

# Θεωρία Γραφημάτων

Θεμελιώσεις-Αλγόριθμοι-Εφαρμογές

Ενότητα 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ  
ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ



# Σχετικά με το Μάθημα

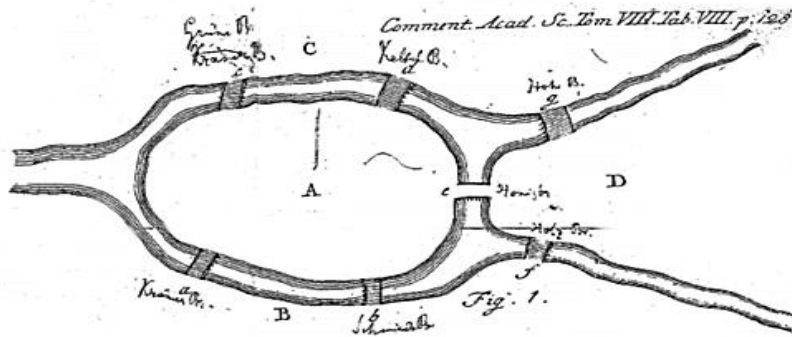
---

- Ώρες γραφείου: Δευτέρα – Παρασκευή (9:00–5:00)
- Ώρες επικοινωνίας: Οποιαδήποτε ώρα
- Ώρες Μαθήματος:
  - Δευτέρα 3:00-6:00 (Αίθουσα I2)
  - Τρίτη 3:00-4:00 (Αίθουσα I2)
- Email - Δικτυακός Τόπος: [stavros@cs.uoi.gr](mailto:stavros@cs.uoi.gr)  
<http://cs.uoi.gr/~stavros>

Τρόπος Εξέτασης: Περίοδος Φεβρουαρίου

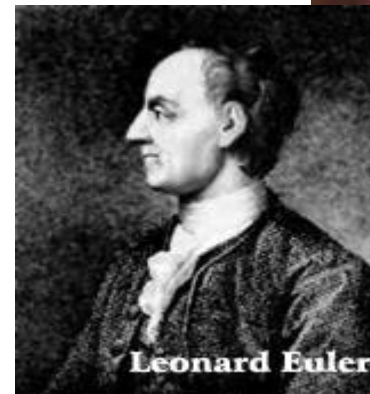
# Ιστορικά

- 1736 Euler, γέφυρες Koenigsburg



Leonhard Euler (1707-1783)

- Μεγάλος μαθηματικός
- 73 τόμοι δημοσιεύσεων





# Ιστορικά

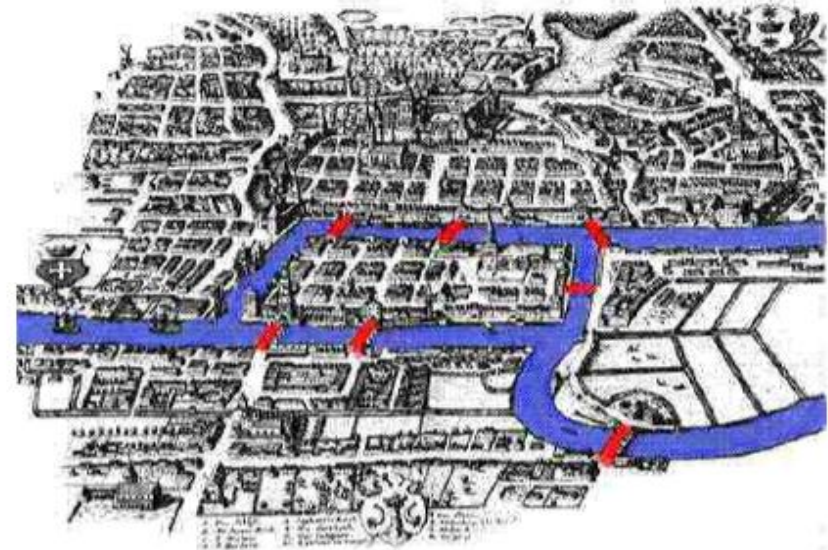
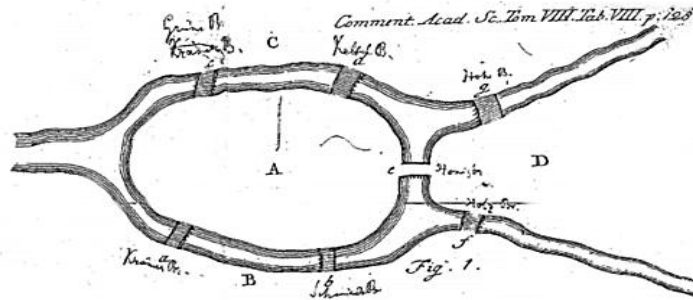
---

- 1736 Euler, γέφυρες Koenigsburg
- 1847 Kirchoff, δένδρα, ηλεκτρικά δίκτυα
- 1847 Cayley, δένδρα, ισομερή  
υδρογονανθράκων  $C_nH_{2n+2}$
- 1850 Cayley - De Morgan - Moebius,  
χρωματισμός με 4 χρώματα
- 1859 Hamilton, δωδεκάεδρο
- 1936 Το πρώτο βιβλίο

# Ιστορικά - Γέφυρες Königsberg

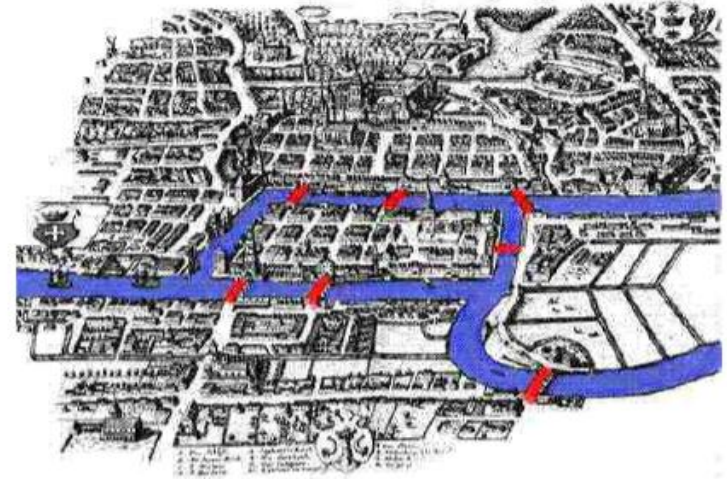
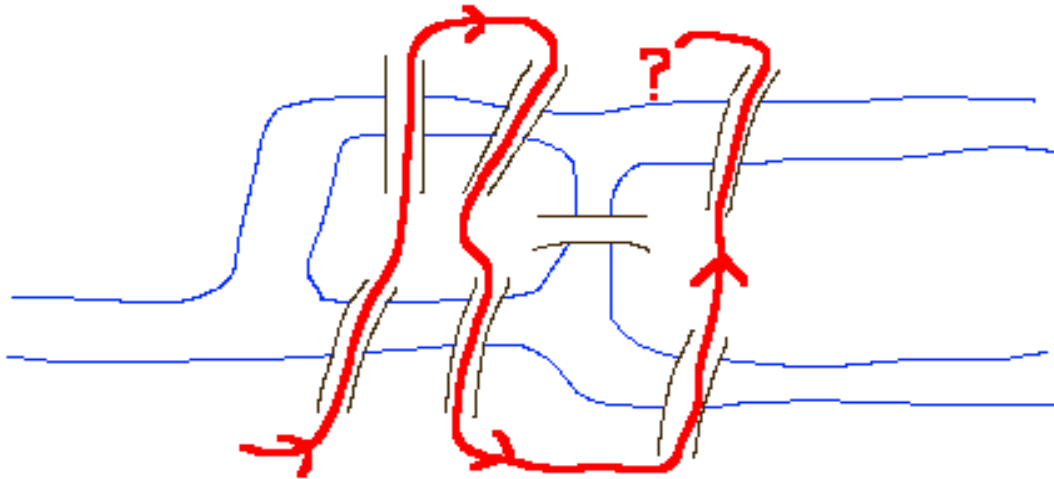
- 1736 Euler, γέφυρες Koenigsburg

Σημερινό Ρωσικό Kaliningrad (στη Βαλτική μεταξύ Λιθουανίας και Πολωνίας)

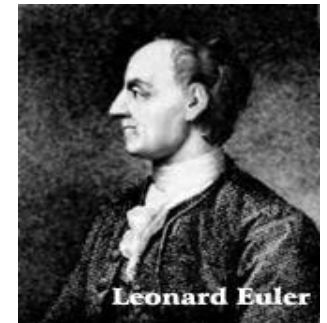


Χάρτης των επτά γεφυρών του Königsberg (χρονολογείται τον 17ο αιώνα)

# Ιστορικά - Γέφυρες Königsberg

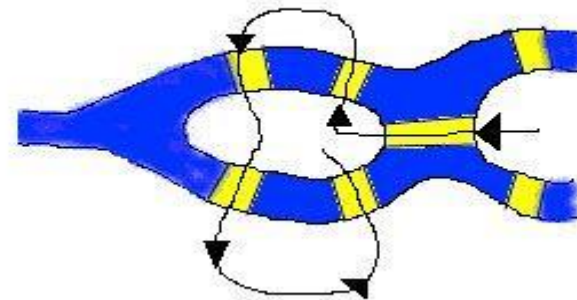
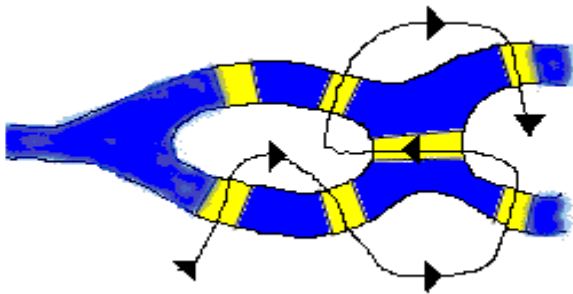
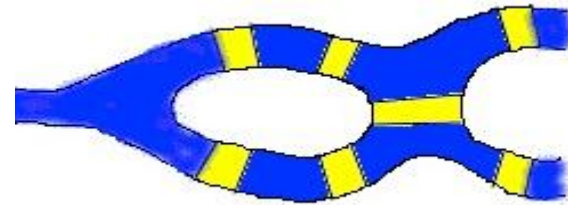
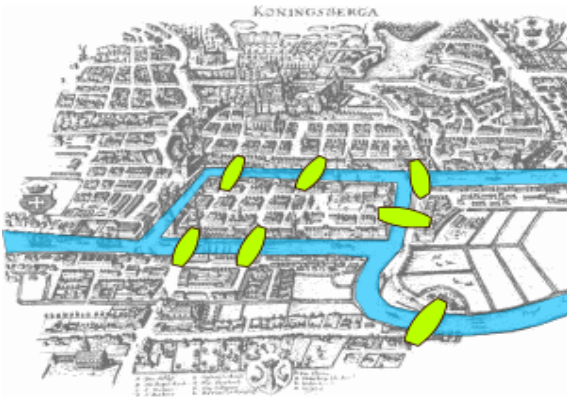


Μπορούμε να ξεκινήσουμε από ένα σημείο A και να επιστρέψουμε στο A, έχοντας περάσει από κάθε γέφυρα μία και μόνο-μία φορά?

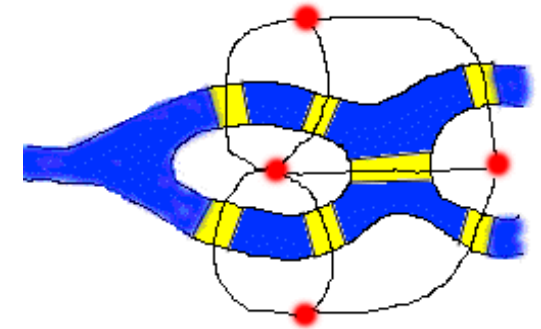
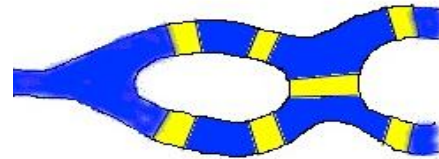
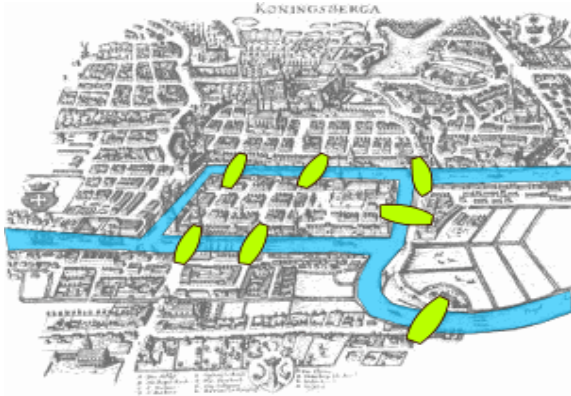


# Ιστορικά - Γέφυρες Königsberg

7 Γέφυρες

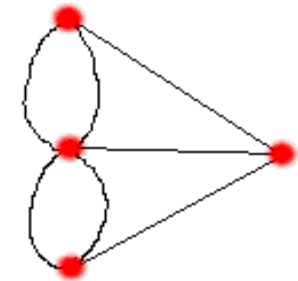
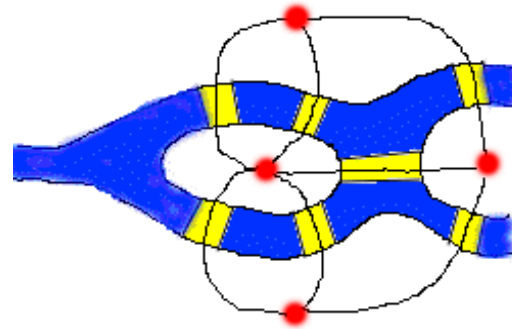
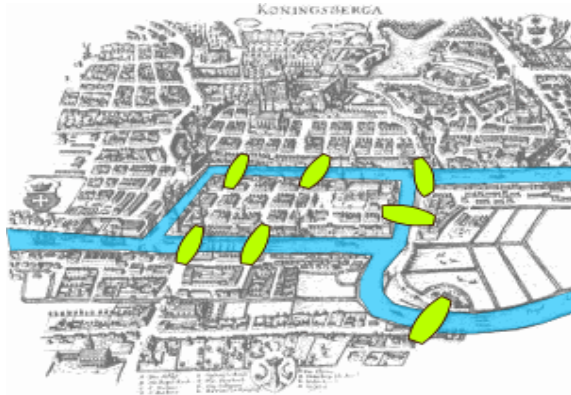


# Μοντελοποίηση Προβλήματος



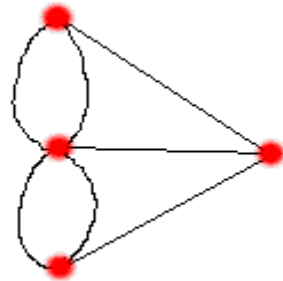


# Μοντελοποίηση Προβλήματος



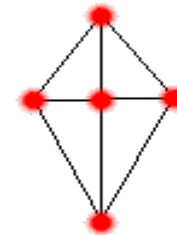
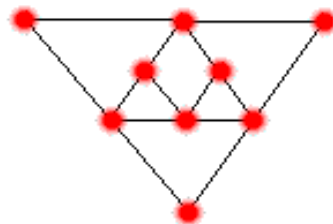
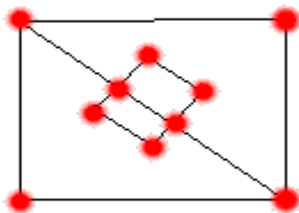
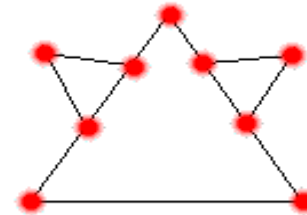
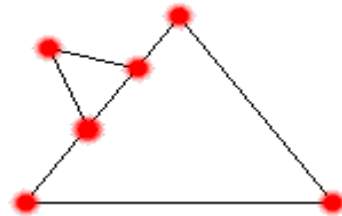
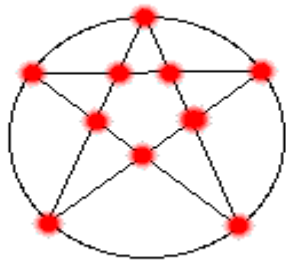
Παρατήρηση !!!

Το γράφημα

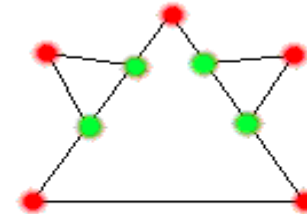
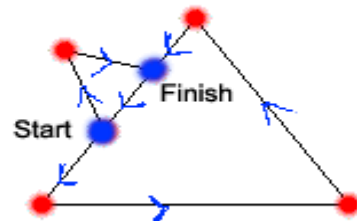
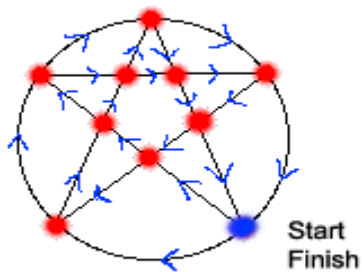


έχει τρεις (3) κόμβους περιττού βαθμού !!!

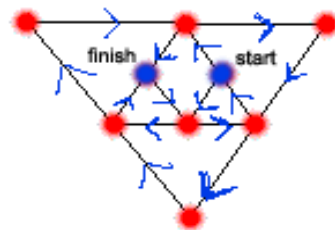
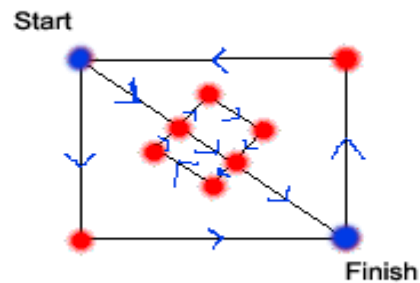
# Γραφήματα Euler



# Γραφήματα Euler

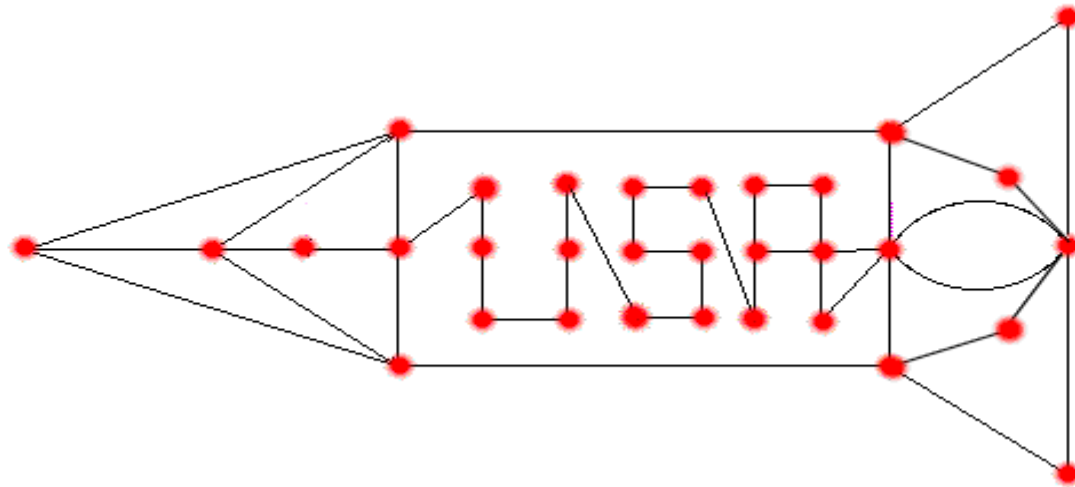


This network has four odd vertices.  
Therefore there is no Euler path.



