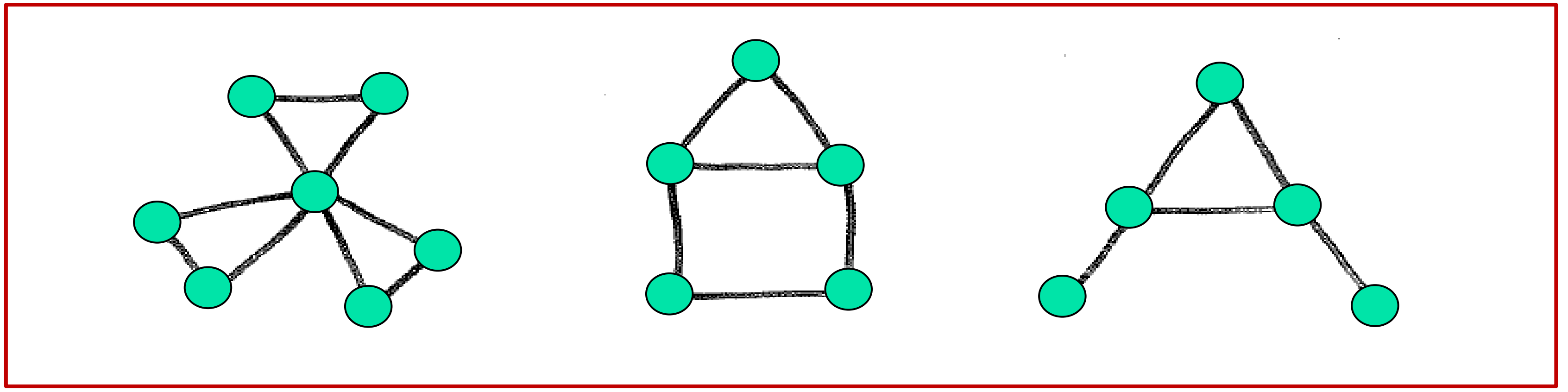
$\omega(G)=2$ $\alpha(G)=3$

$\chi(G) = 2$ $\kappa(G) = 3$

clique cover $V= \{2,5\} + \{3,4\} + \{1\}$
c-coloring $V= \{1,3,5\} + \{2,4\}$

Graph Theoretic Foundations (1)

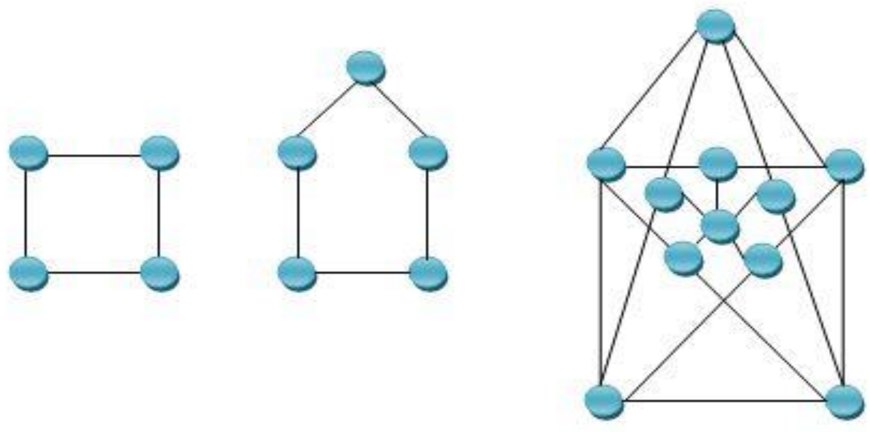
- Observation...



Each of the graphs can be colored using 3 colors and each contains a triangle. Therefore, $\chi(G) = \omega(G)$

Graph Theoretic Foundations (5)

- For any graph G: $\omega(G) \leq \chi(G)$
  $\alpha(G) \leq \kappa(G)$



- Obviously: $\alpha(G) = \omega(\breve{G})$ and $\kappa(G) = \chi(\breve{G})$

Algorithmic Graph Theory

χ-Perfect property

α-Perfect property

Perfect Graphs

Perfect Graphs - Properties

- χ-Perfect property

  For each induced subgraph G_A of a graph G

  $$\chi(G_A) = \omega(G_A)$$

- α-Perfect property

  For each induced subgraph G_A of a graph G

  $$\alpha(G_A) = \kappa(G_A)$$

Perfect Graphs - Definition

Let G = (V, E) be an undirected graph:

(P$_1$) $\omega(G_A) = \chi(G_A)$ **for all $A \subseteq V$**

(P$_2$) $\alpha(G_A) = \kappa(G_A)$ **for all $A \subseteq V$**

For each induced subgraph G_A of a graph G !!!

G is called...

Perfect Graph

The Perfect Graph Theorem

- Lovasz (1972):

  For an undirected graph $G = (V, E)$, the following statements are equivalent:

  (P_1) $\omega(G_A) = \chi(G_A)$ **for all $A \subseteq V$**

  (P_2) $\alpha(G_A) = \kappa(G_A)$ **for all $A \subseteq V$**

  (P_3) $\omega(G_A)\alpha(G_A) \geq |A|$ **for all $A \subseteq V$**

The Strong Perfect Graph Conjecture

- Claude Berge (1960):

SPGC1: An undirected graph G is **Perfect** iff contains no induced subgraph isomorphic to C_{2k+1} or co-C_{2k+1} (for $k \geq 2$).

SPGC2: An undirected graph G is **Perfect** iff in G and in co-G every odd cycle of length $l \geq 5$ has a chord.

The Strong Perfect Graph Conjecture

- Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul Seymour, Robin Thomas (2002):

SPGT: G is Perfect iff it contains neither odd holes nor odd antiholes.

The **strong perfect graph theorem** is a forbidden graph characterization of the perfect graphs as being exactly the graphs that have neither odd holes (odd-length induced cycles) nor odd antiholes (complements of odd holes).

Classroom Project

Classes of Perfect Graphs