

Σχεδίαση και Ανάλυση Αλγορίθμων

Ενότητα 6.ο

Ευσταθή Ταιριάσματα

Πρόβλημα Ευσταθούς Ταιριάσματος



Σταύρος Δ. Νικολόπουλος | 2016-17

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Webpage: www.cs.uoi.gr/~stavros

Πρόβλημα Ευσταθούς Ταιριάσματος



Πρόβλημα Ευσταθούς Ταιριάσματος

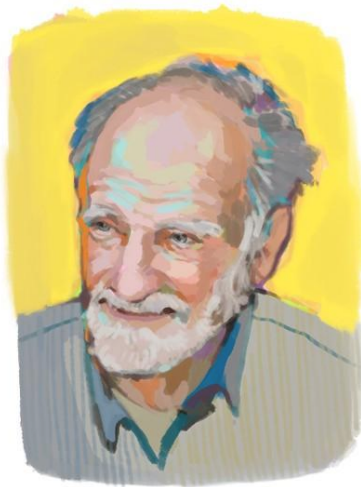


Πρόβλημα Ευσταθούς Ταιριάσματος

Gale-Shapley 1962



David Gale (1921-2008)
PROFESSOR, UC BERKELEY



Lloyd Shapley
PROFESSOR EMERITUS, UCLA



□ Ερώτημα Gale & Shapley

- Προέκυψε, εν μέρει, το 1962 όταν οι David Gale και Lloyd Shapley, δύο μαθηματικοί οικονομολόγοι, διατύπωσαν το εξής ερώτημα:



David Gale (1921-2008)
PROFESSOR, UC BERKELEY

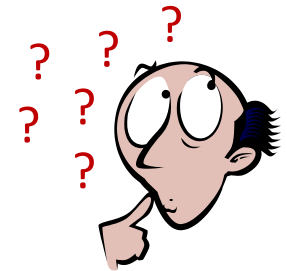


Lloyd Shapley
PROFESSOR EMERITUS, UCLA

Μπορεί να σχεδιάσει κάποιος μια **διαδικασία εισαγωγής** στο πανεπιστήμιο ή μια **διαδικασία προσλήψεων**, η οποία να είναι **αυτοεπιβαλλόμενη** (self-enforcing) :

Ερώτημα...

Τι εννοούσαν με τον όρο **αυτοεπιβαλλόμενη** (self-enforcing) :



□ Ένα Πραγματικό Σενάριο



Μία ομάδα φίλων, τελειόφοιτοι του Τμήματός μας,
κάνουν αιτήματα σε εταιρείες πληροφορικής για καλοκαιρινή απασχόληση !!!

- Κάθε αιτών έχει μια **σειρά προτιμήσεων για τις εταιρείες!!!**
- Κάθε εταιρεία σχηματίζει – από την στιγμή που θα φθάσουν τα αιτήματα – μια **σειρά προτιμήσεων για τους αιτούντες φοιτητές μας !!!**



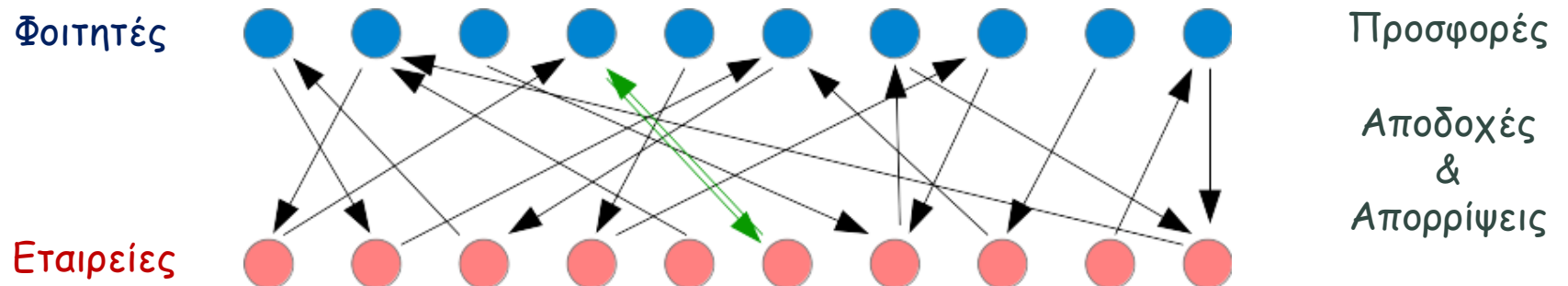
Διαδικασία: Με βάσει τις προτιμήσεις των φοιτητών, οι εταιρείες κάνουν **προσφορές σε αιτούντες φοιτητές** και οι **φοιτητές επιλέγουν** ποια προσφορά θα δεχθούν !!!

□ Ένα Πραγματικό Σενάριο



Διαδικασία: Με βάσει τις προτιμήσεις των φοιτητών, οι εταιρείες κάνουν προσφορές σε αιτούντες φοιτητές και οι φοιτητές επιλέγουν ποια προσφορά θα δεχθούν !!!

Τι θα μπορούσε να πάει «στραβά» σε αυτή την διαδικασία ;



□ Ένα Πραγματικό Σενάριο



Διαδικασία: Με βάσει τις προτιμήσεις των φοιτητών, οι εταιρείες κάνουν προσφορές σε αιτούντες φοιτητές και οι φοιτητές επιλέγουν ποια προσφορά θα δεχθούν !!!