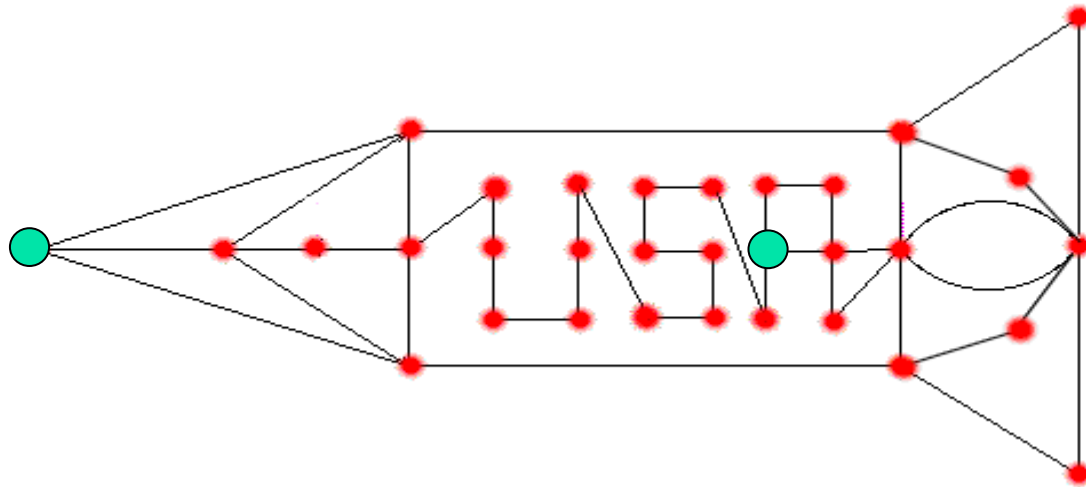
# Γραφήματα Euler

Χωρίς να το υπολογίσεις, βρες αν το παρακάτω γράφημα έχει διαδρομή Euler



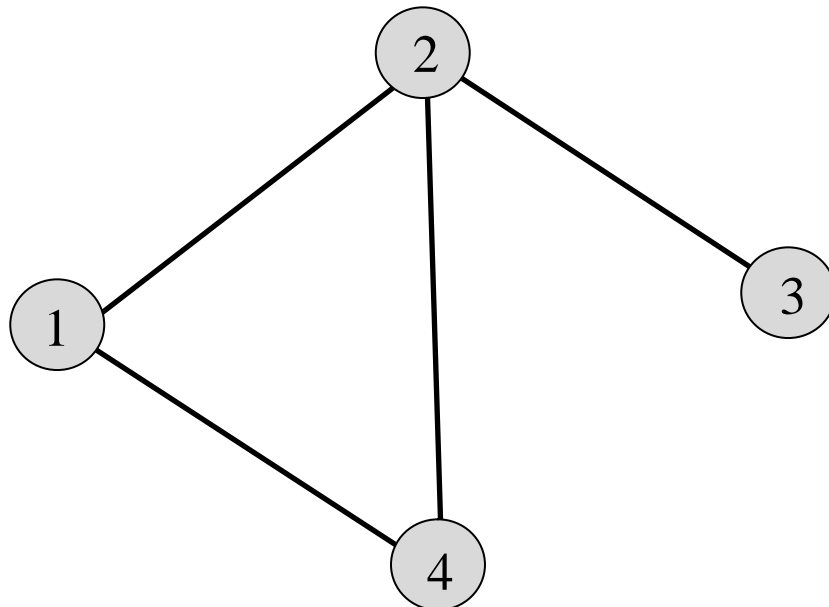
# Γραφήματα Euler

Γράφημα έχει μόνο δύο (2) κόμβους περιττού βαθμού, επομένως...  
ΝΑΙ έχει διαδρομή Euler



2 κόμβοι περιττού βαθμού

# Μη κατευθυνόμενα Γραφήματα

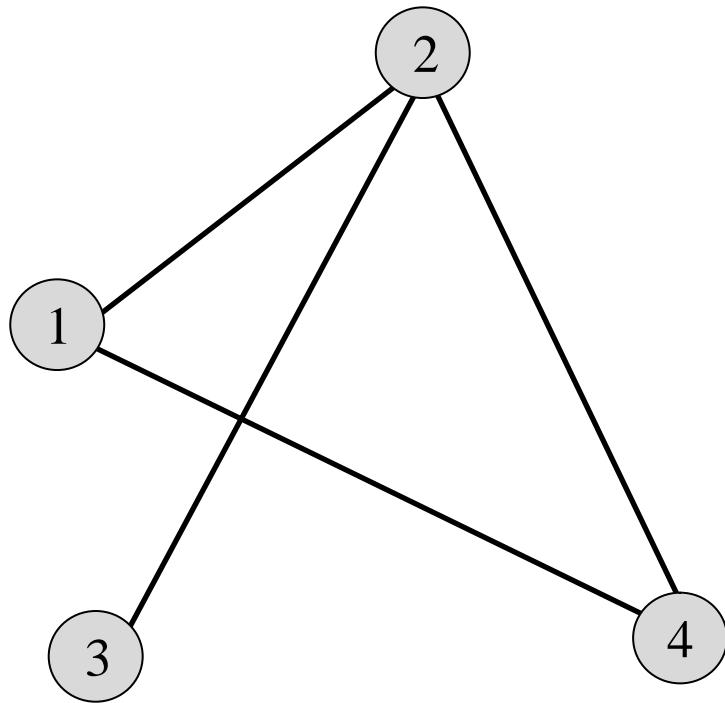


$$G = (V, E)$$

$$V = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$E = \{(1,2), (1,4), (2,3), (2,4)\}$$

# Μη κατευθυνόμενα Γραφήματα

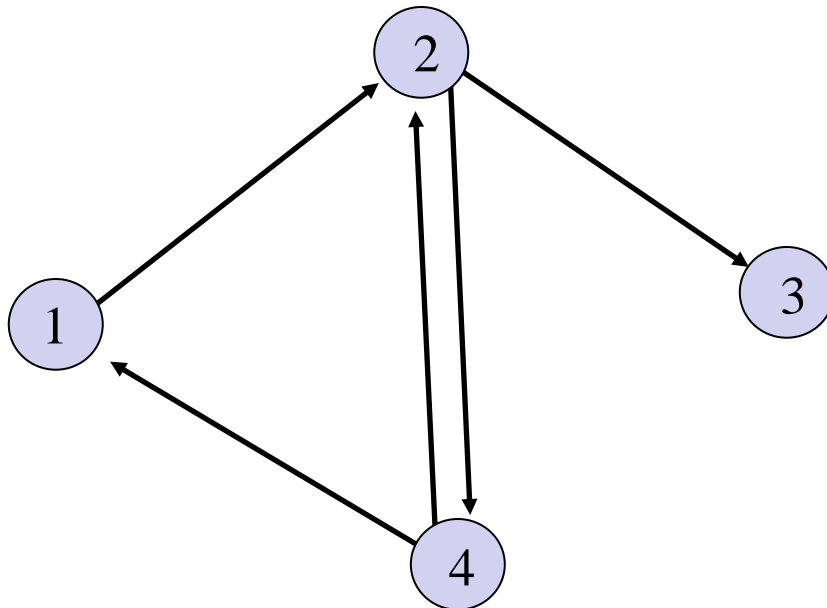


$$G = (V, E)$$

$$V = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$E = \{(1,2), (1,4), (2,3), (2,4)\}$$

# Κατευθυνόμενα Γραφήματα



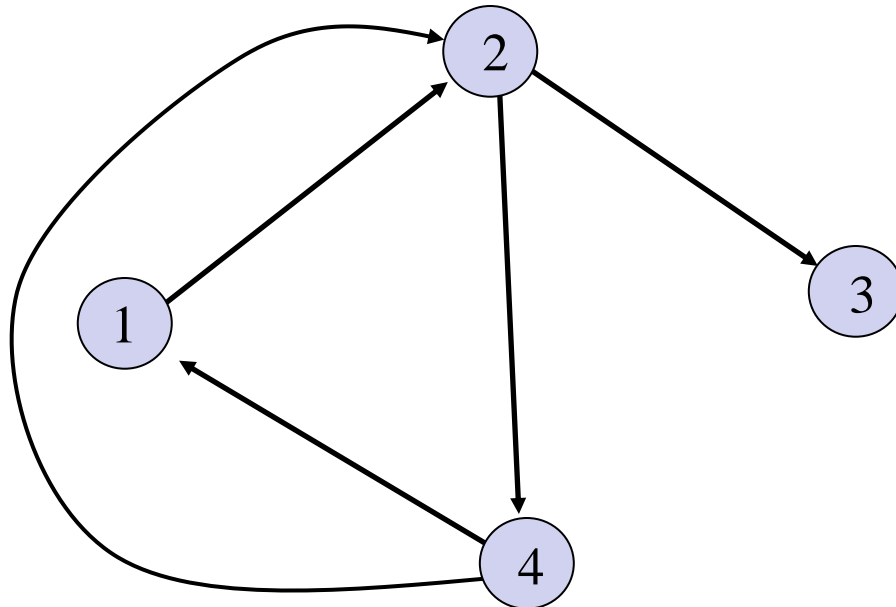
$$G = (V, E)$$

$$V = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$E = \{(1,2), (2,3), (2,4), (4,1), (4,2)\}$$



# Κατευθυνόμενα Γραφήματα

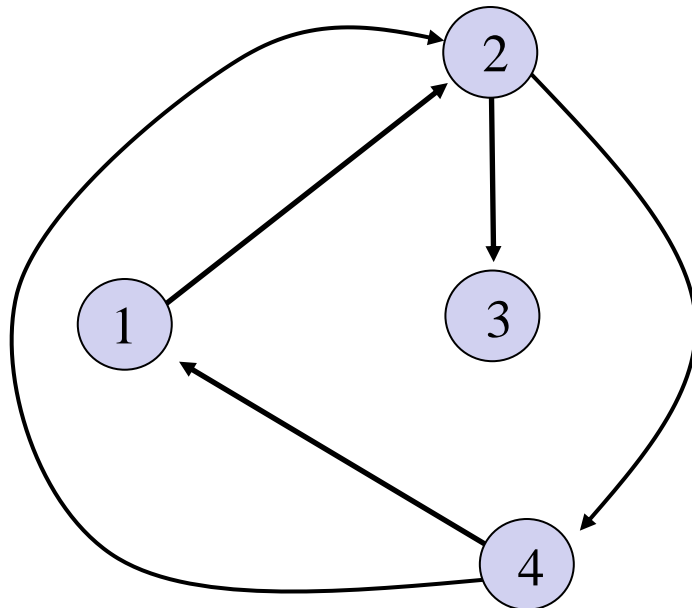


$G = (V, E)$

$$V = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$E = \{(1,2), (2,3), (2,4), (4,1), (4,2)\}$$

# Κατευθυνόμενα Γραφήματα

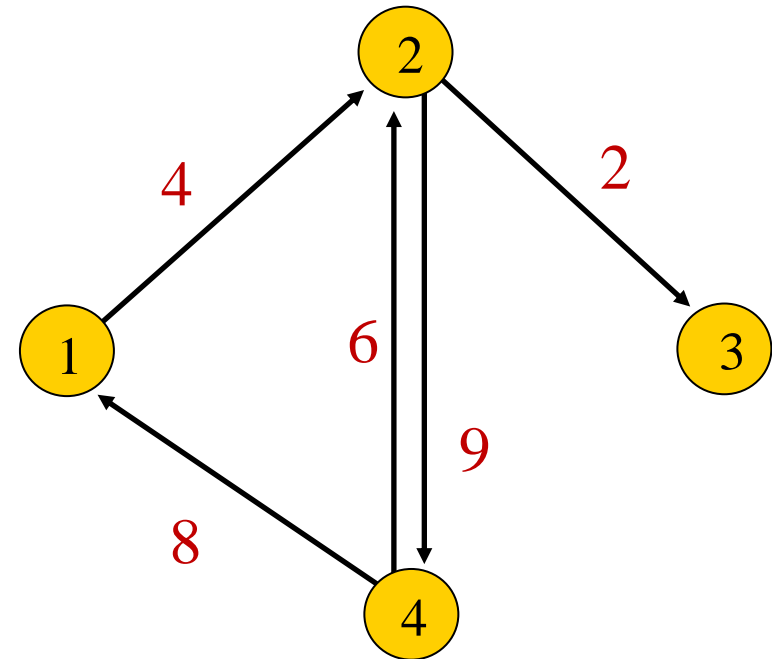
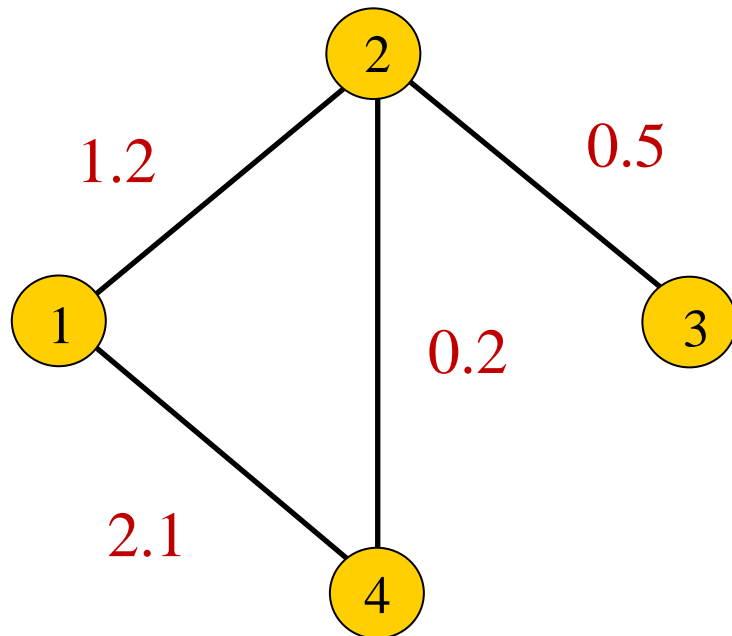


$$G = (V, E)$$

$$V = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$E = \{(1,2), (2,3), (2,4), (4,1), (4,2)\}$$

# Έμβαρα Γραφήματα (weighted)





# Γραφήματα Τομής

Έστω μια οικογένεια  $F$  μη-κενών συνόλων  $S_1, S_2, \dots, S_n$

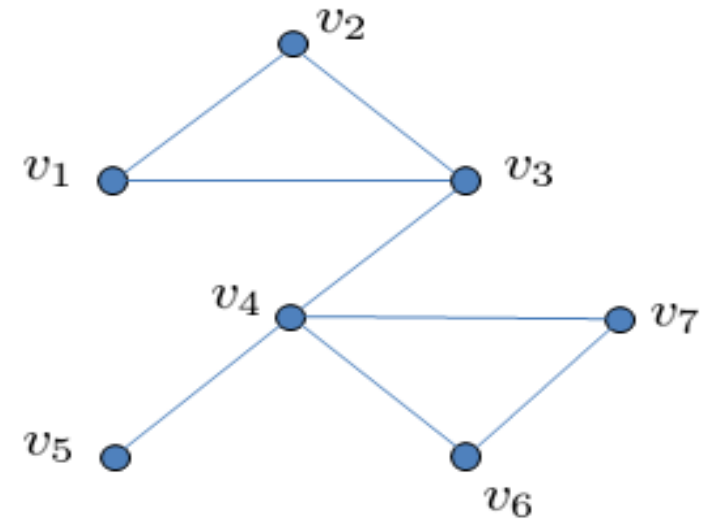
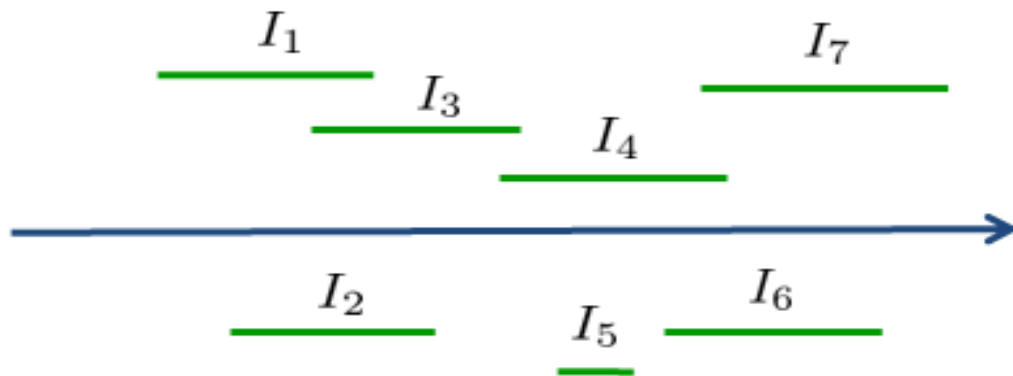
Το γράφημα τομής  $V$  της οικογένειας  $F$  (intersection graph) είναι ένα γράφημα τάξης  $n$  με σύνολο κόμβων  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , και σύνολο ακμών  $E(G)$ , το οποίο δημιουργείται:

αντιστοιχώντας κάθε κόμβο του  $G$  σε ένα σύνολο της οικογένειας και ενώνοντας δύο κόμβους και με ακμή εάν και μόνο εάν η τομή των αντίστοιχων συνόλων και είναι μη-κενή, δηλαδή,

$$(v_i, v_j) \in E(G) \Leftrightarrow S_i \cap S_j \neq \emptyset$$

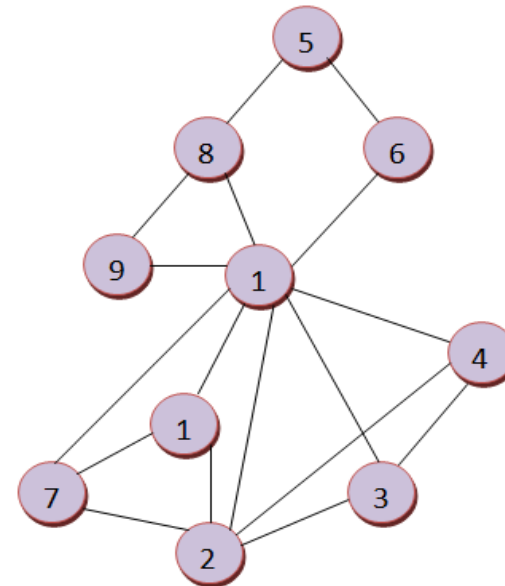
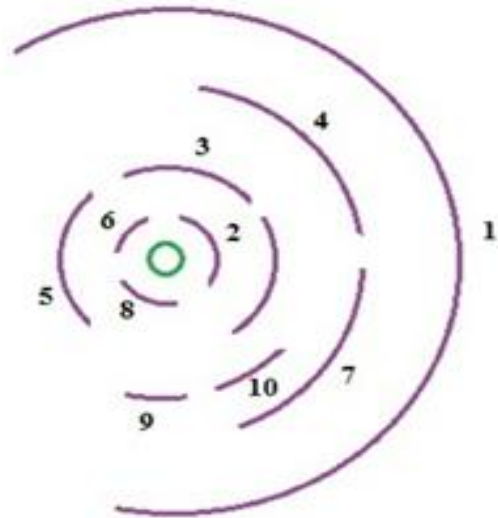
# Γραφήματα Τομής

