**Εργαστήριο Αλγορίθμων 5**

H εταιρία X-Social με κύρια δραστηριότητα σε υπηρεσίες «κοινωνικής δικτύωσης», διαθέτει το λογισμικό κοινωνικής δικτύωσης Net-book© στο οποίο έχουν εγγραφεί *n* χρήστες (users), έστω

 X1, X2, …, Xn (*n* ≥ 1),

οι οποίοι συνδέονται μεταξύ του με **άμεση ή έμμεση σχέση γνωριμίας** και την οποία σχέση έχουν γνωστοποιήσει στο Net-book©.

O χρήστης Xi συνδέεται με **άμεση σχέση γνωριμίας** με τον χρήστη Xj εάν ο Xi γνωρίζει τον Xj (αυτό δεν σημαίνει ότι κατ’ ανάγκη και ο Xj γνωρίζει τον Xi), 1 ≤ *i, j* ≤ *n*. Ο χρήστης Xi συνδέεται με **έμμεση σχέση γνωριμίας** με τον χρήστη Xj εάν ο Xi γνωρίζει τον Xj μέσω κάποιου άλλου χρήστη Xk ή γενικά μέσω κάποιας ακολουθίας χρηστών Xk1, Xk2, …, Xkp, όπου ο χρήστης Xk1 γνωρίζει άμεσα τον Xk2, ο Xk2 γνωρίζει άμεσα τον Xk3, και τέλος ο χρήστης Xk(p-1) γνωρίζει άμεσα τον Xkp, όπου kp ≥ 1. Είναι προφανές ότι στο κοινωνικό δίκτυο Net-book© μπορεί να υπάρχουν χρήστες οι οποίοι δεν γνωρίζουν ούτε άμεσα ούτε έμμεσα κάποιους άλλους χρήστες του δικτύου.

Η εταιρία X-Social θέλει αρχικά να δημιουργήσει και να προσφέρει μια νέα υπηρεσία στο σύστημα Net-book© όπου ένας χρήστης θα μπορεί να βλέπει την «ισχυρή ομάδα γνωριμίας» του.

**Ισχυρή Ομάδα Γνωριμίας**: Μια ομάδα χρηστών S αποτελεί «ισχυρή ομάδα γνωριμίας» εάν για κάθε ζεύγος χρηστών Χi και Χj της ομάδας S ο χρήστης Χi γνωρίζει άμεσα ή έμμεσα τον χρήστη Χj και ο χρήστης Χj γνωρίζει άμεσα ή έμμεσα τον χρήστη Χi, 1 ≤ *i, j* ≤ |S|.

Επίσης, η εταιρία X-Social θέλει για δική της χρήση να γνωρίζει όλες της ισχυρές ομάδες γνωριμίας S1, S2, …, Sk (1 ≤ *k* ≤ *n*) του Net-book© δικτύου της. Επιπρόσθετα, πάλι για δική της χρήση, η εταιρία θέλει να γνωρίζει τις High- ισχυρές (H-ισχυρές) και Low-ισχυρές (L-ισχυρές) ομάδες γνωριμίας του δικτύου Net-book©.

**Η-ισχυρή και L-ισχυρή Ομάδα Γνωριμίας**: Μία ισχυρή ομάδα γνωριμίας Si ονομάζεται High, ή Η-ισχυρή, εάν κανένας χρήστης του δικτύου εκτός της ομάδας Si δεν έχει άμεση ή έμμεση σχέση γνωριμίας με κάποιο μέλος της Si, ενώ η Si ονομάζετε Low, ή L-ισχυρή, εάν κανένα μέλος της ομάδας Si δεν έχει άμεση ή έμμεση σχέση γνωριμίας με κάποιο χρήστη του δικτύου εκτός της Si, 1 ≤ *i* ≤ *k.*

Η εταιρία X-Social σάς προσλαμβάνει και ζητά από εσάς να υλοποιήσετε τους παραπάνω στόχους της. Προς τούτο, παίρνετε τις εξής εντολές:

1) Σχεδιάστε και υλοποιήστε έναν αλγόριθμο πολυπλοκότητας χρόνου O(n+m) ο οποίος θα υπολογίζει όλες τις ισχυρές ομάδες γνωριμίας S1, S2, …, Sk (1 ≤ *k* ≤ *n*) του δικτύου Net-book© και θα κρατάει σε κατάλληλες δομές δεδομένων πληροφορίες τέτοιες ώστε:

* το σύστημα να μπορεί να απαντάει σε σταθερό χρόνο στον χρήστη Χi (1 ≤ *i* ≤ *n*) σε ποια από τις *k* ισχυρές ομάδες γνωριμίας ανήκει (εμφανίζοντας τον αύξοντα αριθμό της ομάδας αυτής), και
* να εμφανίζει στην οθόνη τα μέλη της ισχυρής ομάδα γνωριμίας του χρήστη Χi (1 ≤ *i* ≤ *n*), σε χρόνο γραμμικό ως προς το πλήθος των μελών της ομάδας.

Στην πολυπλοκότητα O(n+m) του αλγορίθμου σας, *n* είναι το πλήθος των χρηστών του δικτύου Net-book© και *m* είναι το πλήθος των άμεσων σχέσεων γνωριμίας μεταξύ των χρηστών του.

2) Σχεδιάστε και υλοποιήστε έναν O(n+m) αλγόριθμο ο οποίος θα υπολογίζει όλες τις Η-ισχυρές και L-ισχυρές ομάδες γνωριμίας του δικτύου Net-book© και για κάθε τέτοια ομάδα να εμφανίζει τα μέλη της.