Θα μπορούσε να συμβεί η εξής κατάσταση:

- Ο Νίκος αποδέχθηκε σήμερα την προσφορά της εταιρείας Access.
- Λίγες μέρες αργότερα, η εταιρεία Bull καλεί τον Νίκο και του προσφέρει καλοκαιρινή εργασία.
- Ο Νίκος προτιμά την Bull από την Access και έτσι παραιτείτε από την προσφορά της Access και αποδέχεται αυτή της Bull.
- Επειδή η Access έμεινε με ένα λιγότερο φοιτητή, προσφέρει εργασία σε κάποιον φοιτητή που βρίσκεται σε αναμονή, ο οποίος με προθυμία παραιτείτε από την προσφορά της Comet για να πάει στην Access, ...

και η κατάσταση παίρνει μορφή χιονοστιβάδας που βγαίνει εκτός ελέγχου !!!

□ Ένα Πραγματικό Σενάριο



Διαδικασία: Με βάσει τις προτιμήσεις των φοιτητών, οι εταιρείες κάνουν προσφορές σε αιτούντες φοιτητές και οι φοιτητές επιλέγουν ποια προσφορά θα δεχθούν !!!

Τα πράγματα είναι εξίσου άσχημα και από την άλλη πλευρά :

- Η Άννα, φίλη του Νίκου, που σκόπευε να πάει στην Comet, έχοντας ακούσει την ιστορία του Νίκου, καλεί την Bull και τους λέει: «Θα προτιμούσα να εργαστώ το καλοκαίρι σε εσάς και όχι στην Comet» !!!
- Η Bull πιστεύει την Άννα και, εξετάζοντας το βιογραφικό της, συνειδητοποιεί ότι θα προτιμούσε να είχε προσλάβει την Άννα στη θέση κάποιου άλλου φοιτητή που έχει ήδη δεχθεί να εργαστεί το καλοκαίρι στην Bull.
- Εάν η Bull ήταν εταιρεία με λιγότερους ηθικούς ενδοιασμούς, θα μπορούσε να βρει ένα τρόπο να αποσύρει την προσφορά από τον άλλο φοιτητή και να προσλάβει την Άννα.

Η κατάσταση επέφερε «χάος» με όλους τους εμπλεκόμενους «δυσαρεστημένους» !!!

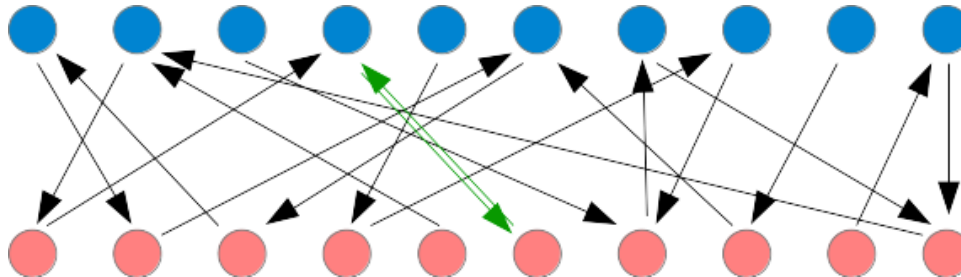
□ Ένα Πραγματικό Σενάριο



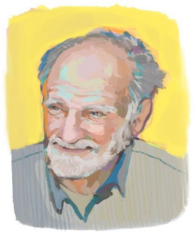
Διαδικασία: Με βάση τις προτιμήσεις των φοιτητών, οι εταιρείες κάνουν προσφορές σε αιτούντες φοιτητές και οι φοιτητές επιλέγουν ποια προσφορά θα δεχθούν !!!

Τι πήγε «στραβά» ;

- Οι Gale και Shapley εξέτασαν γιατί μια τέτοια διαδικασία μπορεί να πάει «στραβά»!!!



David Gale (1921-2008)
PROFESSOR, UC BERKELEY



Lloyd Shapley
PROFESSOR EMERITUS, UCLA

Από την διαδικασία
απουσίαζε κάποιος μηχανισμός
επιβολής μιας «τάξης» !!!

□ Ένα Πραγματικό Σενάριο



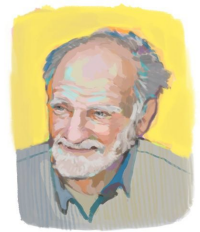
Διαδικασία: Με βάσει τις προτιμήσεις των φοιτητών, οι εταιρείες κάνουν προσφορές σε αιτούντες φοιτητές και οι φοιτητές επιλέγουν ποια προσφορά θα δεχθούν !!!

Τι πήγε «στραβά» ;

- Οι Gale και Shapley εξέτασαν γιατί μια τέτοια διαδικασία μπορεί να πάει «στραβά»!!!



David Gale (1921-2008)
PROFESSOR, UC BERKELEY



Lloyd Shapley
PROFESSOR EMERITUS, UCLA

Η διαδικασία δεν είναι αυτοεπιβαλλόμενη !!!

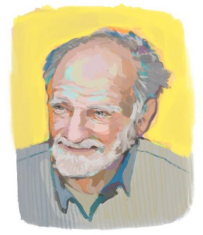
Θέλουμε μια **ευσταθή διαδικασία** στην οποία το ίδιο το προσωπικό συμφέρον εμποδίζει την **απόσυρση** και την **ανακατεύθυνση** προσφορών !!!