## Γραφήματα διαστημάτων



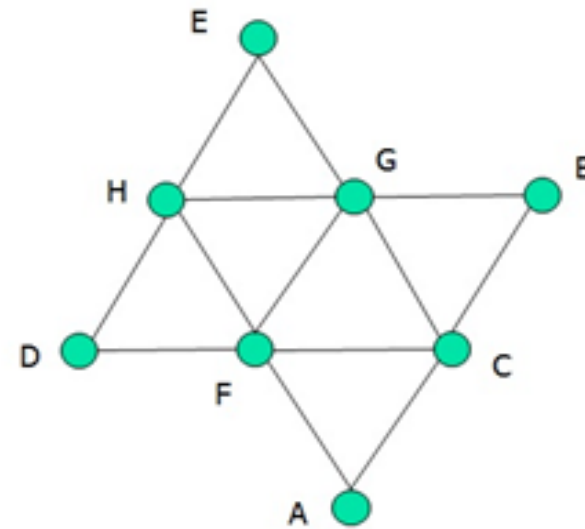
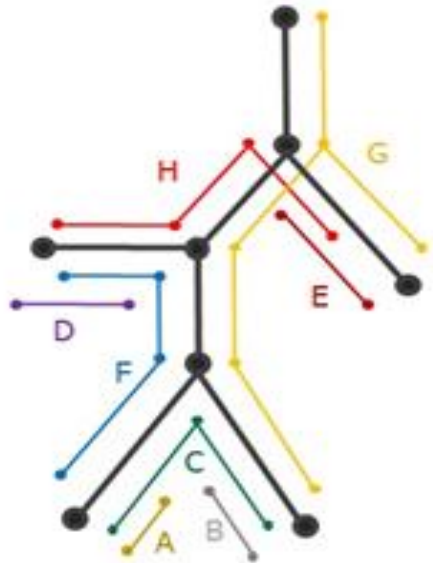
# Γραφήματα Τομής

## Γραφήματα κυκλικών-τόξων



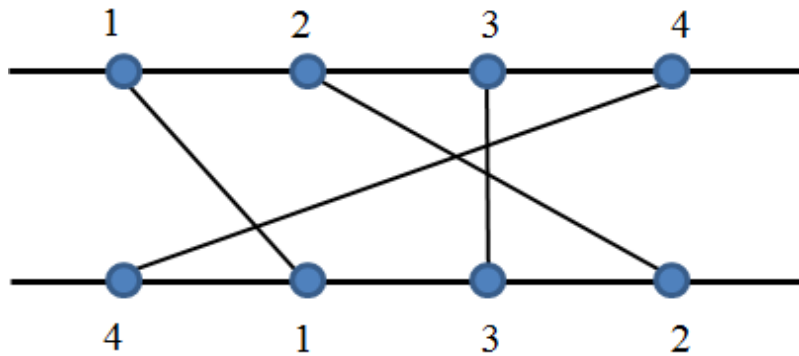
# Γραφήματα Τομής

## Τριγωνικά γραφήματα

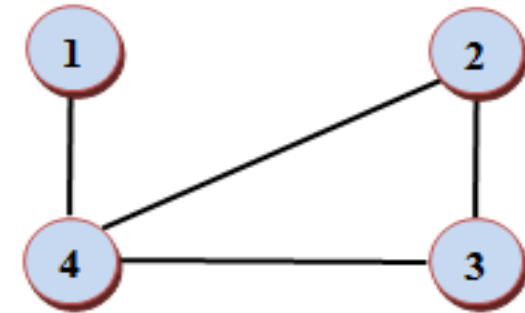


# Γραφήματα Τομής

$$\pi = (4, 1, 3, 2)$$



## Μεταθετικά γραφήματα

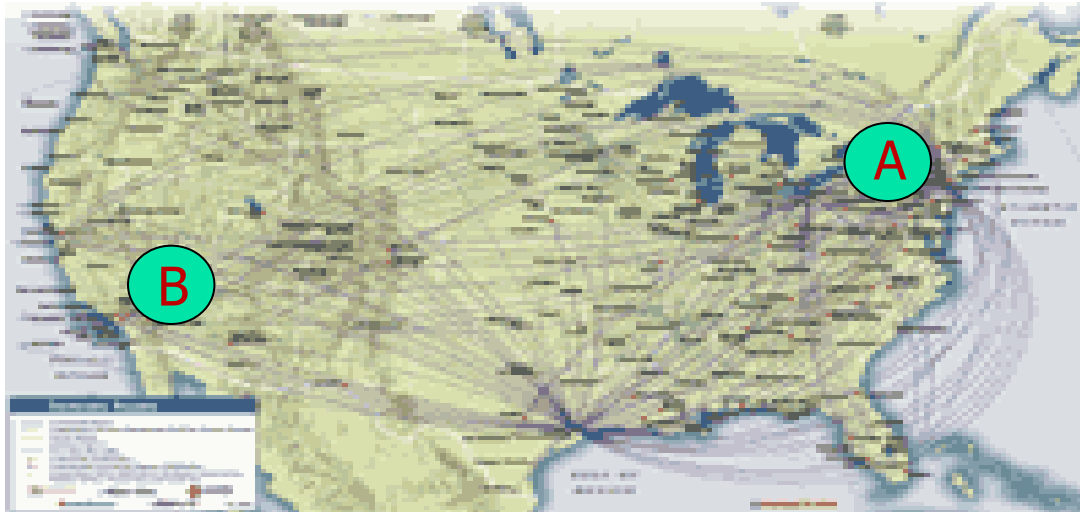




# Εφαρμογές - Θεωρία Γραφημάτων

## Συνδεσιμότητα

1

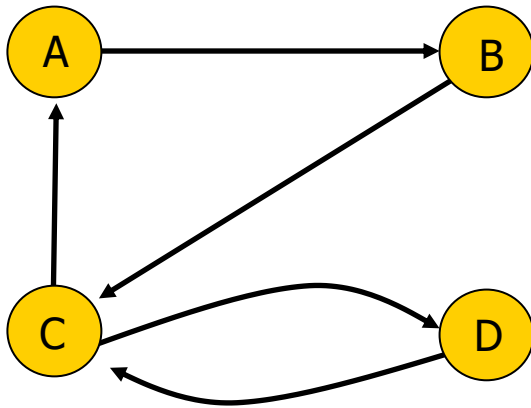


- Μπορώ να πετάξω από την πόλη A στην πόλη B με την εταιρεία X;
- Υπάρχει μονοπάτι από την πόλη A στην πόλη B στο δίκτυο της;

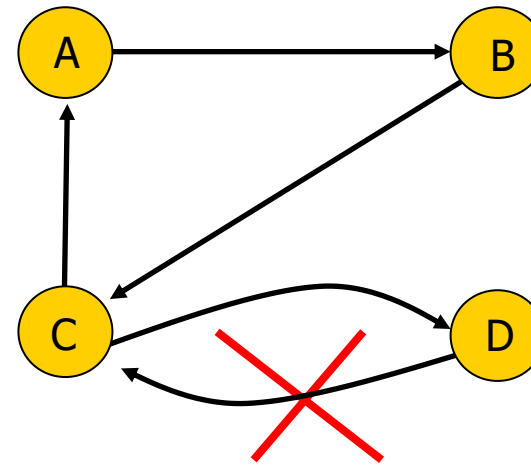
# Εφαρμογές - Θεωρία Γραφημάτων

## Λειτουργία δικτύων

2



Μπορώ να πάω από κάθε κόμβο  
σε κάθε άλλον;

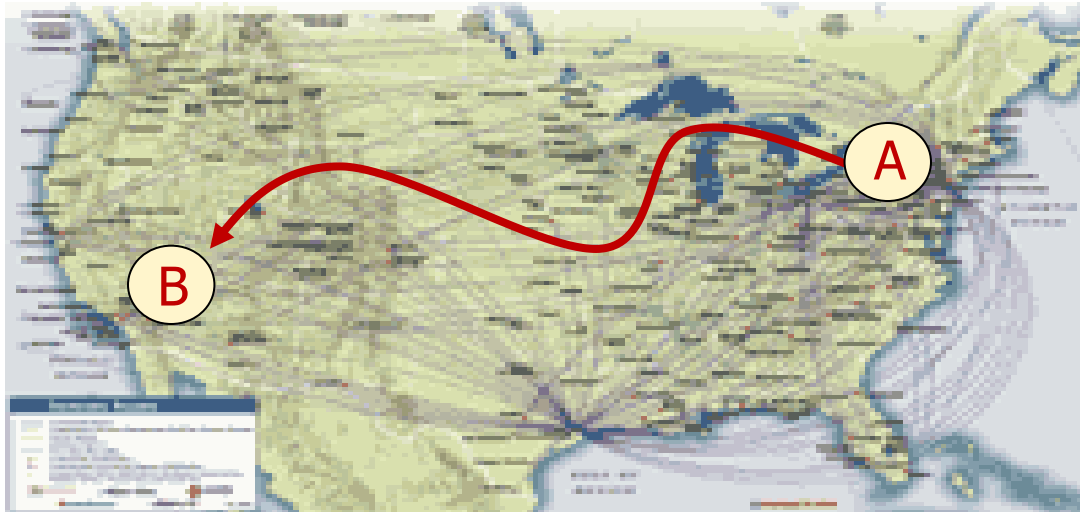


Βλάβη

# Εφαρμογές - Θεωρία Γραφημάτων

## Συντομότερη διαδρομή

3



- Ποια είναι η συντομότερη διαδρομή από την πόλη A στην πόλη B με την εταιρεία;
- Ποιο μονοπάτι από την πόλη A στην πόλη B έχει το μικρότερο βάρος;

# Εφαρμογές - Θεωρία Γραφημάτων

4

## GPS - Navigation

Εύρεση Ελαχίστων  
Διαδρομών ...

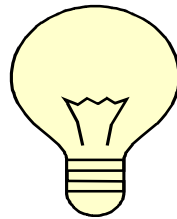


# Εφαρμογές - Θεωρία Γραφημάτων

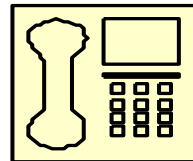
## Επιπεδικότητα

Σύνδεσε όλα τα σπίτια με τις  
παροχές χωρίς να  
διασταυρωθούν οι συνδέσεις

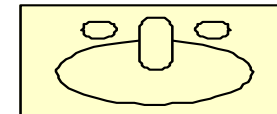
5



ΔΕΗ



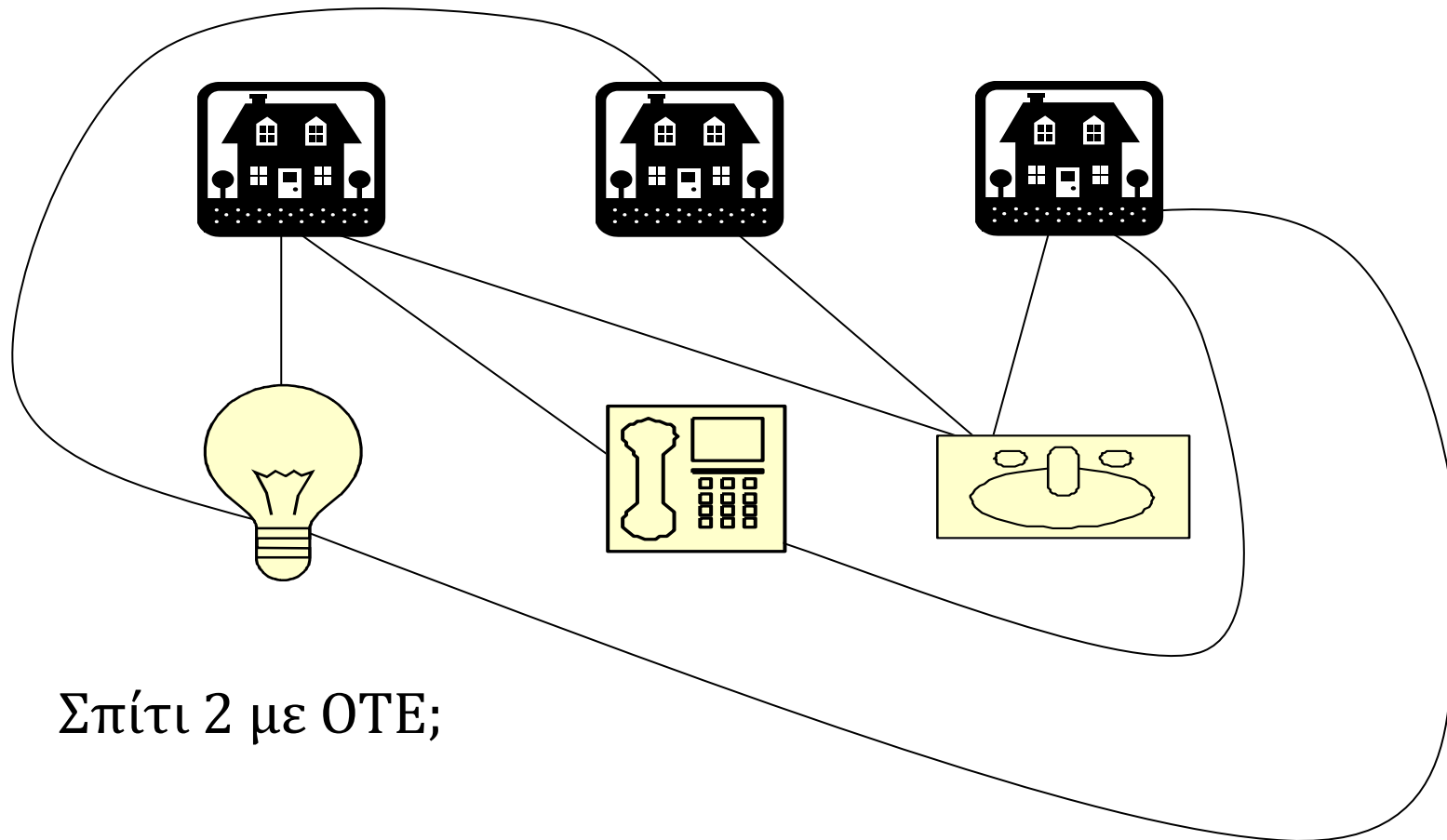
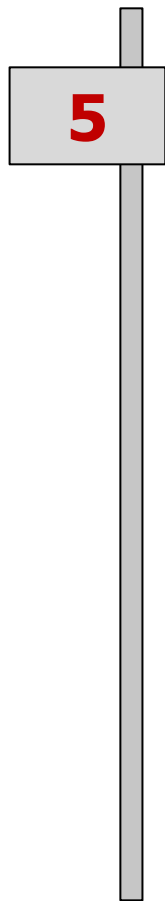
ΟΤΕ



ΔΕΥΑΙ

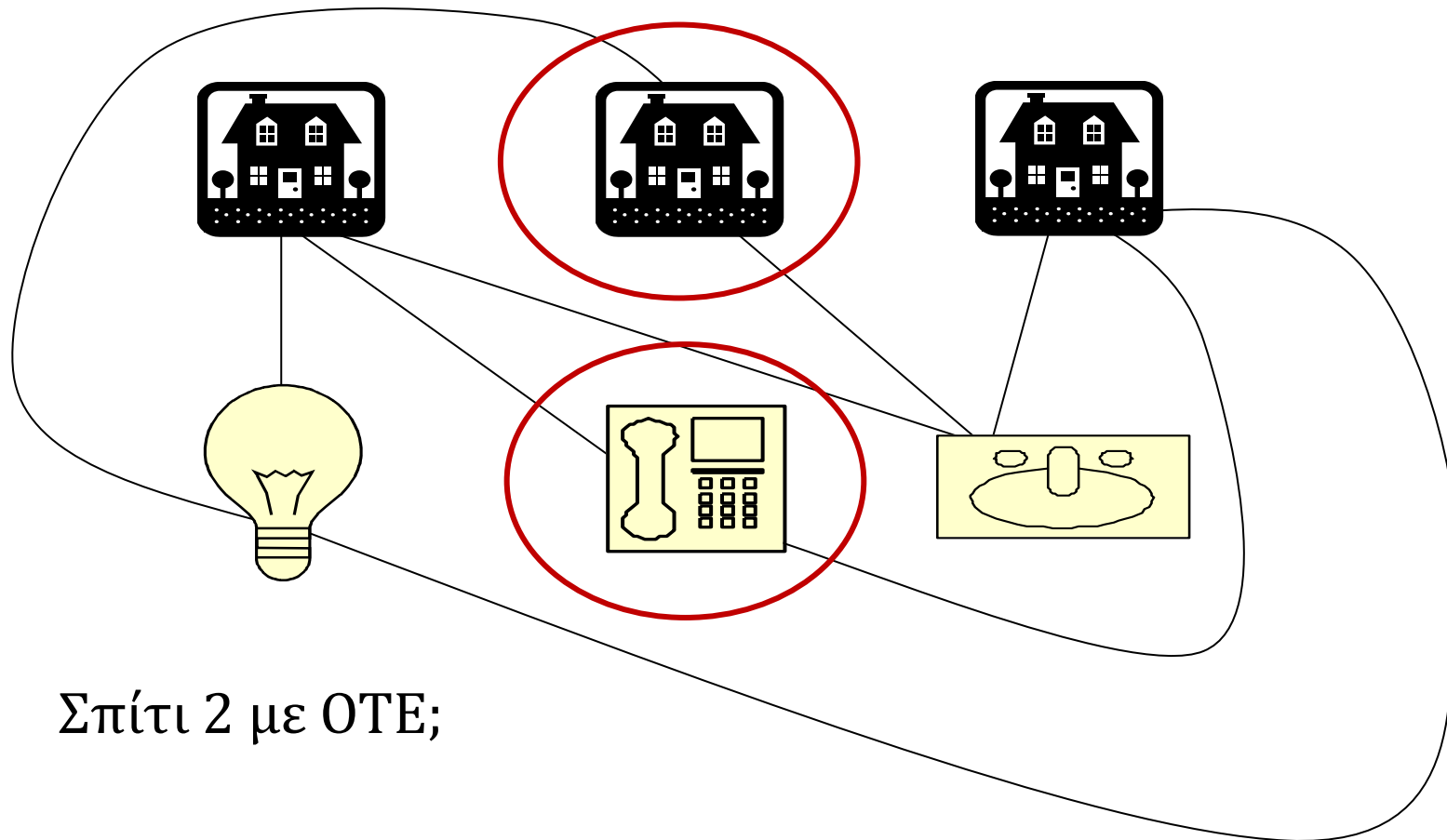
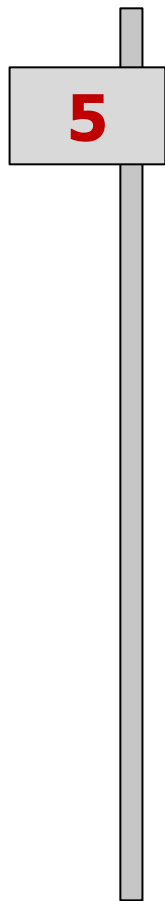
# Εφαρμογές - Θεωρία Γραφημάτων

