**Εργαστήριο Αλγορίθμων 6**

H εταιρεία MS-Construction με κύρια δραστηριότητα σε κατασκευές «οδικών δικτύων», ανέλαβε την ανακατασκευή του οδικού δικτύου ενός γεωγραφικού διαμερίσματος Δ ενός κράτους Κ, το οποίο καταστράφηκε ολοσχερώς από ένα φυσικό γεγονός (π.χ., ισχυρό σεισμό). Το γεωγραφικό διαμέρισμα Δ έχει *n* πόλεις, έστω

Π1, Π2, …, Πn (*n* ≥ 1),

οι οποίοι συνδέονται μεταξύ του **άμεσα ή έμμεσα** με οδούς διπλής κατεύθυνσης.

Η πόλη Πi συνδέεται **άμεσα** με την πόλη Πj εάν υπάρχει οδός από την Πi στην Πj χωρίς να περνάει από κάποια άλλη πόλη, ενώ η πόλη Πi συνδέεται **έμμεσα** με την πόλη Πj εάν η Πi συνδέεται με την Πj μέσω κάποιας άλλης πόλης Πk ή γενικά μέσω κάποιας ακολουθίας πόλεων Πk1, Πk2, …, Πkp, όπου η πόλη Πi συνδέεται άμεσα με την Πk1, η Πk1 συνδέεται άμεσα με την Πk2, κ.ο.κ, και τέλος η πόλη Πkp συνδέεται άμεσα με την Πj, όπου kp ≥ 1.

Η εταιρεία MS-Construction όρισε την αμοιβή της για την ανακατασκευή του οδικού δικτύου ανά χιλιόμετρο, συγκεκριμένα 20.000 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο.

Το κράτος Κ θέλει, λόγω οικονομικών προβλημάτων, να αποκαταστήσει άμεσα μέρος του οδικού δικτύου του γεωγραφικού διαμερίσματος Δ, με τις παρακάτω τρεις προϋποθέσεις:

Α) Να υπάρχει οδική επικοινωνία μεταξύ όλων των πόλεων, δηλ., για κάθε ζεύγος πόλεων Πi και Πj του διαμερίσματος Δ να υπάρχει μεταξύ τους άμεση ή έμμεση σύνδεση.

Β) Το συνολικό κόστος που θα πληρώσει το κράτος στην κατασκευαστική εταιρεία MS-Construction να είναι το ελάχιστο δυνατό.

Γ) Η χιλιομετρική απόσταση της διαδρομής μεταξύ των δύο πόλεων Χ και Υ, λόγω συγκέντρωσης σε αυτές πολλών κοινωνικών υπηρεσιών, θα πρέπει να είναι ελάχιστη.

Τα δεδομένα του υπό ανακατασκευή οδικού δικτύου του γεωγραφικού διαμερίσματος Δ είναι:

(i) το πλήθος *n* των πόλεων Π1, Π2, …, Πn αυτού (*n* ≥ 1),

(ii) η ύπαρξη ή μη άμεσης σύνδεσης μεταξύ δύο πόλεων Πi και Πj, για κάθε *i, j* ∈ [1, *n*],

(iii) η χιλιομετρική απόσταση KMij μεταξύ των πόλεων Πi και Πj (εάν υπάρχει άμεση σύνδεση), 1 ≤ *i, j* ≤ *n*, και

(iv) οι δύο πόλεις Χ και Υ του γεωγραφικού διαμερίσματος Δ για τις οποίες το κράτος ενδιαφέρεται για γρήγορη οδική επικοινωνία.

Η εταιρεία MS-Construction σάς προσλαμβάνει και ζητά από εσάς να της δώσετε μια λύση που ικανοποιεί τις τρεις απαιτήσεις του κράτους. Προς τούτο, παίρνετε τις εξής εντολές:

1) Σχεδιάστε και υλοποιήστε έναν αλγόριθμο πολυπλοκότητας Ο(n2), ο οποίος θα υπολογίζει ένα μέρος (υποσύνολο) του οδικού δικτύου του γεωγραφικού διαμερίσματος Δ που ικανοποιεί τις απαιτήσεις (Α) και (Β) του κράτους.

2) Σχεδιάστε και υλοποιήστε έναν αλγόριθμο πολυπλοκότητας Ο(n2), ο οποίος θα υπολογίζει ένα μέρος (υποσύνολο) του οδικού δικτύου του γεωγραφικού διαμερίσματος Δ που ικανοποιεί, εκτός από τις απαιτήσεις (Α) και (Β) του κράτους, και την απαίτηση (Γ).

Σημείωση: Η χιλιομετρική απόσταση KMij μεταξύ δύο πόλεων Πi και Πj είναι ακέραιος αριθμός και δεν υπερβαίνει τα 50 χιλιόμετρα, 1 ≤ *i, j* ≤ *n*.