□ Ερώτημα Gale & Shapley

Μπορεί να σχεδιαστεί μια **διαδικασία προσλήψεων** η οποία να είναι αυτοεπιβαλλόμενη - να είναι **ευσταθής** (stable);



David Gale (1921-2008)
PROFESSOR, UC BERKELEY



Lloyd Shapley
PROFESSOR EMERITUS, UCLA

Οι **Gale & Shapley** όρισαν το **ευσταθές ταίριασμα** !!!

Ένα **ταίριασμα** «αιτούντων-εργοδοτών» είναι **ευσταθές** **εάν** για κάθε εργοδότη **E** και κάθε αιτούντα **A** που **δεν προορίζεται** να εργαστεί για τον **E**, ισχύει ένα από τα ακόλουθα:

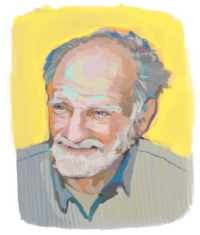
- (1) ο εργοδότης **E** προτιμά καθέναν από τους αιτούντες που έχει αποδεχθεί αντί του **A**, ή
- (2) ο αιτών **A** προτιμά τον τρέχοντα εργοδότη του από τον εργοδότη **E**.

□ Ερώτημα Gale & Shapley

Μπορεί να σχεδιαστεί μια διαδικασία προσλήψεων η οποία να είναι αυτοεπιβαλλόμενη - να είναι **ευσταθής** (stable);



David Gale (1921-2008)
PROFESSOR, UC BERKELEY



Lloyd Shapley
PROFESSOR EMERITUS, UCLA

Οι **Gale & Shapley** όρισαν το **ευσταθές ταίριασμα** !!!

Ευσταθές ταίριασμα = ταίριασμα χωρίς **ασταθή ζεύγη** !!!

Ένα **ταίριασμα** «αιτούντων-εργοδοτών» είναι **ευσταθές** **εάν** είναι ταίριασμα χωρίς **ασταθή ζευγάρια** !!!

Ασταθές Ζευγάρι (x, y) : Ο αιτών **x** και ο εργοδότης **y** είναι **ασταθές ζευγάρι** εάν:

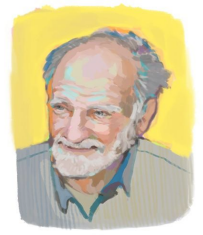
- ο αιτών **x** προτιμά τον εργοδότη **y** από τον τρέχοντα εργοδότη του, και
- ο εργοδότης **y** προτιμά τον αιτούντα **x** από κάποιον που έχει προσλάβει.

□ Ερώτημα Gale & Shapley

Μπορεί να σχεδιαστεί μια **διαδικασία προσλήψεων** η οποία να είναι αυτοεπιβαλλόμενη - να είναι **ευσταθής** (stable);



David Gale (1921-2008)
PROFESSOR, UC BERKELEY



Lloyd Shapley
PROFESSOR EMERITUS, UCLA

Οι **Gale & Shapley** όρισαν το **ευσταθές ταίριασμα** !!!

Ευσταθές ταίριασμα = ταίριασμα χωρίς **ασταθή ζεύγη** !!!

Το 1962 οι **Gale & Shapley** ανέπτυξαν μια εντυπωσιακή αλγοριθμική λύση για το πρόβλημα του **ευσταθούς ταιριάσματος** !!!

Αλγόριθμος απλός, γρήγορος, πολλές εφαρμογές !!!

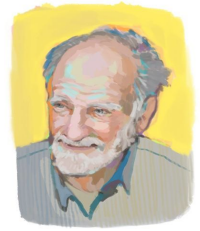
Λύση του προβλήματος των «ευσταθών γάμων» - γνωστό ως "stable marriage problem"

□ Λύση Gale & Shapley

Σχεδίαση διαδικασίας προσλήψεων η οποία είναι **ευσταθής**
(ευσταθές ταίριασμα - ταίριασμα χωρίς ασταθή ζευγάρια), 1962 !!!



David Gale (1921-2008)
PROFESSOR, UC BERKELEY



Lloyd Shapley
PROFESSOR EMERITUS, UCLA

**Prize in Economic Sciences
in Memory of Alfred Nobel
2012**



Photo: U. Montan
Alvin E. Roth
Prize share: 1/2



Photo: U. Montan
Lloyd S. Shapley
Prize share: 1/2

Lloyd S. Shapley και Alvin E. Roth, Νόμπελ Οικονομίας 2012

"for the theory of stable allocations and the practice of market design"
"για τη θεωρία των ευσταθών κατανομών και την πρακτική του σχεδιασμού αγορών".

Υποδειγματικός συνδυασμός θεωρητικής έρευνας (ο Lloyd Shapley, σε συνεργασία με τον David Gale, έλυσε το πρόβλημα των «σταθερών γάμων») και εφαρμοσμένης έρευνας (συνεισφορά του Roth και των συνεργατών του) που οδήγησε σε πολύ χρήσιμες εφαρμογές!!!