## Επιπεδικότητα



# Εφαρμογές - Θεωρία Γραφημάτων

## Επιπεδικότητα

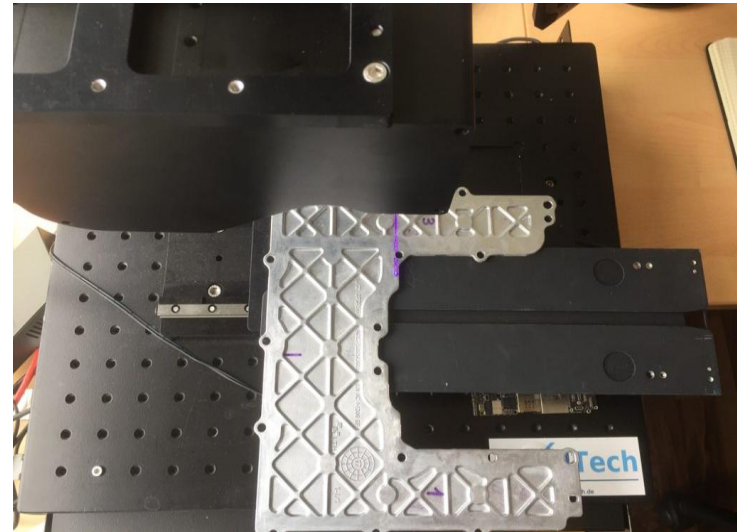
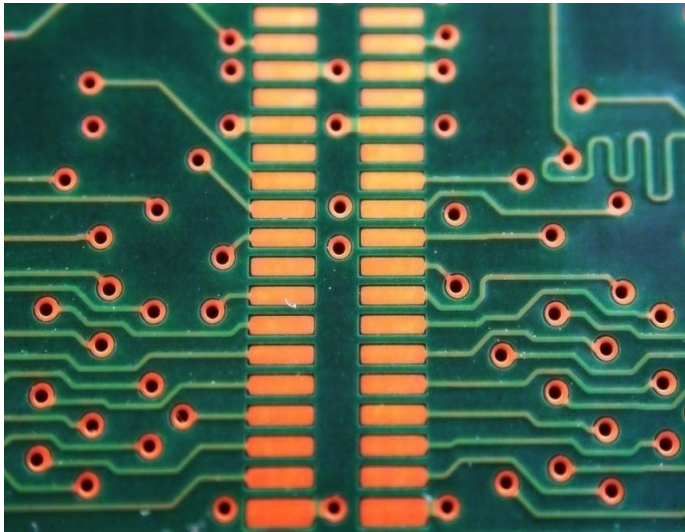


# Εφαρμογές - Θεωρία Γραφημάτων

5

## Επιπεδικότητα

- Μπορεί ένα γράφημα να σχεδιασθεί ώστε να μην υπάρχουν τεμνόμενες ακμές;





# Εφαρμογές - Θεωρία Γραφημάτων

## Ελάχιστα Γενετικά Δένδρα

6

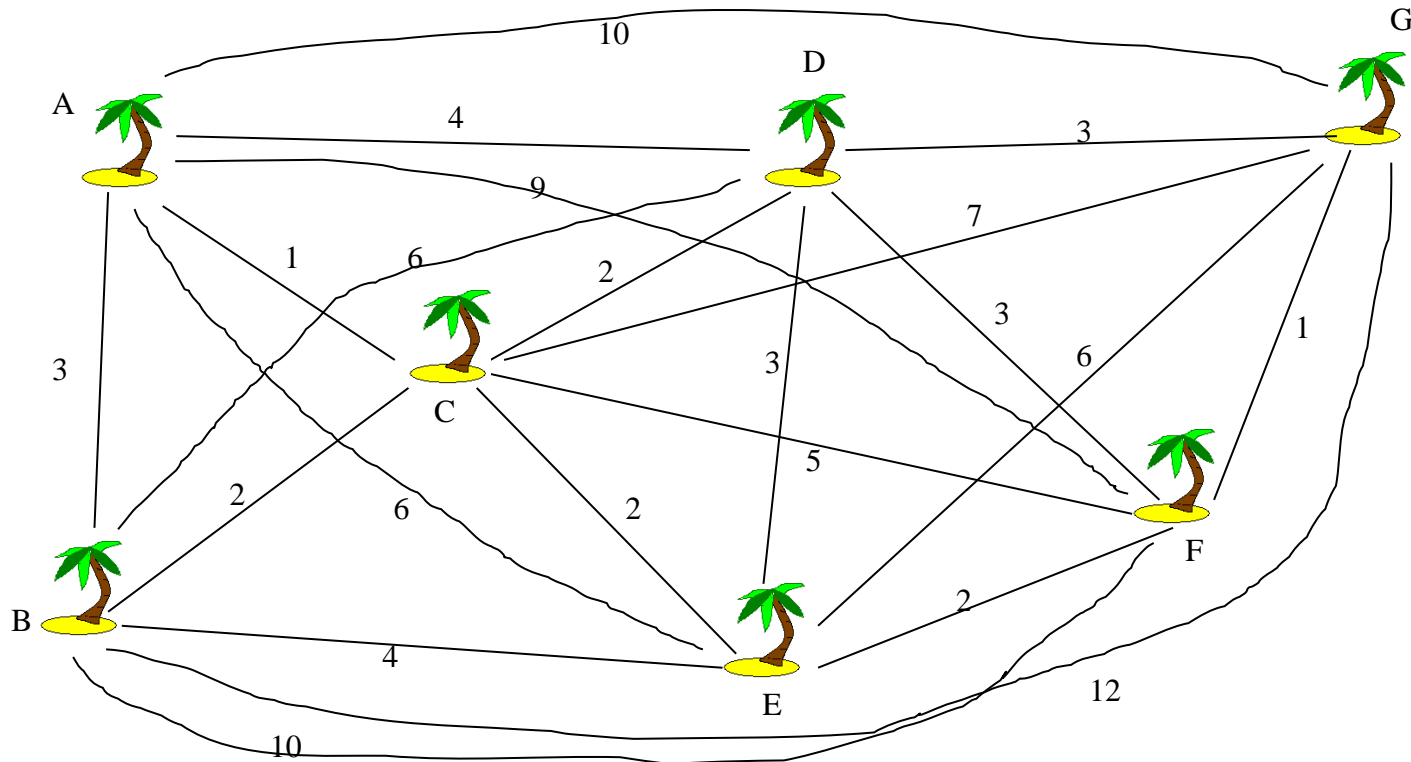


Ποιο δίκτυο διαδρομών είναι το ασφαλέστερο;  
(κίνδυνος από μεγάλες διαδρομές στη θάλασσα)

# Εφαρμογές - Θεωρία Γραφημάτων

## Ελάχιστα Γενετικά Δένδρα

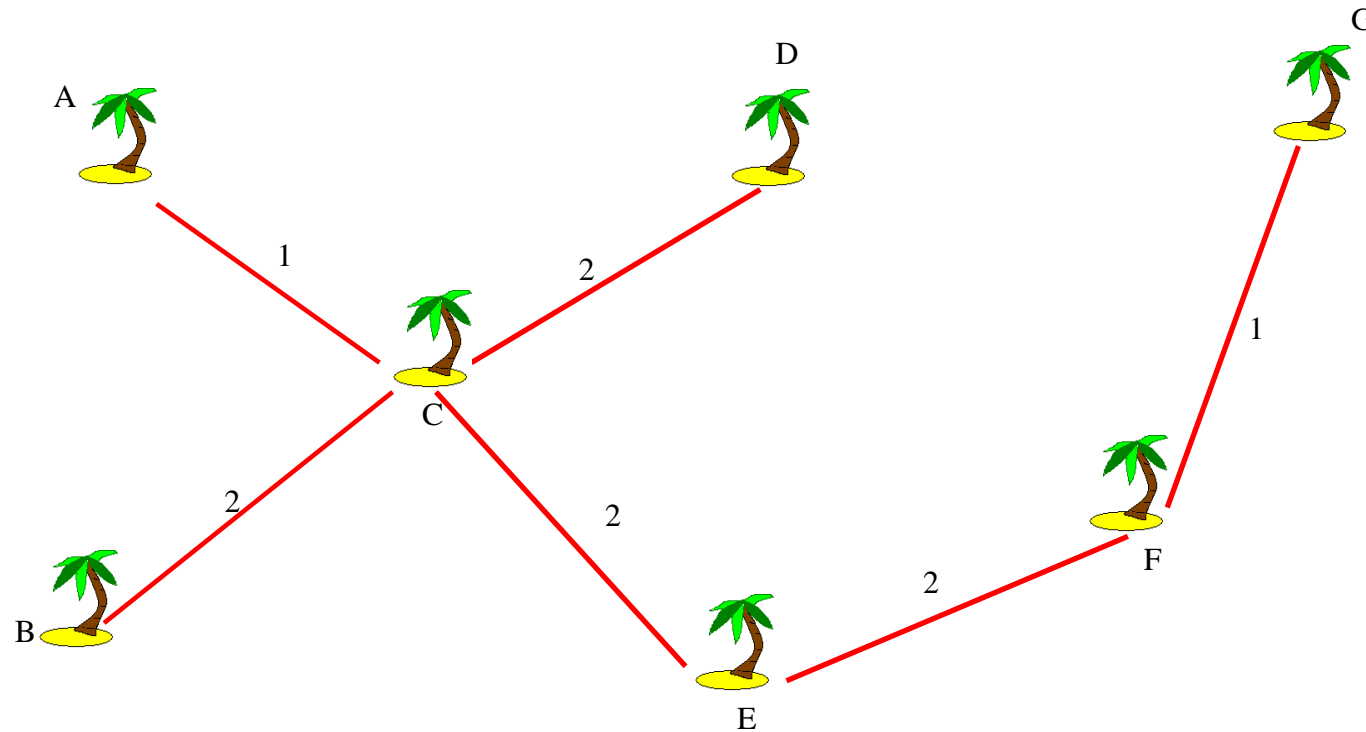
6



# Εφαρμογές - Θεωρία Γραφημάτων

## Ελάχιστα Γενετικά Δένδρα

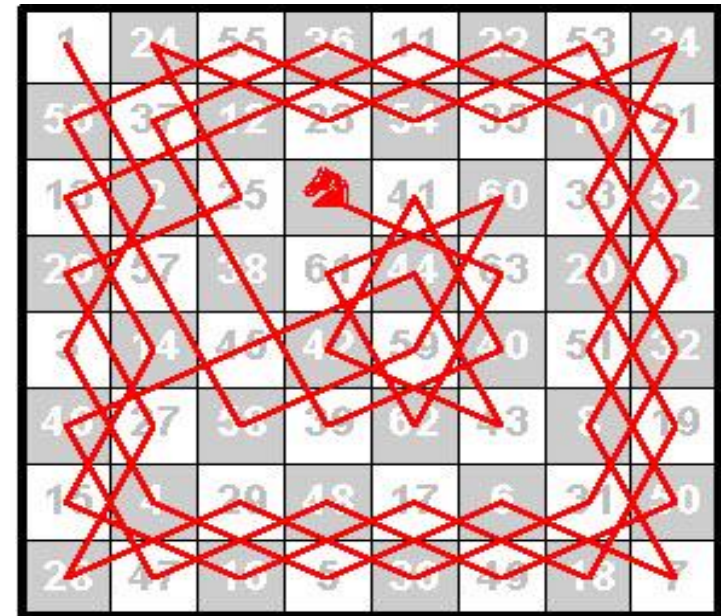
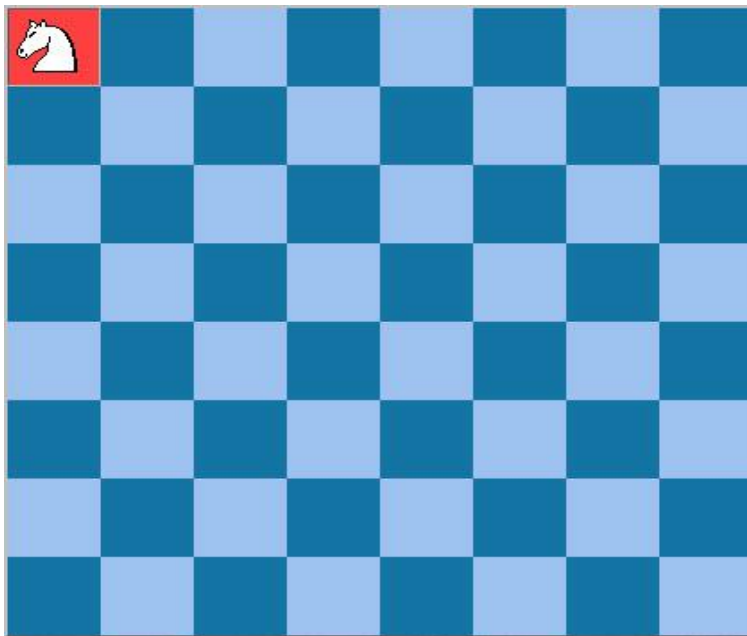
6



# Εφαρμογές - Θεωρία Γραφημάτων

## Περίπατος του Ιππότη/Αλόγου (διαδρομή Hamilton)

7



# Εφαρμογές - Θεωρία Γραφημάτων

## Χάρτες (χρωματισμός)

8

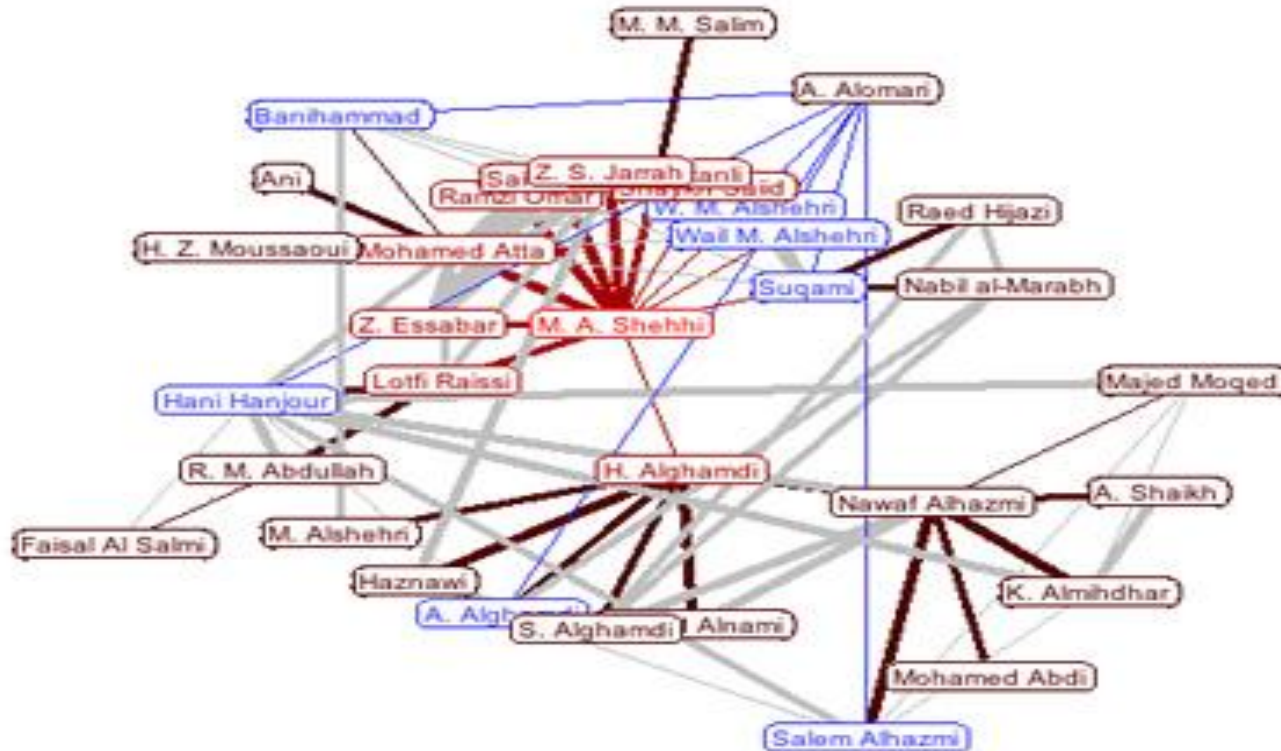
- Πως μπορώ να χρωματίσω κάθε χώρα (νομό) ώστε γειτονικοί νομοί να μην έχουν ίδιο χρώμα;
- Πόσα χρώματα χρειάζονται στο ελάχιστο;



# Εφαρμογές - Θεωρία Γραφημάτων

## Κοινωνικά δίκτυα (small-world Phenomena)

9





# Εφαρμογές - Θεωρία Γραφημάτων

10

Έστω ότι έχουμε  $C_1, C_2, \dots, C_n$  φάρμακα, και έστω  $[x_i, x_i']$  είναι η θερμοκρασία συντήρησης του φαρμάκου  $C_i, 1 \leq i \leq n$ ;

Θέλουμε η θερμοκρασία  $T$  του ψυγείου για την συντήρηση  $\max$  πλήθος φαρμάκων


Έστω ότι στο πλανήτη  $\Gamma$  έχουν εμφανιστεί έως σήμερα  $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$  πολιτισμοί, και έστω  $[t_i, t_i']$  είναι η χρονική περίοδος εμφάνισης του πολιτισμού  $\Pi_i, 1 \leq i \leq n$ ;

Θέλουμε το έτος  $X$  στο οποίο εμφανίστηκε  $\max$  πλήθος πολιτισμών πάνω στη  $\Gamma$



# Αλγόριθμοι Θεωρίας Γραφημάτων

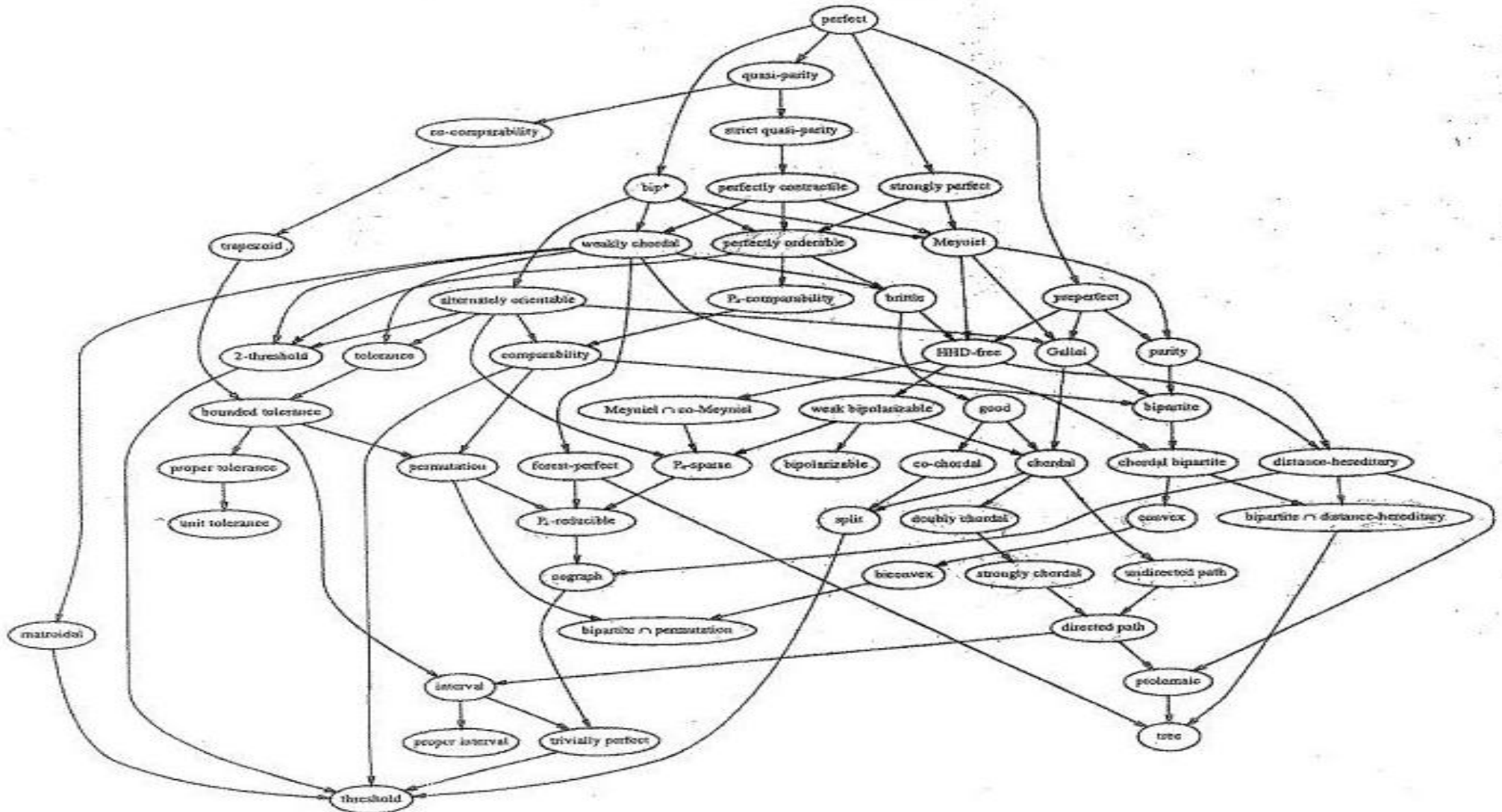
---

- Πολυωνυμικοί Αλγόριθμοι... (Γραμμικοί)
  - Προβλήματα: NP-Πλήρη
  - Επιλογές 
    - Προσέγγιση Λύσης
    - Περιορισμοί Ιδιοτήτων
- 