□ Πριν την Λύση Gale & Shapley

NRMP

Μια **10ετία πριν** τον αλγόριθμο των **Gale & Shapley**, χωρίς αυτοί να το γνωρίζουν, η υπηρεσία

National Resident Matching Program των ΗΠΑ

χρησιμοποιούσε μια ανάλογη διαδικασία, με το ίδιο κίνητρο, για να αναθέσει **Ειδικευόμενους Γιατρούς σε Νοσοκομεία !!!**

Διαδικασία αυτοεπιβαλλόμενη (ευσταθής, ανάθεση χωρίς ασταθή ζευγάρια)

- **Ειδικευόμενοι Γιατροί - Νοσοκομεία**
- Φοιτητές - Εταιρείες
- Αιτούντες - Εργοδότες

□ Υπηρεσία National Resident Matching Program

NRMP

Δεδομένου ενός συνόλου προτιμήσεων μεταξύ **Ειδικευόμενων Ιατρών** και **Νοσοκομείων**, εφαρμογή μιας **ευσταθούς διαδικασίας αναθέσεων** (ανάθεση **χωρίς ασταθή ζευγάρια**).

Ασταθές Ζευγάρι (x, y) : Ο ειδ. ιατρός x και το νοσοκομείο y είναι **ασταθές ζευγάρι** εάν:

- ο ειδ. ιατρός x προτιμά το νοσοκομείο y από κάποιο το οποίο του έχει ανατεθεί.
- το νοσοκομείο y προτιμά τον ειδ. ιατρό x από κάποιον ειδικευόμενο που έχει αποδεχθεί.

- ✓ Αρχική χρήση της υπηρεσίας NRMP αμέσως μετά τον Β' Παγκόσμιο Πόλεμο !!!
- ✓ Στοιχεία Μαρτίου 2005: περισσότεροι από 23.000 ειδικευόμενοι !!!
- ✓ Η NRMP εφαρμόζει, με σχετικά μικρές αλλαγές, μέχρι και σήμερα την ίδια διαδικασία !!!

□ Απλοποίηση του Προβλήματος των Προσλήψεων

Δεδομένου ενός συνόλου προτιμήσεων μεταξύ **Αιτούντων** και **Εργοδοτών**, σχεδιάσε μια **ευσταθή** διαδικασία προσλήψεων.



- Ο κόσμος των **Αιτούντων** και των **Εργοδοτών** έχει κάποιες ασυμμετρίες που δεν μας βοηθούν... τουλάχιστον τώρα στην αρχή της μελέτης του προβλήματος !!!
 - ✓ Κάθε υποψήφιος αναζητά μια μοναδική εταιρεία, ενώ κάθε εταιρεία αναζητά πολλούς υποψηφίους !!!
 - ✓ Μπορεί να υπάρχουν περισσότεροι αιτούντες από τις διαθέσιμες θέσεις μιας εταιρείας !!!
 - ✓ Ο κάθε υποψήφιος συνήθως δεν κάνει αίτηση σε όλες τις εταιρείες !!!

□ Απλοποίηση του Προβλήματος των Προσλήψεων

Δεδομένου ενός συνόλου προτιμήσεων μεταξύ **Αιτούντων** και **Εργοδοτών**, σχεδιάσε μια **ευσταθή** διαδικασία προσλήψεων.



- Εξαλείφουμε, τουλάχιστον τώρα στην αρχή, αυτές της περιπλοκές και παίρνουμε μια πιο «απλή» εκδοχή του προβλήματος:

- ✓ Καθένας από τους n Υποψήφιους κάνει αίτηση σε n Εταιρείες, και
- ✓ κάθε Εταιρεία θέλει να προσλάβει **μόνο ένα** Υποψήφιο !!!
- ✓ Κάθε υποψήφιος **κατατάσσει τις εταιρείες** σε μια σειρά προτίμησης και **κάθε εταιρεία κατατάσσει τους υποψηφίους** σε μια δική της σειρά προτίμησης !!!

□ Απλοποίηση του Προβλήματος των Προσλήψεων

Δεδομένου ενός συνόλου προτιμήσεων μεταξύ **Αιτούντων** και **Εργοδοτών**, σχεδιάσε μια **ευσταθή** διαδικασία προσλήψεων.



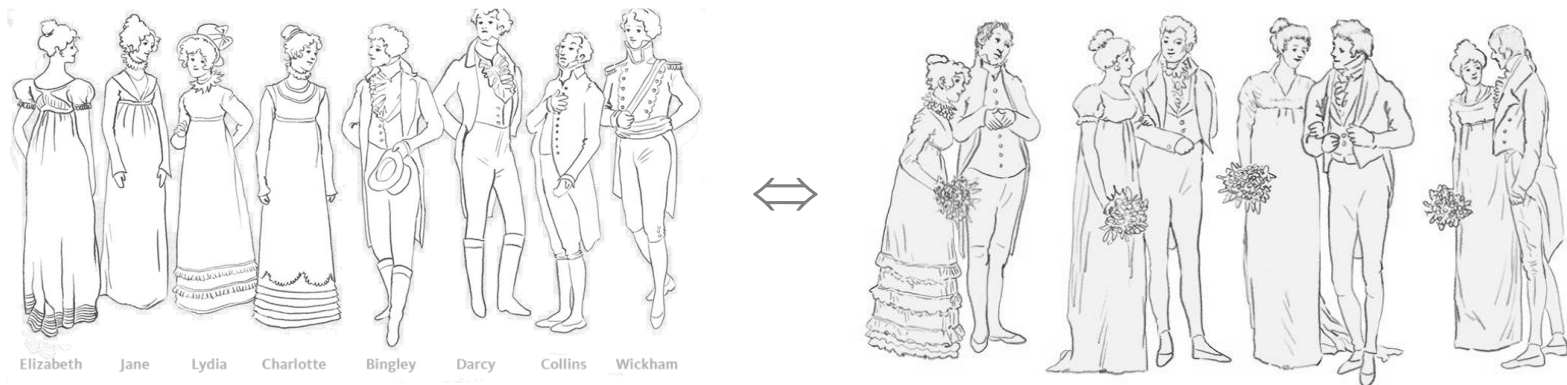
- Οι **Gale & Shapley** παρατήρησαν ότι η εκδοχή αυτή του προβλήματος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την σχεδίαση ενός συστήματος με βάσει το οποίο :

η άνδρες και η γυναίκες καταλήγουν σε γάμο !!!

- ✓ Κάθε **άνδρας** κατατάσσει τις **γυναίκες** σε μια σειρά **προτίμησης** και **κάθε γυναίκα** κατατάσσει τους **άνδρες** σε μια δική της σειρά **προτίμησης** !!!

□ Πρόβλημα Ευσταθών Γάμων

Δεδομένου ενός συνόλου προτιμήσεων μεταξύ **n Ανδρών** και **n Γυναικών**, σχεδίασε μια **ευσταθή** διαδικασία γάμου (ταίριασμα «ανδρών-γυναικών» **χωρίς ασταθή ζευγάρια**).



✓ Θέλουμε **n άνδρες** και **n γυναίκες** να καταλήξουν σε γάμο !!!

□ Πρόβλημα Ευσταθών Γάμων

Δεδομένου ενός συνόλου προτιμήσεων μεταξύ n Ανδρών και n Γυναικών, σχεδιάσε μια ευσταθή διαδικασία γάμου (ταίριασμα «ανδρών-γυναικών» χωρίς ασταθή ζευγάρια).

Διαδικασία αυτοεπιβαλλόμενη (ευσταθής, ανάθεση χωρίς ασταθή ζευγάρια)

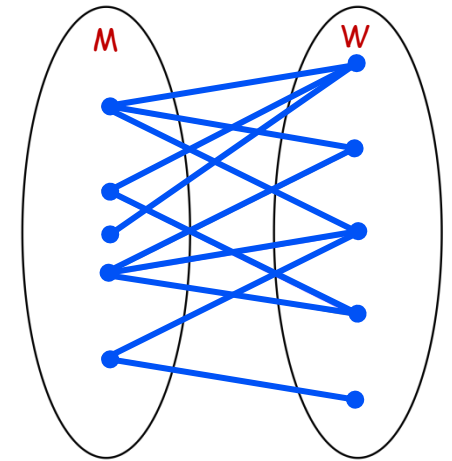
- Άνδρες - Γυναίκες
- Ειδικευόμενοι Γιατροί - Νοσοκομεία
- Φοιτητές - Εταιρείες
- Αιτούντες - Εργοδότες



✓ Θέλουμε n άνδρες και n γυναίκες να καταλήξουν σε γάμο !!!

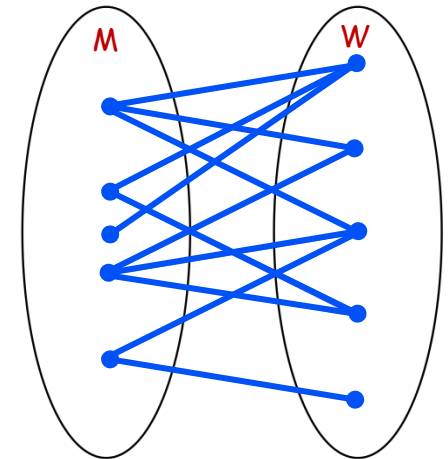
□ Τυπική Διατύπωση του Προβλήματος

- Δύο σύνολα : $M = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ από n άνδρες και $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ από n γυναίκες.
- $M \times W$: Το σύνολο όλων των διατεταγμένων ζευγών (m, n) , όπου $m \in M$ και $w \in W$.



□ Τυπική Διατύπωση του Προβλήματος

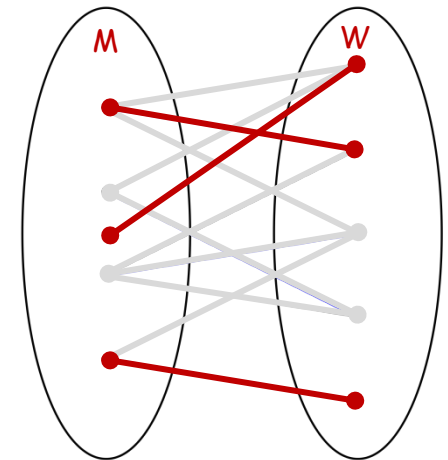
- Δύο σύνολα : $M = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ από n άνδρες και $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ από n γυναίκες.
- $M \times W$: Το σύνολο όλων των διατεταγμένων ζευγών (m, n) , όπου $m \in M$ και $w \in W$.
- Ταίριασμα (matching) S :
Σύνολο διατεταγμένων ζευγών $(m, n) \in M \times W$ με την ιδιότητα κάθε $m \in M$ και κάθε $w \in W$ εμφανίζεται το πολύ σε ένα ζεύγος του S .