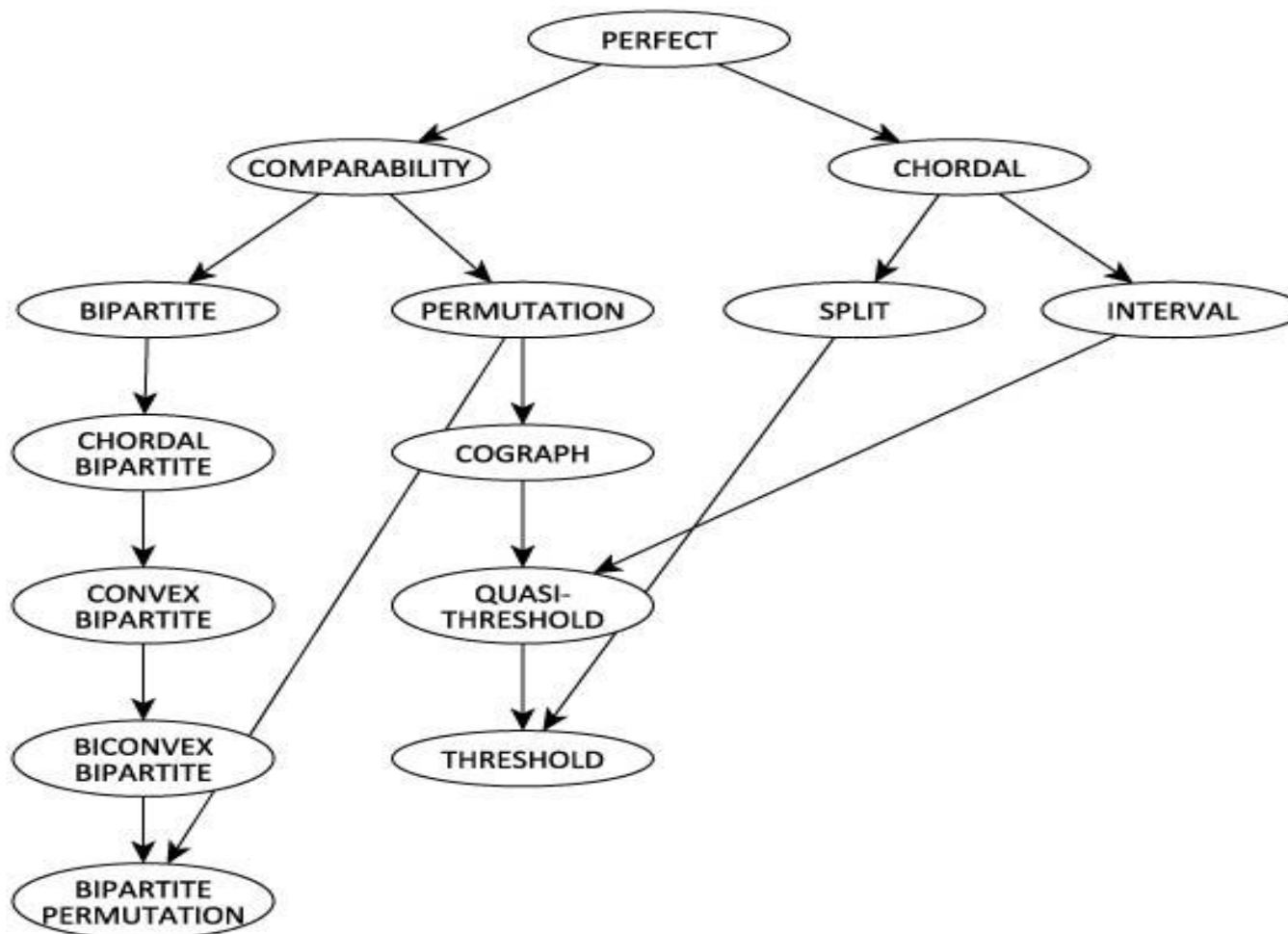
Τέλεια Γραφήματα, ...



# Κλάσεις Τέλεια Γραφημάτων



# Κλάσεις Τέλειων Γραφημάτων





# Αλγόριθμοι και Γραφήματα

---

- Αλγοριθμική θεωρία γραφημάτων
- Πολυπλοκότητα χώρου και χρόνου
- Συμβολισμός  $O$
- Ανάλυση μέσης και χειρότερης περίπτωσης



# Αλγόριθμοι και Γραφήματα

## Αλγοριθμική θεωρία γραφημάτων

- Πολυπλοκότητα χώρου και χρόνου
- Συμβολισμός  $O$
- Ανάλυση μέσης και χειρότερης περίπτωσης

# Αλγοριθμική Θεωρία Γραφημάτων

Βασικοί Αλγόριθμοι Γραφημάτων

Πολυπλοκότητα χώρου και χρόνου

Τέλεια Γραφήματα

● *Κλάσεις*

● *Ιδιότητες*

● *Προβλήματα*

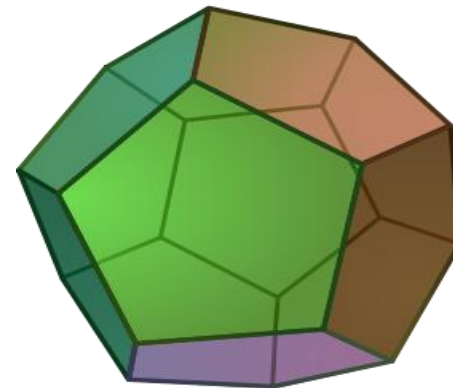
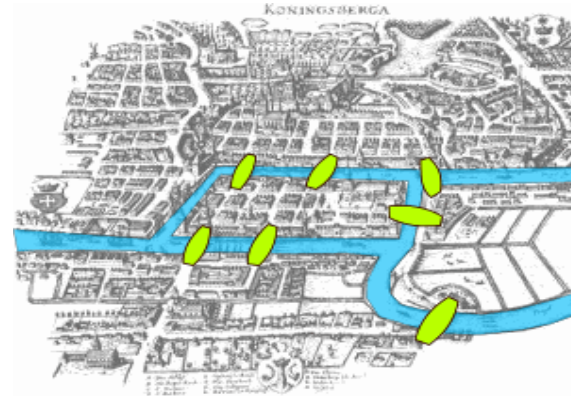
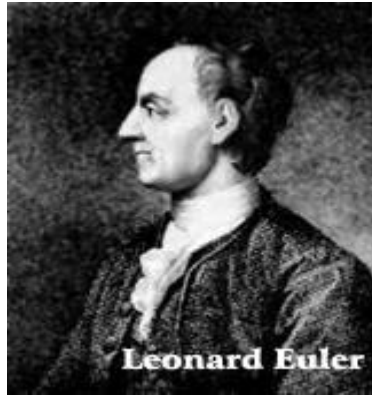
Τεχνικές Διάσπασης (modularity)

Αλγόριθμοι Προβλημάτων

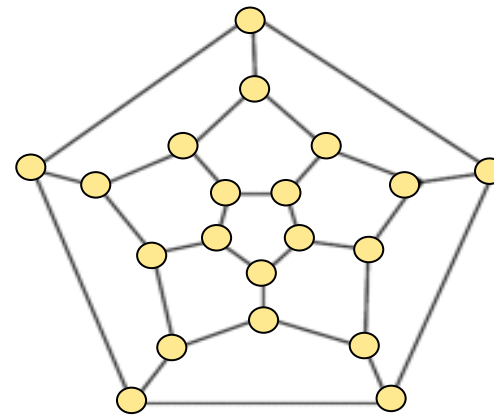
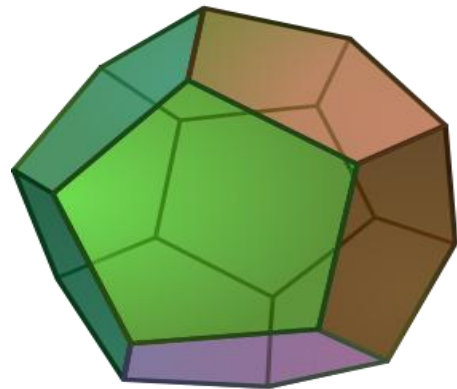
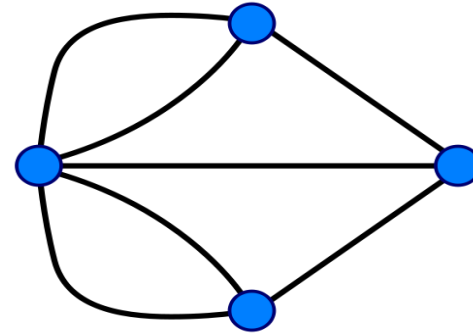
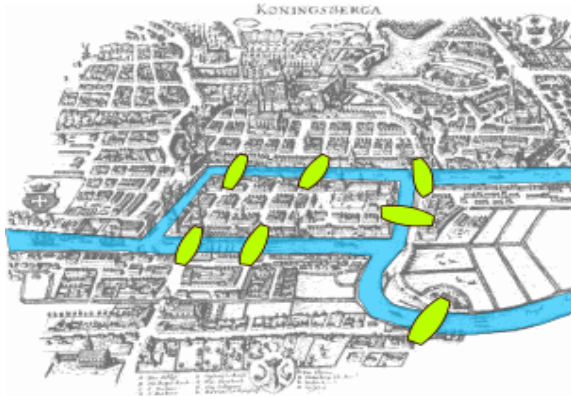
- Coloring
- Max Clique
- Max Stable Set
- Clique Cover
- Matching
- Hamiltonian Path
- Hamiltonian Cycle
- ...

- Triangulated
- Comparability
- Interval
- Permutation
- Split
- Cographs
- Threshold graphs
- QT graphs
- ...

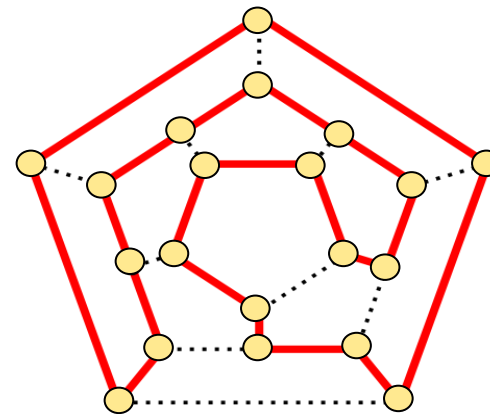
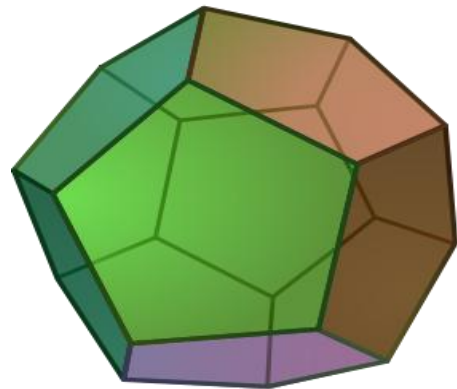
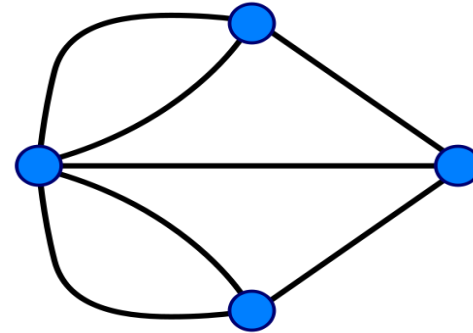
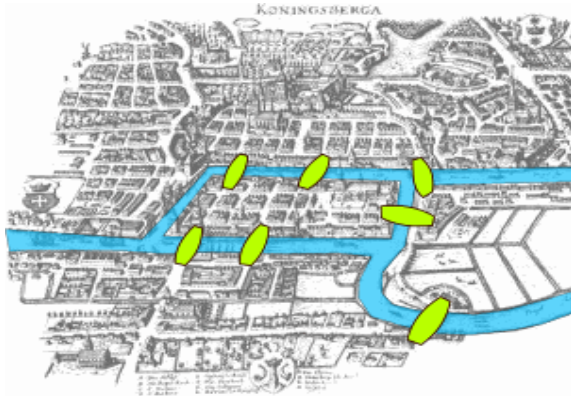
# Μοντελοποίηση



# Πρόβλημα - Γράφημα

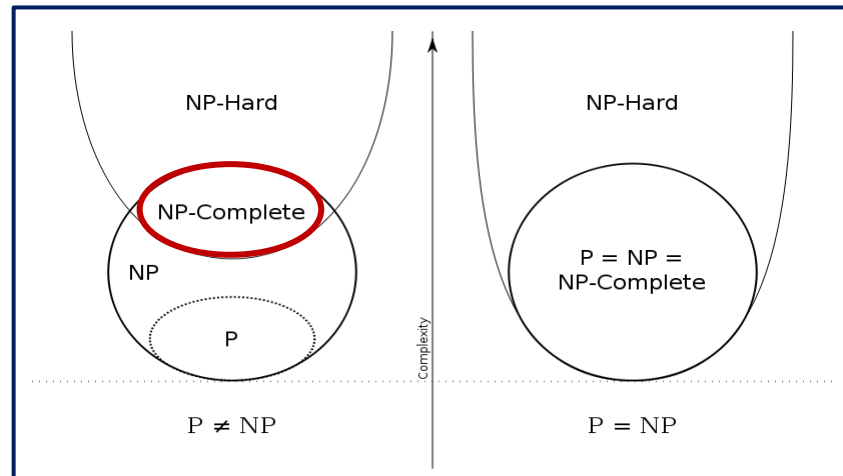
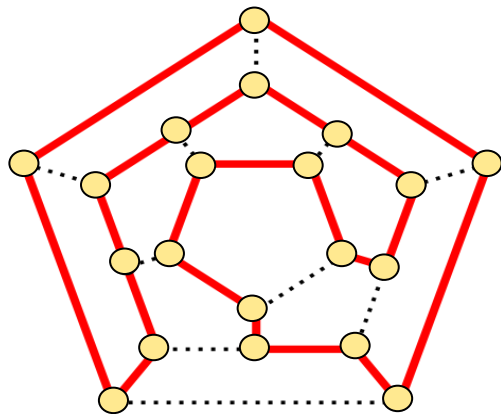
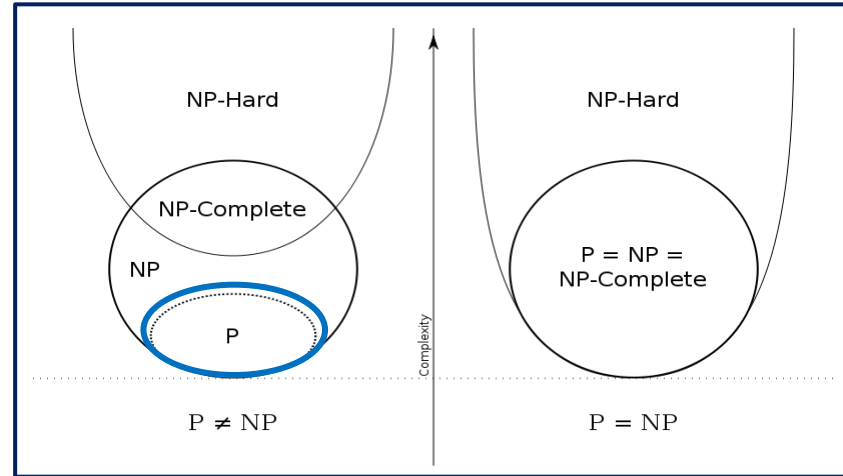
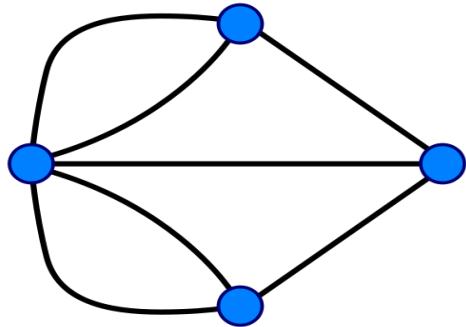


# Πρόβλημα - Γράφημα



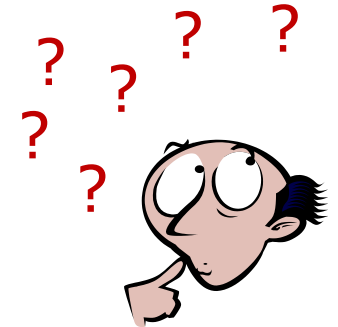


# Γράφημα - Αλγόριθμος



# NP-πλήρη Προβλήματα

## ○ Δύσκολα & Εύκολα Προβλήματα !!!



### Δύσκολα Προβλήματα

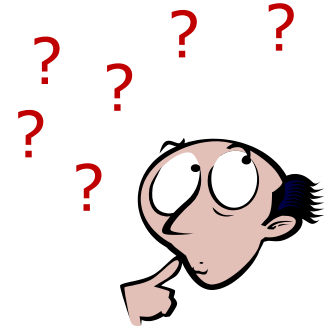
3SAT  
TSP  
ΜΕΓΙΣΤΗ ΔΙΑΔΡΟΜΗ  
ΣΑΚΙΔΙΟ  
ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ ΣΥΝΟΛΟ  
ILP  
ΔΙΑΔΡΟΜΗ HAMILTON

### Εύκολα Προβλήματα

2SAT  
MST  
ΕΛΑΧΙΣΤΗ ΔΙΑΔΡΟΜΗ  
ΜΟΝΑΔΙΑΙΟ ΣΑΚΙΔΙΟ  
ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΣΕ ΔΕΝΔΡΑ  
LP  
ΔΙΑΔΡΟΜΗ EULER

# NP-πλήρη Προβλήματα

## ○ Δύσκολα & Εύκολα Προβλήματα !!!



### Δύσκολα Προβλήματα

3SAT  
TSP  
ΜΕΓΙΣΤΗ ΔΙΑΔΡΟΜΗ  
ΣΑΚΙΔΙΟ  
ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ ΣΥΝΟΛΟ  
ILP  
ΔΙΑΔΡΟΜΗ HAMILTON

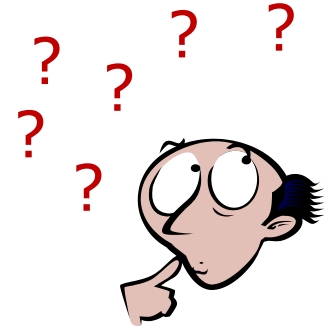
### Εύκολα Προβλήματα

Όλα τα προβλήματα εδώ λύνονται **αποδοτικά** με αλγορίθμους:

- ✓ Δυναμικού προγραμματισμού
- ✓ Αναζήτησης σε γραφήματα
- ✓ Άπληστων τεχνικών
- ✓ Ροών
- ✓ Γραμμικού προγραμματισμού

# NP-πλήρη Προβλήματα

## ○ Δύσκολα & Εύκολα Προβλήματα !!!



### Δύσκολα Προβλήματα

3SAT

TSP

ΜΕΓΙΣΤΗ ΔΙΑΔΡΟΜΗ

ΣΑΚΙΔΙΟ

ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ ΣΥΝΟΛΟ

ILP

ΔΙΑΔΡΟΜΗ HAMILTON

### 3SAT

Μας δίδεται ένας λογικός τύπος (Boolean formula) σε συζευκτική μορφή:

$$(x \vee y \vee z) \wedge (\bar{w} \vee y) \wedge (\bar{y} \vee z) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$$

και μας ζητείται είτε να βρούμε μια *ικανοποιούσα ανάθεση τιμών αληθείας* (satisfying truth assignment) ή να αναφέρουμε ότι δεν υπάρχει καμία !!!