□ Τυπική Διατύπωση του Προβλήματος

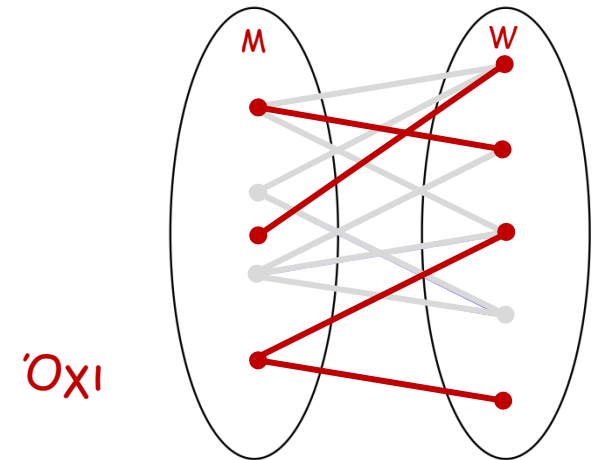
- Δύο σύνολα : $M = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ από n άνδρες και $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ από n γυναίκες.
- $M \times W$: Το σύνολο όλων των διατεταγμένων ζευγών (m, n) , όπου $m \in M$ και $w \in W$.
- Ταίριασμα (matching) S :
Σύνολο διατεταγμένων ζευγών $(m, n) \in M \times W$ με την ιδιότητα κάθε $m \in M$ και κάθε $w \in W$ εμφανίζεται το πολύ σε ένα ζεύγος του S .

Ναι



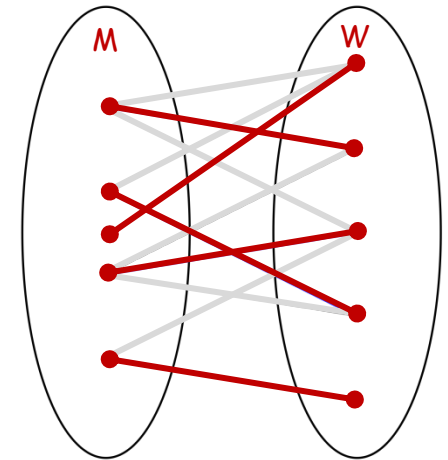
□ Τυπική Διατύπωση του Προβλήματος

- Δύο σύνολα : $M = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ από n άνδρες και $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ από n γυναίκες.
- $M \times W$: Το σύνολο όλων των διατεταγμένων ζευγών (m, n) , όπου $m \in M$ και $w \in W$.
- Ταίριασμα (matching) S :
Σύνολο διατεταγμένων ζευγών $(m, n) \in M \times W$ με την ιδιότητα κάθε $m \in M$ και κάθε $w \in W$ εμφανίζεται το πολύ σε ένα ζεύγος του S .



□ Τυπική Διατύπωση του Προβλήματος

- Δύο σύνολα : $M = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ από n άνδρες και $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ από n γυναίκες.
- $M \times W$: Το σύνολο όλων των διατεταγμένων ζευγών (m, n) , όπου $m \in M$ και $w \in W$.
- Ταίριασμα (matching) S :
Σύνολο διατεταγμένων ζευγών $(m, n) \in M \times W$ με την ιδιότητα κάθε $m \in M$ και κάθε $w \in W$ εμφανίζεται το πολύ σε ένα ζεύγος του S .
- Τέλειο Ταίριασμα (perfect matching) S^* :
Ταίριασμα με την ιδιότητα κάθε $m \in M$ και κάθε $w \in W$ εμφανίζεται σε ακριβώς ένα ζεύγος του S^* .



Πρόβλημα Ευσταθούς Ταιριάσματος

□ Τυπική Διατύπωση του Προβλήματος

- Δύο σύνολα : $M = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ από n άνδρες και $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ από n γυναίκες.

- Βαθμός Προτίμησης $Pr(m, w)$:

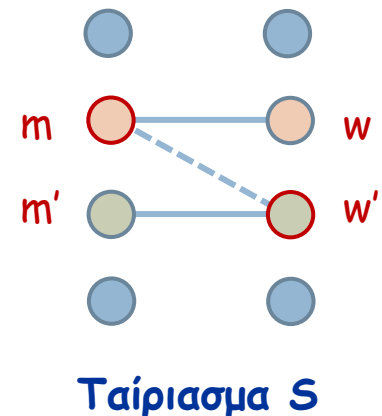
Για κάθε $m \in M$ και κάθε $w \in W$ ορίζουμε τον *βαθμό προτίμησης* $Pr(m, w)$ του m για το w να είναι ένας ακέραιος στο διάστημα $[1, n]$. Αντίστοιχα, ορίζουμε τον βαθμό προτίμησης $Pr(w, m)$ του w για το m .

- Ασταθές Ταίριασμα:

Ένα ταίριασμα S είναι *ασταθές* εάν υπάρχουν δύο στοιχεία (m, w) και (m', w') του S τέτοια ώστε:

$$Pr(m, w') > Pr(m, w) \quad \text{και} \quad Pr(w', m) > Pr(w', m')$$

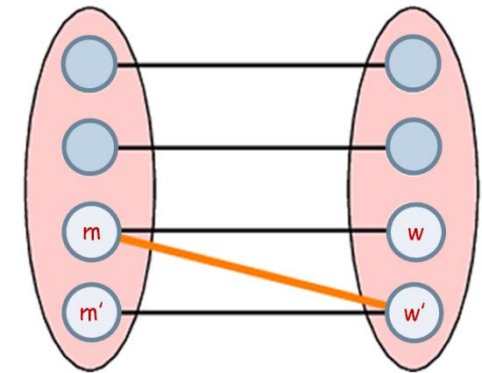
- Το ζεύγος στοιχείων $(m, w') \notin S$ ονομάζεται *ασταθές ζεύγος* για το S .



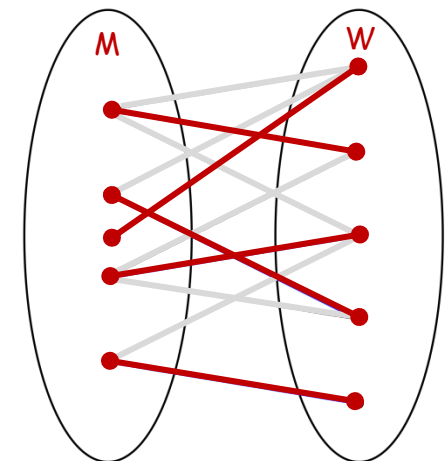
Πρόβλημα Ευσταθούς Ταιριάσματος

□ Τυπική Διατύπωση του Προβλήματος

- **Ευστάθεια:** Δεν υπάρχει κίνητρο για κάποιο ζευγάρι συμμετεχόντων να υπονομεύσουν από κοινού την ανάθεση.
 - Έστω ένα **ασταθές** ζευγάρι $m-w'$ σε ένα ταίριασμα S .
 - Το ασταθές ζευγάρι $m-w'$ θα μπορούσε να «καλυτερεύσει την κατάσταση του ταιριάσματος» εάν απαιτούσε $(m, w') \in S$!!!
 - Τότε, $(m, w) \notin S$ και $(m', w') \notin S$
- **Ευσταθές Ταίριασμα:** Τέλειο ταίριασμα χωρίς ασταθή ζευγάρια !!!

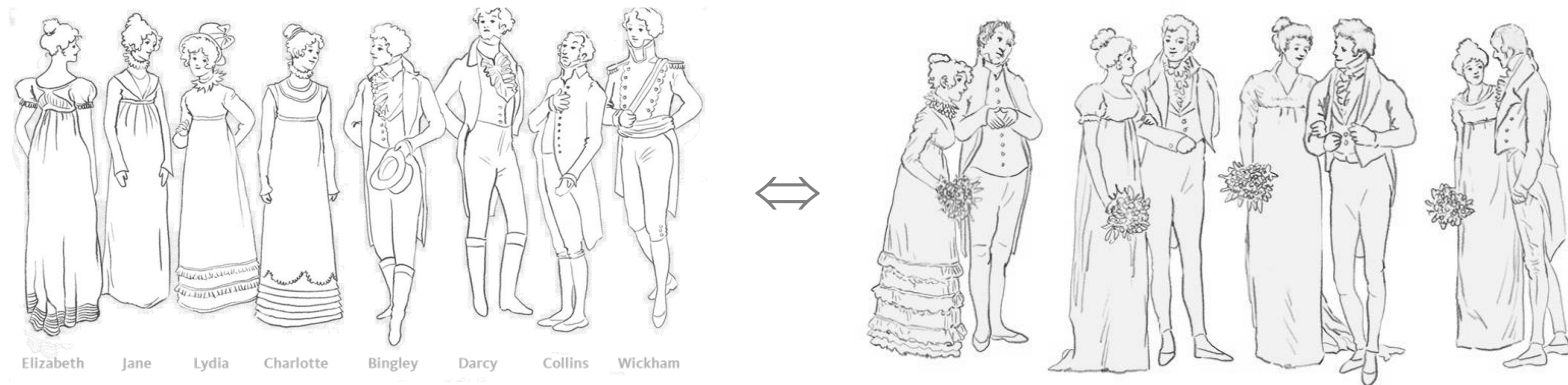


Ταίριασμα S



□ Τυπική Διατύπωση του Προβλήματος

- Τέλειο Ταίριασμα «Άνδρες-Γυναίκες»: 1 άνδρας $\Leftrightarrow$ 1 γυναίκα !!!

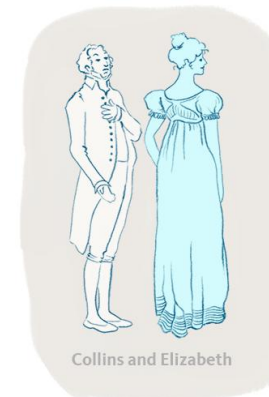


- ✓ Θέλουμε η διαδικασία να καταλήγει σε **τέλειο ταίριασμα** (κάθε άνδρας να έχει μια γυναίκα και κάθε γυναίκα να έχει έναν άνδρα) !!!