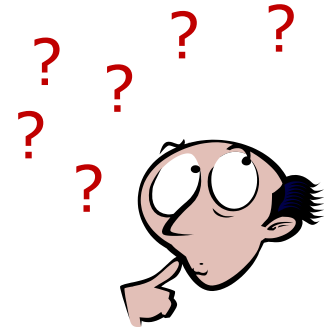
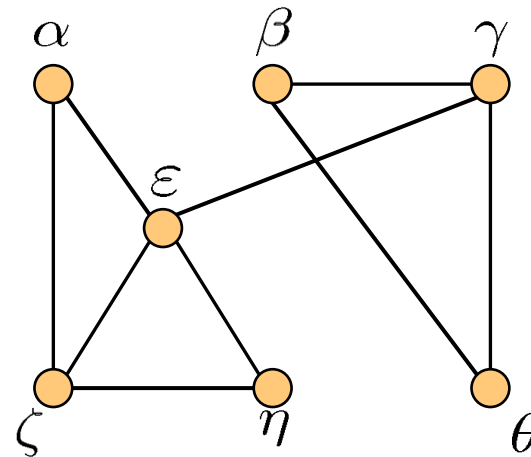
# NP-πλήρη Προβλήματα

## ○ Δύσκολα & Εύκολα Προβλήματα !!!

### Δύσκολα Προβλήματα

3SAT  
TSP  
ΜΕΓΙΣΤΗ ΔΙΑΔΡΟΜΗ  
ΣΑΚΙΔΙΟ  
ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ ΣΥΝΟΛΟ  
ILP  
ΔΙΑΔΡΟΜΗ HAMILTON

### ΔΙΑΔΡΟΜΗ HAMILTON



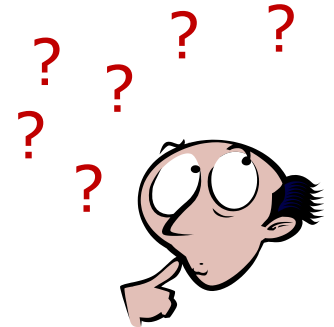
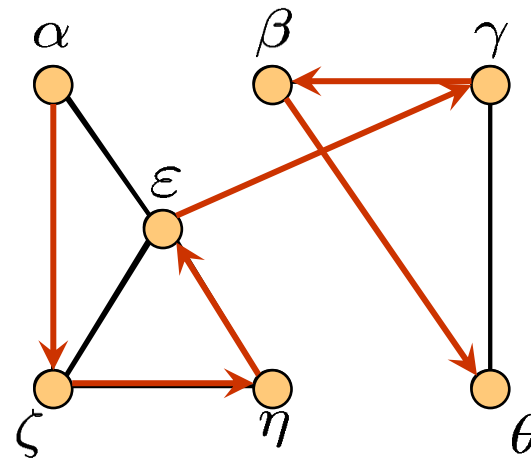
# NP-πλήρη Προβλήματα

## ○ Δύσκολα & Εύκολα Προβλήματα !!!

### Δύσκολα Προβλήματα

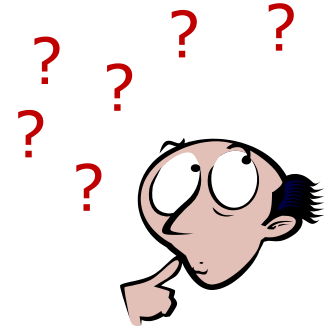
3SAT  
TSP  
ΜΕΓΙΣΤΗ ΔΙΑΔΡΟΜΗ  
ΣΑΚΙΔΙΟ  
ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ ΣΥΝΟΛΟ  
ILP  
ΔΙΑΔΡΟΜΗ HAMILTON

### ΔΙΑΔΡΟΜΗ HAMILTON



# NP-πλήρη Προβλήματα

## ○ Δύσκολα & Εύκολα Προβλήματα !!!



### Δύσκολα Προβλήματα

#### **Θλιβερή Αντίθεση !!!**

Τα προβλήματα εδώ **είναι όλα δύσκολα**, όλα για τον ίδιο λόγο !!!

Στη βάση τους είναι **όλα το ίδιο πρόβλημα !!!**

με διαφορετικές  
μεταμφιέσεις !!!

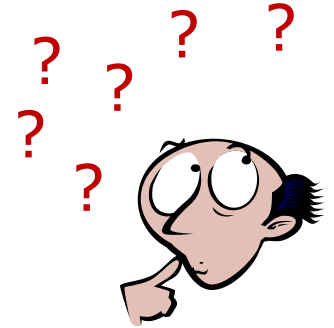
### Εύκολα Προβλήματα

Όλα τα προβλήματα εδώ λύνονται **αποδοτικά** με αλγορίθμους:

- ✓ Δυναμικού προγραμματισμού
- ✓ Αναζήτησης σε γραφήματα
- ✓ Άπληστων τεχνικών
- ✓ Ροών
- ✓ Γραμμικού προγραμματισμού

# NP-πλήρη Προβλήματα

## ○ Δύσκολα & Εύκολα Προβλήματα !!!



### Δύσκολα Προβλήματα

#### **Θλιβερή Αντίθεση !!!**

Τα προβλήματα εδώ **είναι**  
**όλα δύσκολα**, όλα για τον  
ίδιο λόγο !!!

Στη βάση τους είναι **όλα το**  
**ίδιο πρόβλημα !!!**

**NP-πλήρη !!!**

### Εύκολα Προβλήματα

Όλα τα προβλήματα εδώ λύνονται  
**αποδοτικά** με αλγορίθμους:

- ✓ Δυναμικού προγραμματισμού
- ✓ Αναζήτησης σε γραφήματα
- ✓ Άπληστων τεχνικών
- ✓ Ροών
- ✓ Γραμμικού προγραμματισμού



# NP-πλήρη Προβλήματα

## ○ P και NP

- Γνωρίζουμε τι είναι ένα Πρόβλημα Αναζήτησης !!!

**Χαρακτηριστικό:** Οποιαδήποτε προτεινόμενη λύση μπορεί να ελεγχθεί γρήγορα για την ορθότητά της !!!



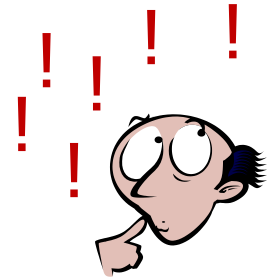
# NP-πλήρη Προβλήματα

## ○ P και NP

- Γνωρίζουμε τι είναι ένα Πρόβλημα Αναζήτησης !!!

Χαρακτηριστικό: Οποιαδήποτε προτεινόμενη λύση μπορεί να ελεγχθεί γρήγορα για την ορθότητά της !!!

NP

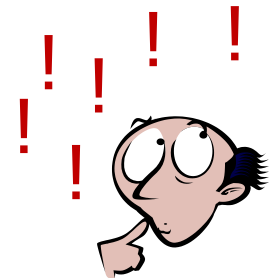
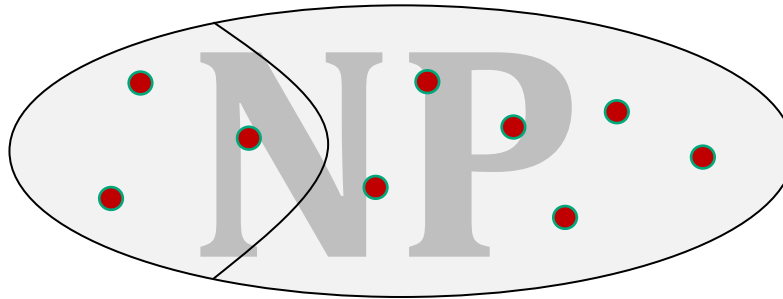


Συμβολίζουμε την κλάση **ΌΛΩΝ** των **ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΑΝΑΖΗΤΗΣΗΣ** που **μια** Λύση τους **Ελέγχεται** σε **ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΟ ΧΡΟΝΟ** με **NP** !!!

# NP-πλήρη Προβλήματα

## ○ P και NP

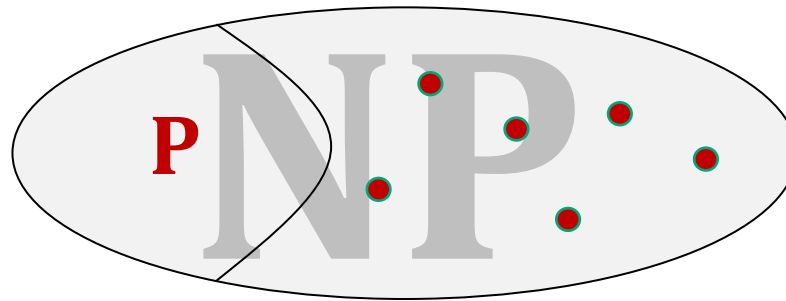
- ΠΟΛΛΑ πρόβλημα αναζήτησης NP μπορούν να λυθούν σε πολυωνυμικό χρόνο !!!



# NP-πλήρη Προβλήματα

## ○ P και NP

- ΠΟΛΛΑ πρόβλημα αναζήτησης NP μπορούν να λυθούν σε πολυωνυμικό χρόνο !!!

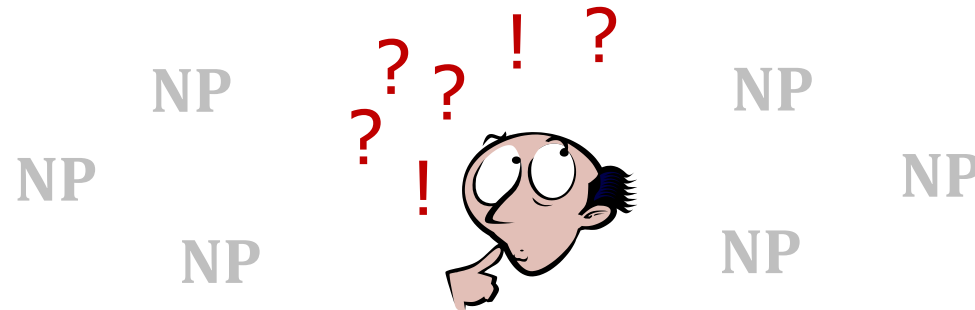


Συμβολίζουμε την κλάση **ΌΛΩΝ** των **ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΑΝΑΖΗΤΗΣΗΣ** που **Μπορούν να Λυθούν** σε **ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΟ ΧΡΟΝΟ** με **P** !!!

# NP-πλήρη Προβλήματα

## ○ Ρ και NP

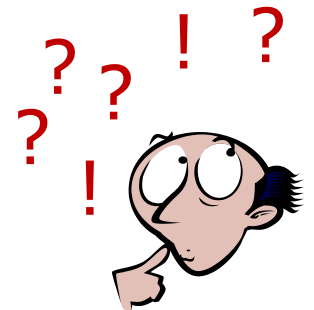
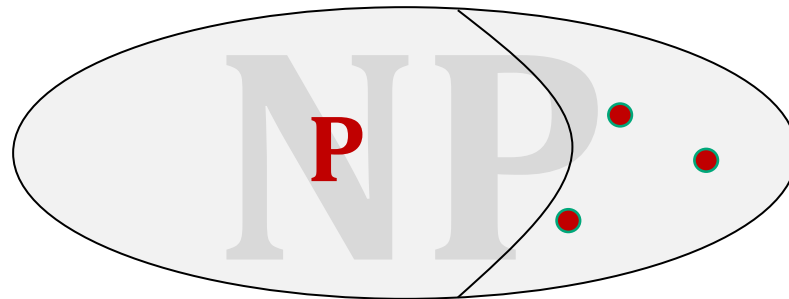
- ΕΡΩΤΗΜΑ !!! Πόσα ΠΟΛΛΑ πρόβλημα αναζήτησης NP υπάρχουν που μπορούν να λυθούν σε πολυωνυμικό χρόνο ?



# NP-πλήρη Προβλήματα

## ○ P και NP

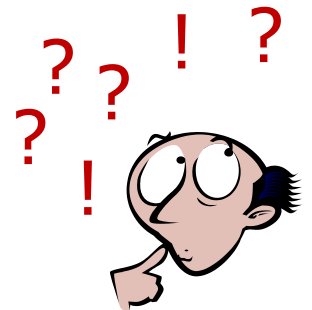
- ΕΡΩΤΗΜΑ !!! Πόσα ΠΟΛΛΑ πρόβλημα αναζήτησης NP υπάρχουν που μπορούν να λυθούν σε πολυωνυμικό χρόνο ?



# NP-πλήρη Προβλήματα

## ○ P και NP

- ΕΡΩΤΗΜΑ !!! Μήπως ΟΛΑ τα πρόβλημα αναζήτησης NP μπορούν να λυθούν σε πολυωνυμικό χρόνο ?

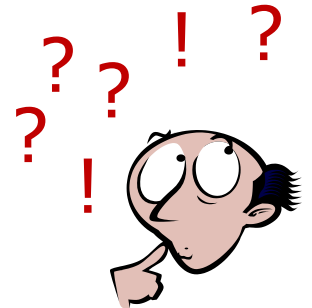


# NP-πλήρη Προβλήματα

## ○ P και NP

- ΕΡΩΤΗΜΑ !!! Μήπως ΟΛΑ τα πρόβλημα αναζήτησης NP μπορούν να λυθούν σε πολυωνυμικό χρόνο ?

$$P \stackrel{?}{=} NP$$



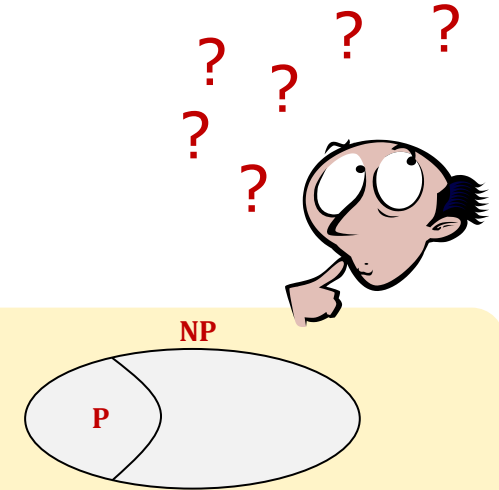
**Το Μεγάλο Ερώτημα της Επιστήμης μας !!!**



# NP-πλήρη Προβλήματα

## ● Το Μεγάλο Ερώτημα !!!

Ισχύει  $P \neq NP$  ?



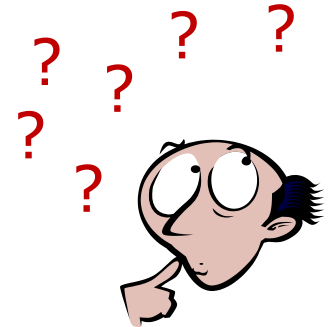
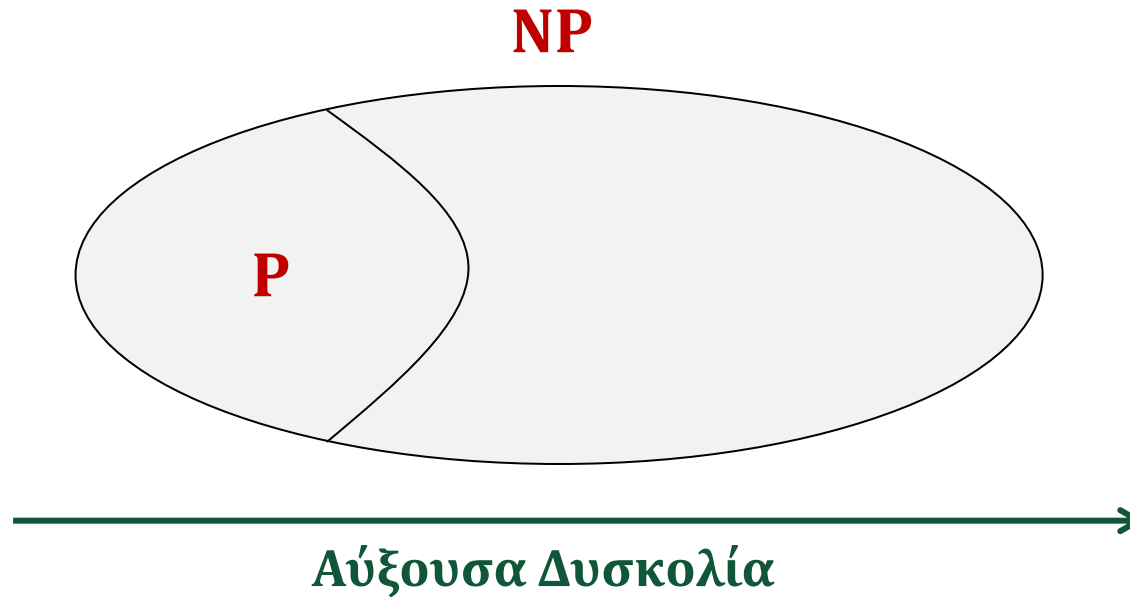
- Οι περισσότεροι ερευνητές αλγορίθμων **πιστεύουν** πως **Ναι** !!!

**Ωστόσο !...** δεν υπάρχει απόδειξη !... και η απόδειξη φαίνεται εξαιρετικά δύσκολη !!!

# NP-πλήρη Προβλήματα

## ○ P και NP !!!

● Εάν δεχθούμε ότι ισχύει:  $P \neq NP$



# NP-πλήρη Προβλήματα

## ○ P και NP !!!

● Εάν δεχθούμε ότι ισχύει: **P ≠ NP**

✓ Τι ισχύει για τα προβλήματα αναζήτησης του αριστερού πίνακα ?

✓ Υπάρχουν **ενδείξεις** ότι αυτά είναι **ιδιαίτερα προβλήματα** και ότι **δεν έχουν αποδοτικούς αλγορίθμους** επίλυσης !!!

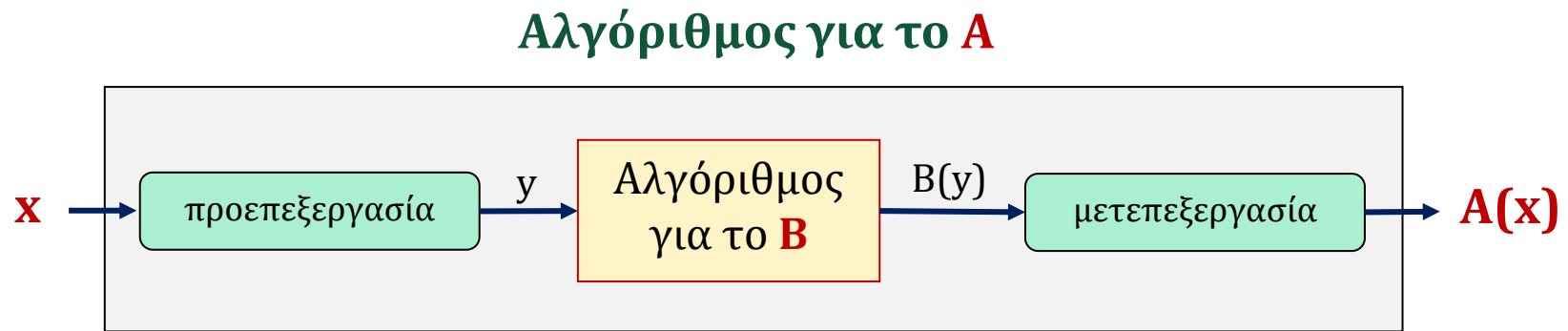
3SAT  
TSP  
ΜΕΓΙΣΤΗ ΔΙΑΔΡΟΜΗ  
ΣΑΚΙΔΙΟ  
ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ ΣΥΝΟΛΟ  
ILP  
ΔΙΑΔΡΟΜΗ HAMILTON

2SAT  
MST  
ΕΛΑΧΙΣΤΗ ΔΙΑΔΡΟΜΗ  
ΜΟΝΑΔΙΑΙΟ ΣΑΚΙΔΙΟ  
ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΣΕ ΔΕΝΔΡΑ  
LP  
ΔΙΑΔΡΟΜΗ EULER

● Τέτοιες ενδείξεις παρέχουν οι **Αναγωγές**

# NP-πλήρη Προβλήματα

○ Αναγωγές !!!  $A \leq B \Leftrightarrow A \rightarrow B$



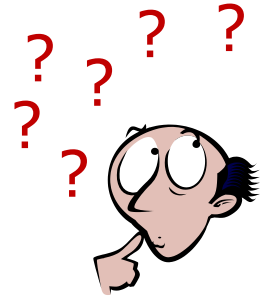
ΤΕΛΕΙΑ-ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗ  $\leq$  ΜΕΓΙΣΤΗ-ΡΟΗ

ΤΙΜΗ-ΚΥΚΛΩΜΑΤΟΣ  $\leq$  LP

# NP-πλήρη Προβλήματα

## ○ NP και NP-πλήρη !!!

- Εάν δεχθούμε ότι ισχύει:  $P \neq NP$ ,... τότε ορίζουμε την κλάση των δυσκολότερων προβλημάτων αναζήτησης!



Ένα πρόβλημα αναζήτησης είναι **NP-πλήρες** (NP-complete) εάν **Όλα τα Άλλα Προβλήματα Αναζήτησης Αναγονται** σε αυτό !!!

# NP-πλήρη Προβλήματα

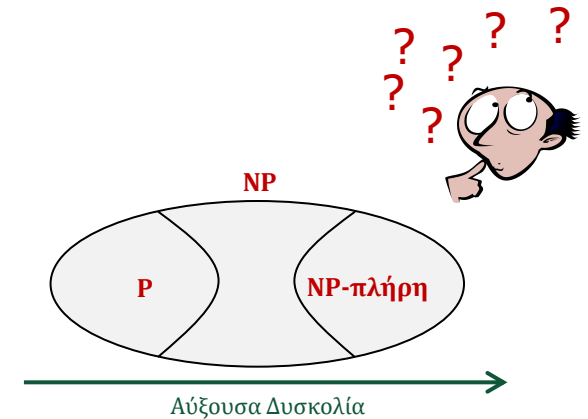
## ○ NP και NP-πλήρη !!!

- Αυτή... είναι μια πολύ ισχυρή απαίτηση !!!
- ✓ Για να είναι ένα πρόβλημα **NP-πλήρες** πρέπει να είναι

**Χρήσιμο** για την επίλυση **κάθε προβλήματος στον Κόσμο !!!**

- ✓ Είναι εντυπωσιακό, αλλά !!!...

**Υπάρχουν** τέτοια προβλήματα (3SAT, TSP, ΜΕΓΙΣΤΗ ΔΙΑΔΡΟΜΗ, ...)



# NP-πλήρη Προβλήματα

## ○ NP και NP-πλήρη !!!

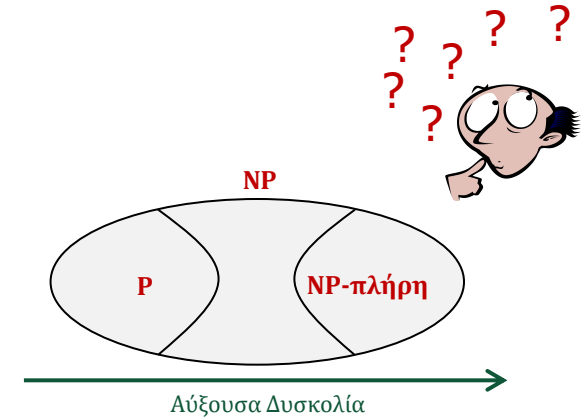
### ● Ισχύει:

- ✓ Όλα τα **NP-πλήρη** πρόβλημα **ανάγονται** το ένα στο άλλο !!!

$$\text{SAT} \leq \dots \leq \text{Q} \leq \dots \leq \text{R}$$

- ✓ Και, όλα τα **NP** προβλήματα **ανάγονται** στα **NP-πλήρη** !!!

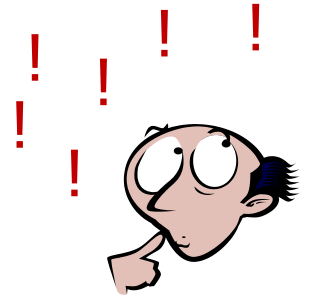
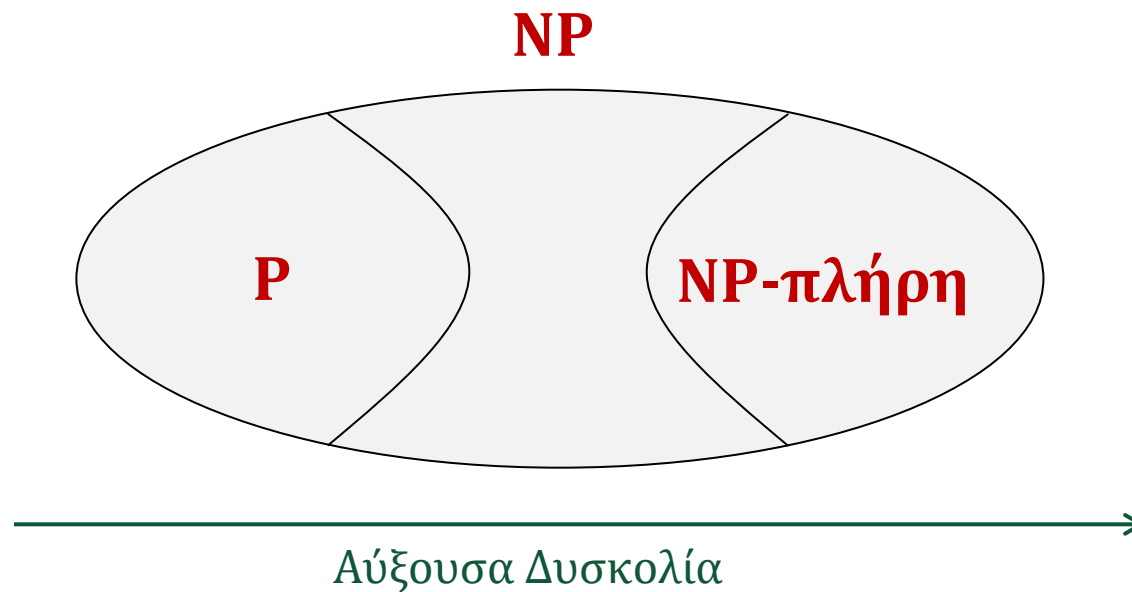
$$\text{ΟΠΟΙΟΔΗΠΟΤΕ-ΠΡΟΒΛΗΜΑ-ΣΤΟ-NP} \leq \text{SAT}$$



# NP-πλήρη Προβλήματα

## ○ P, NP και NP-πλήρη !!!

● Εάν  $P \neq NP$



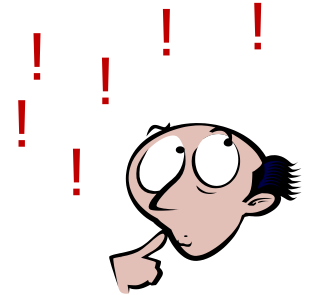
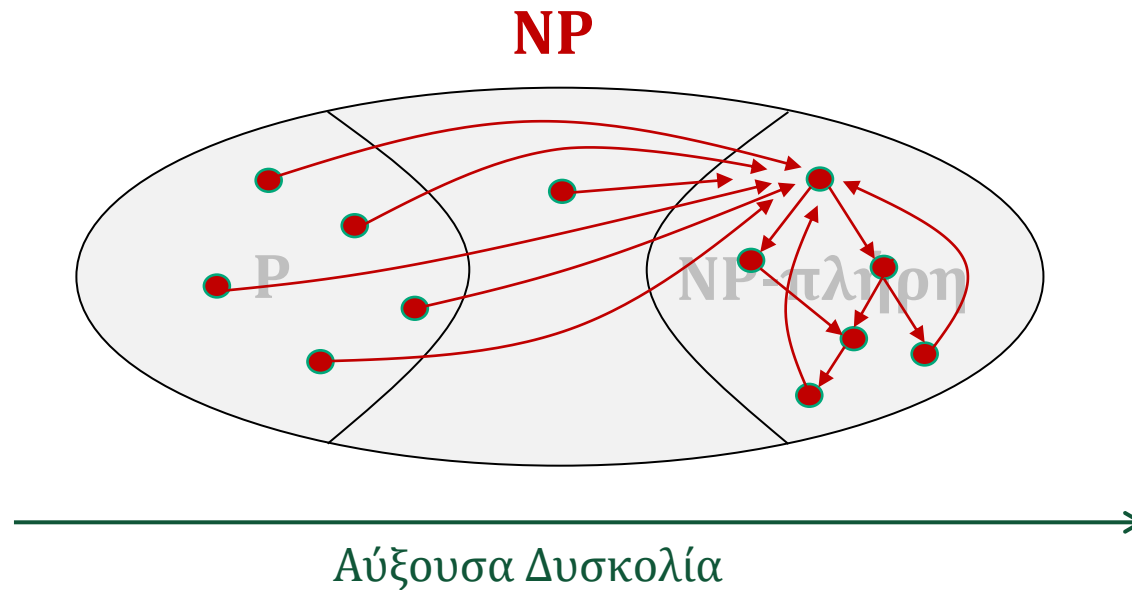
**Μια Σχηματική Παρουσίαση !!!**



# NP-πλήρη Προβλήματα

## ○ P, NP και NP-πλήρη !!!

● Εάν  $P \neq NP$

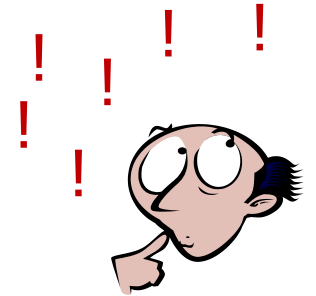
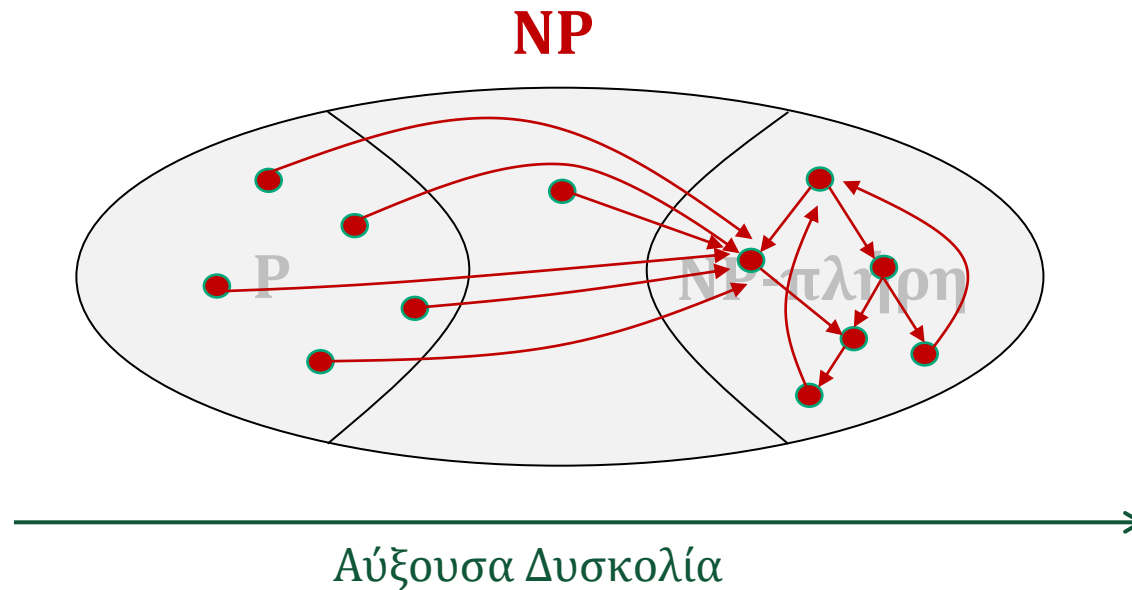


ΟΠΟΙΟΔΗΠΟΤΕ-ΠΡΟΒΛΗΜΑ-ΣΤΟ-NP  $\leq$  SAT  $\leq \dots \leq$  Q  $\leq \dots \leq$  R

# NP-πλήρη Προβλήματα

## ○ P, NP και NP-πλήρη !!!

● Εάν  $P \neq NP$

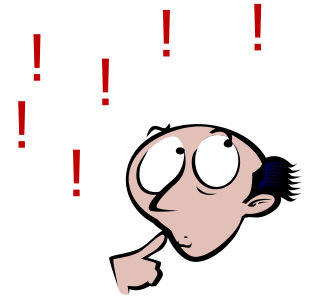
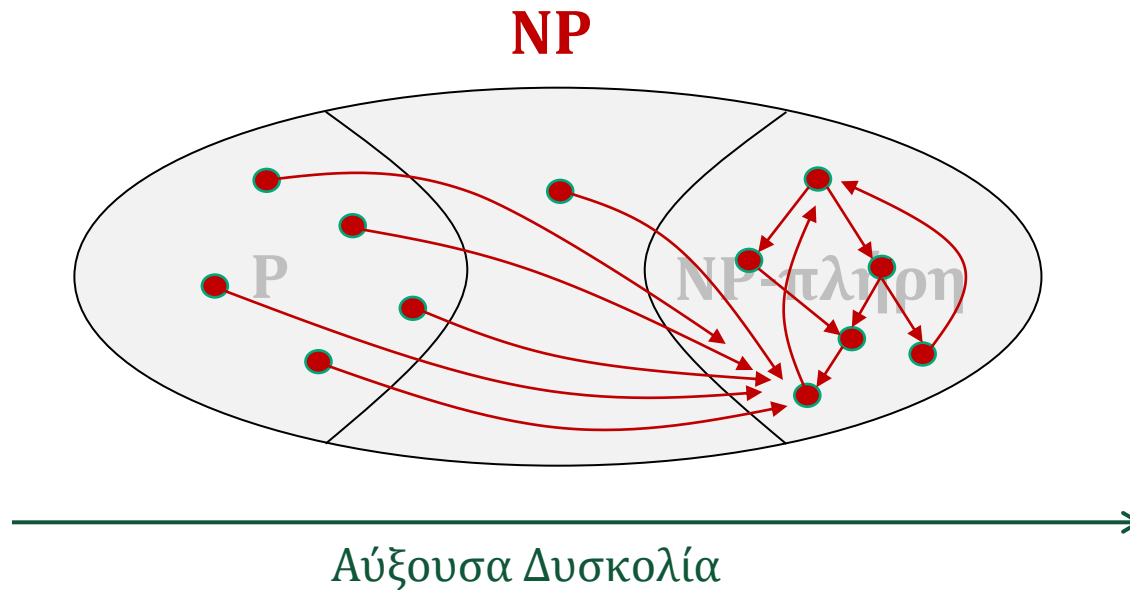


ΟΠΟΙΟΔΗΠΟΤΕ-ΠΡΟΒΛΗΜΑ-ΣΤΟ-NP  $\leq$  SAT  $\leq \dots \leq$  Q  $\leq \dots \leq$  R

# NP-πλήρη Προβλήματα

## ○ P, NP και NP-πλήρη !!!

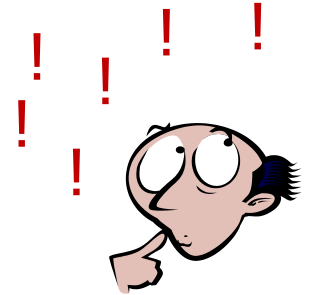
● Εάν  $P \neq NP$



ΟΠΟΙΟΔΗΠΟΤΕ-ΠΡΟΒΛΗΜΑ-ΣΤΟ-NP  $\leq$  SAT  $\leq \dots \leq$  Q  $\leq \dots \leq$  R

# Αναγωγές Προβλημάτων NP

○  $A \leq B \iff A \rightarrow B$



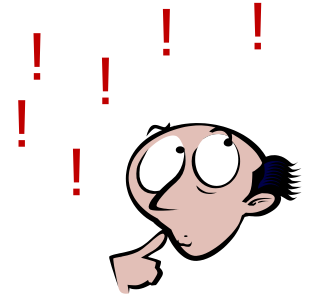
ΟΠΟΙΟΔΗΠΟΤΕ-ΠΡΟΒΛΗΜΑ-ΣΤΟ-NP



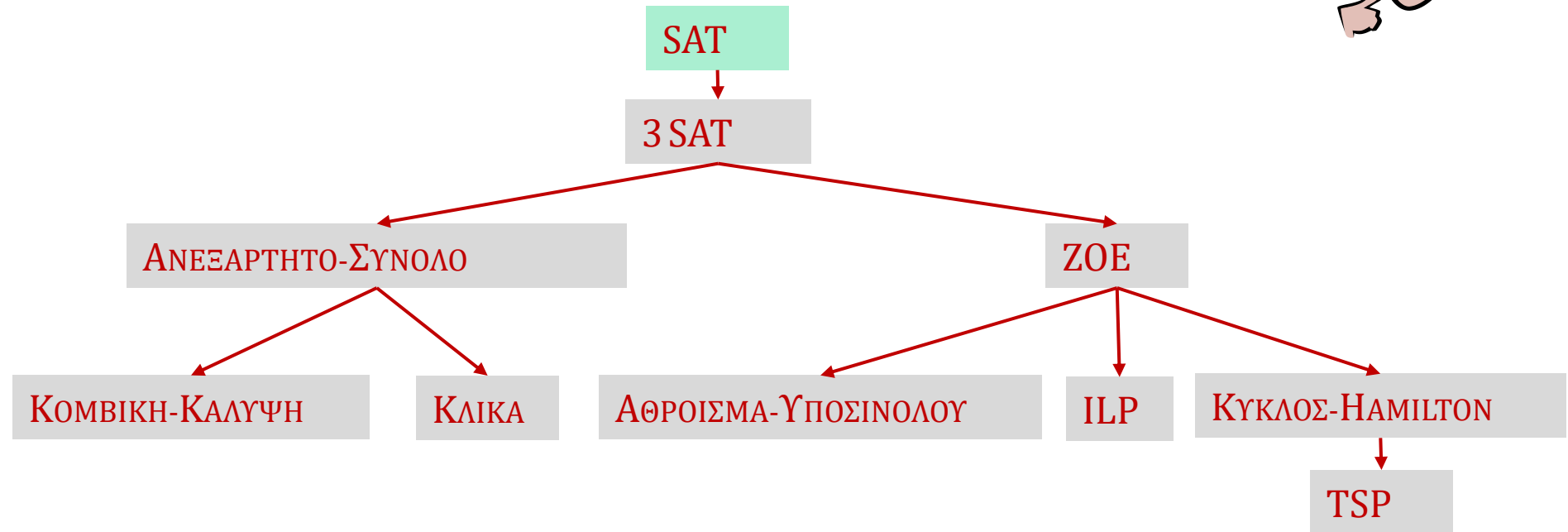
Θα Δείξουμε μέσω Αναγωγών !!!

# Αναγωγές Προβλημάτων NP

○  $A \leq B \iff A \rightarrow B$



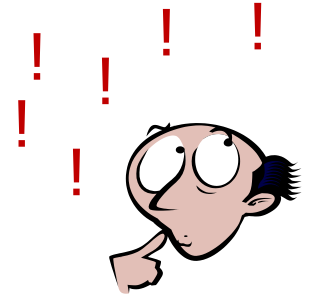
ΟΠΟΙΟΔΗΠΟΤΕ-ΠΡΟΒΛΗΜΑ-ΣΤΟ-NP



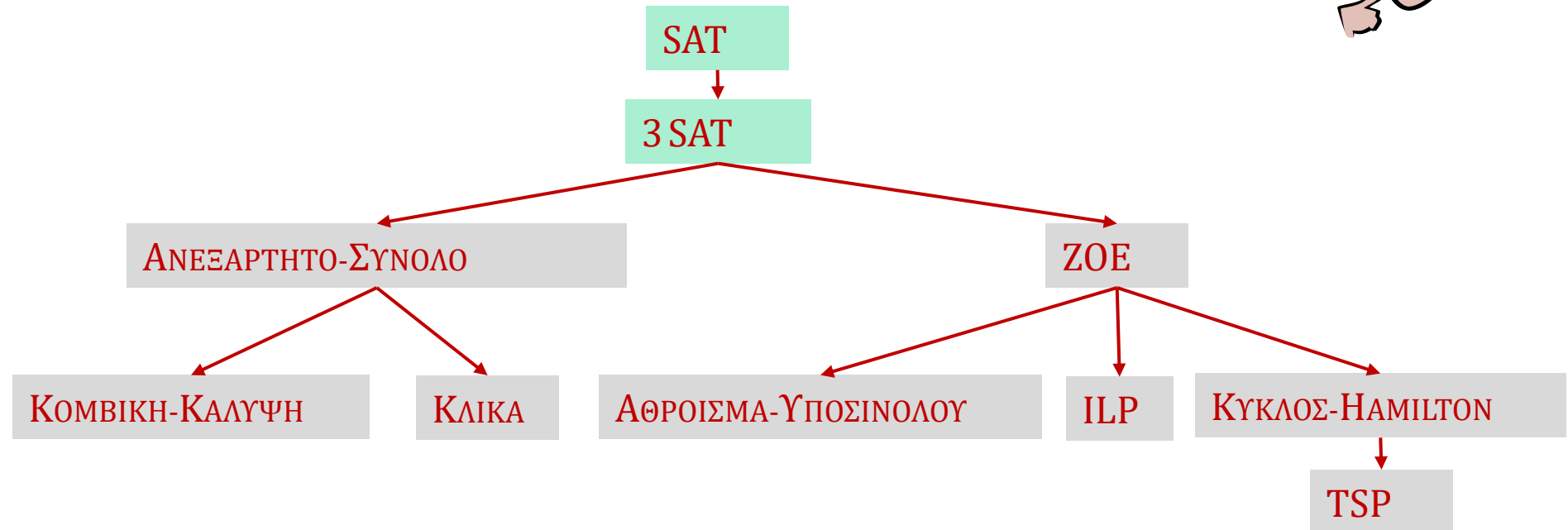
Θα Δείξουμε μέσω Αναγωγών !!!

# Αναγωγές Προβλημάτων NP

$$\textcircled{\text{A}} \quad \mathbf{A} \leq \mathbf{B} \iff \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$$



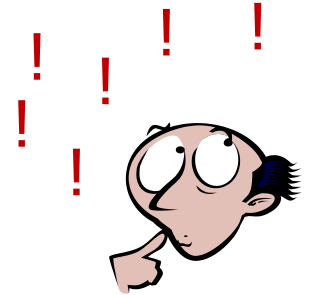
ΟΠΟΙΟΔΗΠΟΤΕ-ΠΡΟΒΛΗΜΑ-ΣΤΟ-NP



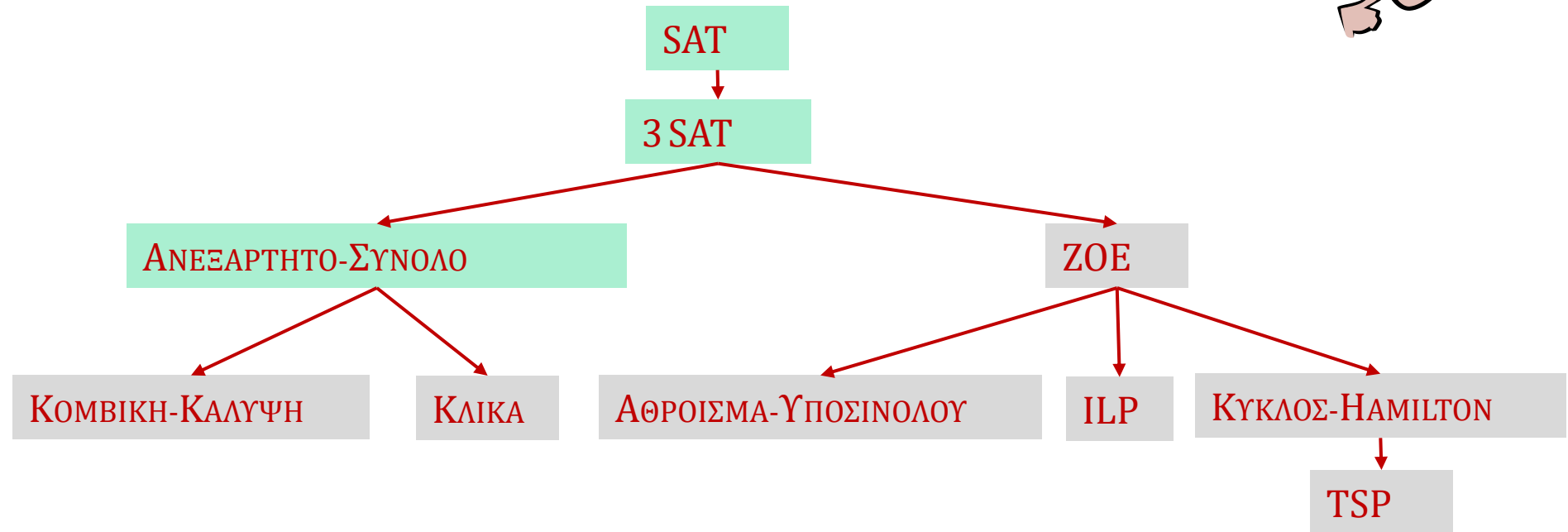
Θα Δείξουμε μέσω Αναγωγών !!!

# Αναγωγές Προβλημάτων NP

○  $A \leq B \iff A \rightarrow B$



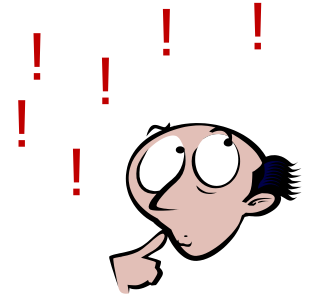
ΟΠΟΙΟΔΗΠΟΤΕ-ΠΡΟΒΛΗΜΑ-ΣΤΟ-NP



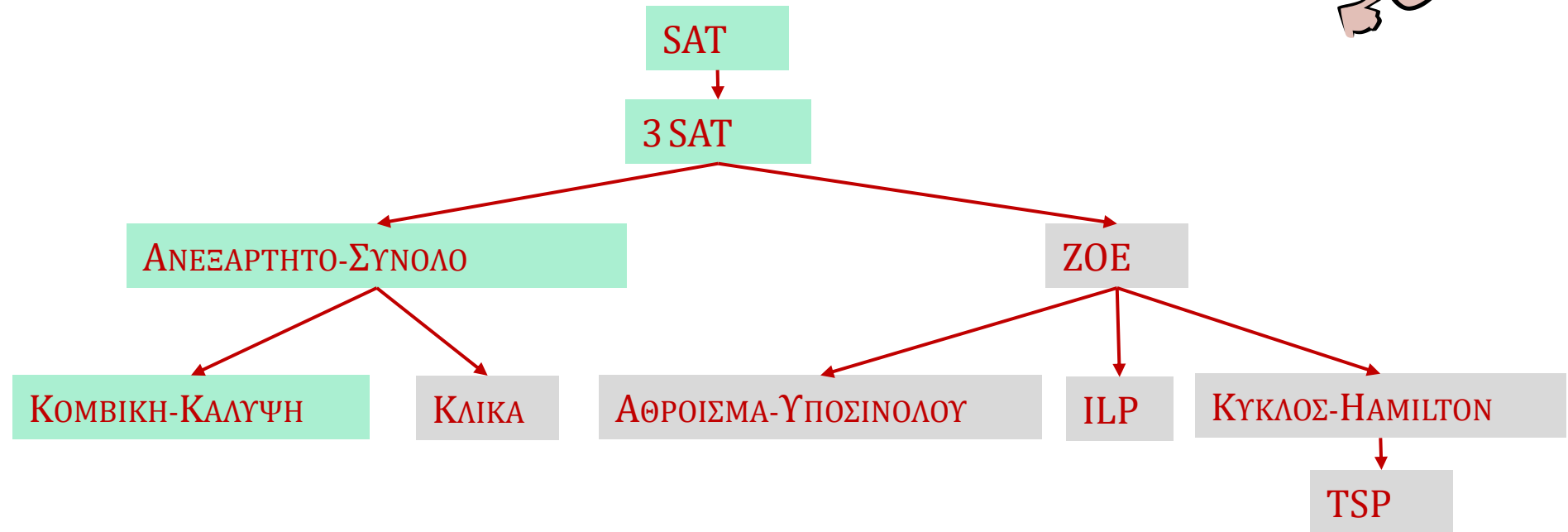
Θα Δείξουμε μέσω Αναγωγών !!!

# Αναγωγές Προβλημάτων NP

○  $A \leq B \Leftrightarrow A \rightarrow B$



ΟΠΟΙΟΔΗΠΟΤΕ-ΠΡΟΒΛΗΜΑ-ΣΤΟ-NP

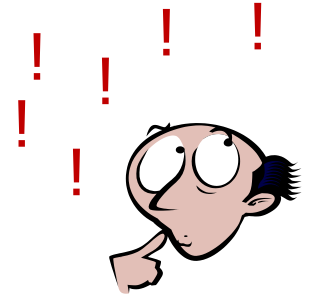


Θα Δείξουμε μέσω Αναγωγών !!!

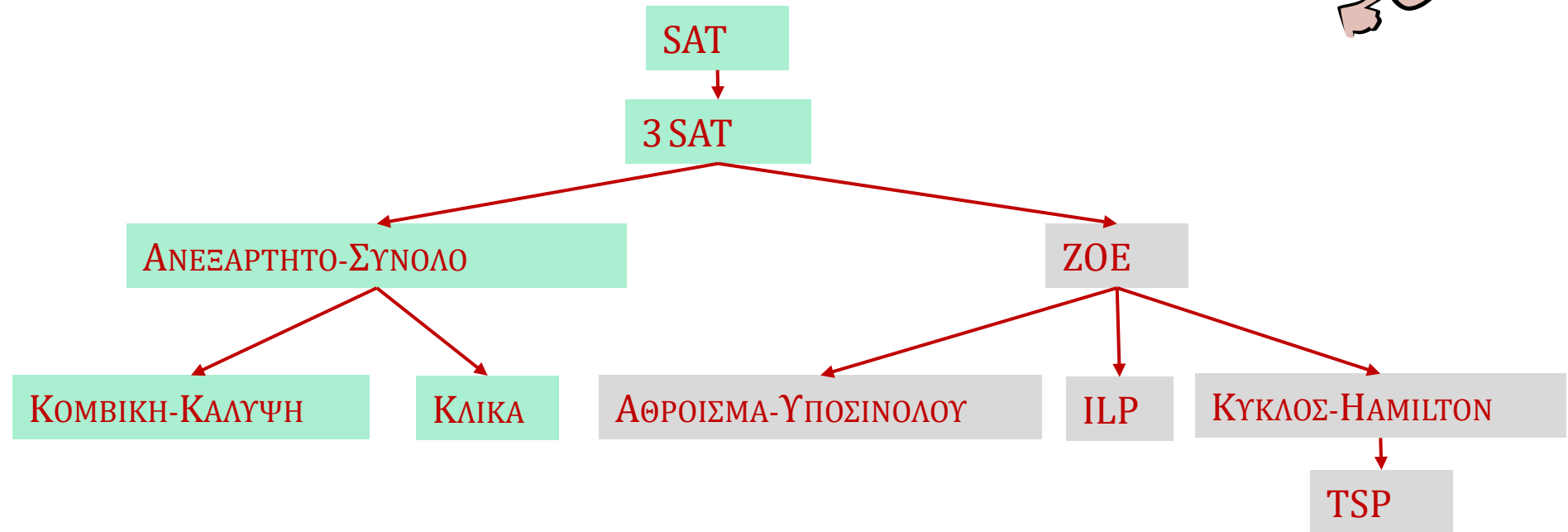


# Αναγωγές Προβλημάτων NP

○  $A \leq B \Leftrightarrow A \rightarrow B$



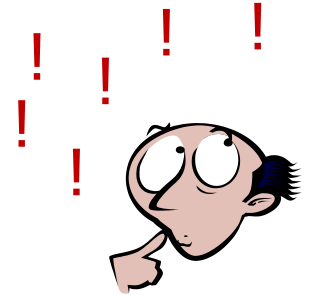
ΟΠΟΙΟΔΗΠΟΤΕ-ΠΡΟΒΛΗΜΑ-ΣΤΟ-NP



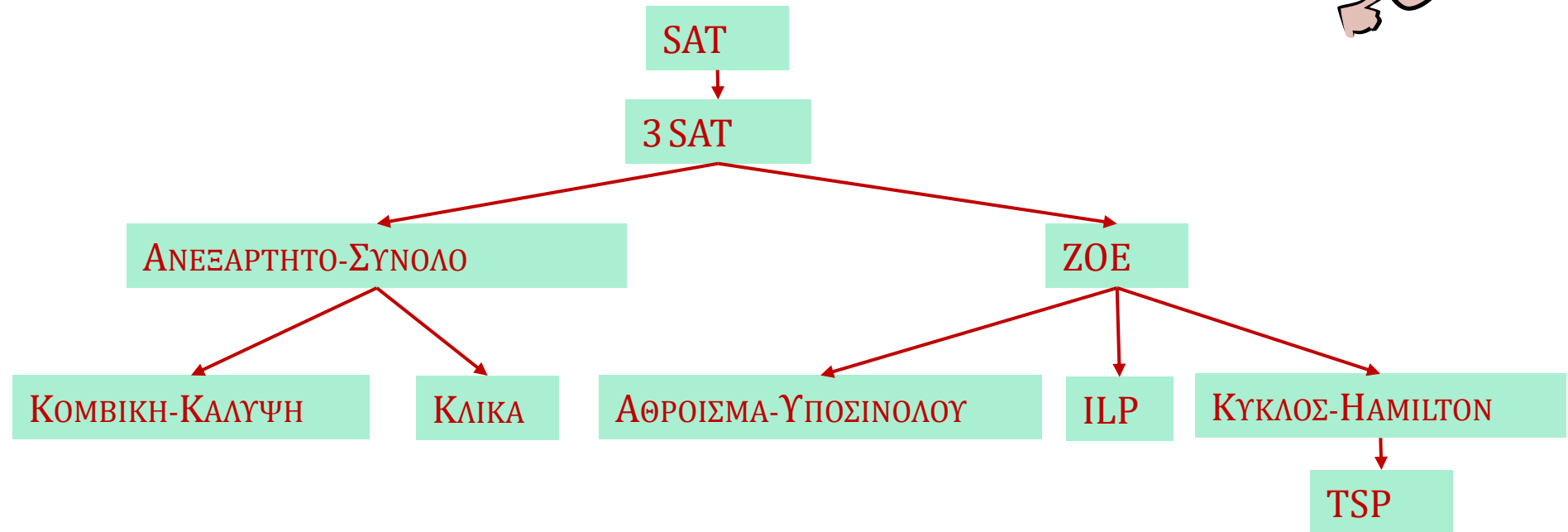
Θα Δείξουμε μέσω Αναγωγών !!!

# Αναγωγές Προβλημάτων NP

○  $A \leq B \iff A \rightarrow B$



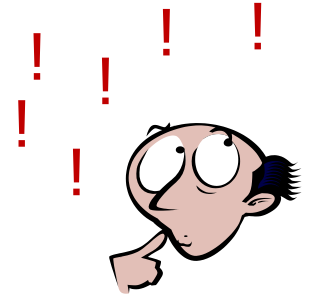
ΟΠΟΙΟΔΗΠΟΤΕ-ΠΡΟΒΛΗΜΑ-ΣΤΟ-NP



Θα Δείξουμε μέσω Αναγωγών !!!

# Αναγωγές Προβλημάτων NP

○  $A \leq B \iff A \rightarrow B$



ΟΠΟΙΟΔΗΠΟΤΕ-ΠΡΟΒΛΗΜΑ-ΣΤΟ-NP

SAT

3 SAT

ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ-ΣΥΝΟΛΟ

ZOE

ΚΟΜΒΙΚΗ-ΚΑΛΥΨΗ

ΚΛΙΚΑ

ΑΘΡΟΙΣΜΑ-ΥΠΟΣΙΝΟΛΟΥ

ILP

ΚΥΚΛΟΣ-HAMILTON

TSP

Θα Δείξουμε μέσω Αναγωγών !!!