Πρόβλημα Ευσταθών Γάμων

□ Τυπική Διατύπωση του Προβλήματος

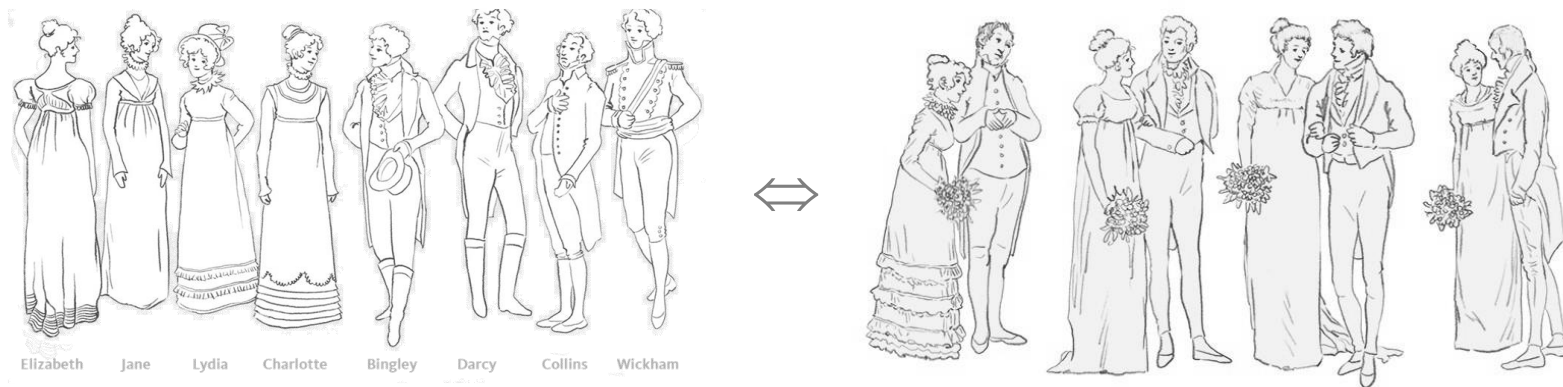
- Ασταθές Ζευγάρι (x, y): Ο άνδρας x και η γυναίκα y προτιμούν ο ένας τον άλλον από τους τωρινούς συντρόφους τους !!!



- ✓ Θέλουμε η διαδικασία να καταλήγει σε τέλειο ταίριασμα χωρίς ασταθή ζευγάρια !!!

□ Πρόβλημα Ευσταθών Γάμων

Δεδομένου ενός συνόλου προτιμήσεων μεταξύ n Ανδρών και n Γυναικών, βρείτε ένα ευσταθές ταίριασμα «ανδρών-γυναικών» εάν υπάρχει.



✓ Ευσταθές ταίριασμα = τέλειο ταίριασμα χωρίς ασταθή ζευγάρια !!!

Αλγόριθμος Gale & Shapley

□ Αλγόριθμος Ευσταθών Γάμων



n άνδρες



n γυναίκες

- Από n άντρες και n γυναίκες, βρείτε το «κατάλληλο ταίρι» για κάθε άνδρα και για κάθε γυναίκα !!!
- **Στόχος !!!... Τέλειο Ταίριασμα χωρίς Ασταθή Ζευγάρια**

□ Αλγόριθμος Ευσταθών Γάμων

Οι συμμετέχοντες άνδρες και γυναίκες **βαθμολογούν** μέλη του αντίθετου φύλου.

- Κάθε άνδρας **κατατάσσει**
 - τις γυναίκες με σειρά προτίμησης από την καλύτερη στη χειρότερη !!!
- Κάθε γυναίκα **κατατάσσει**
 - τους άνδρες με σειρά προτίμησης από τον καλύτερο στο χειρότερο !!!

	προτιμώμενη ↓ 1 ^η	ελάχιστα προτιμώμενη ↓ 2 ^η	3 ^η
Κώστας	Άννα	Μαρία	Ελένη
Νίκος	Μαρία	Άννα	Ελένη
Πέτρος	Άννα	Μαρία	Ελένη

Προφίλ Προτιμήσεων Ανδρών

	προτιμώμενος ↓ 1 ^{ος}	ελάχιστα προτιμώμενος ↓ 2 ^{ος}	3 ^{ος}
Άννα	Νίκος	Κώστας	Πέτρος
Μαρία	Κώστας	Νίκος	Πέτρος
Ελένη	Κώστας	Νίκος	Πέτρος

Προφίλ Προτιμήσεων Γυναικών

Αλγόριθμος Gale & Shapley

□ Παραδείγματα : A

□ Ερώτηση: Είναι η ανάθεση Κ-Ε, Ν-Μ, Π-Α ευσταθής ?

	προτιμώμενη ↓ 1 ^η	ελάχιστα προτιμώμενη ↓ 2 ^η	3 ^η
Κώστας	Άννα	Μαρία	Ελένη
Νίκος	Μαρία	Άννα	Ελένη
Πέτρος	Άννα	Μαρία	Ελένη

Προφίλ Προτιμήσεων Ανδρών

	προτιμώμενος ↓ 1 ^{ος}	ελάχιστα προτιμώμενος ↓ 2 ^{ος}	3 ^{ος}
Άννα	Νίκος	Κώστας	Πέτρος
Μαρία	Κώστας	Νίκος	Πέτρος
Ελένη	Κώστας	Νίκος	Πέτρος

Προφίλ Προτιμήσεων Γυναικών

Αλγόριθμος Gale & Shapley

□ Παραδείγματα : Α

- Ερώτηση: Είναι η ανάθεση Κ-Ε, Ν-Μ, Π-Α ευσταθής ?
- Απάντηση: Όχι δεν είναι, η Μαρία ο Κώστας θα γίνουν ζευγάρι απατώντας τους συντρόφους της τωρινής ανάθεσης !!!

	1 ^η	2 ^η	3 ^η
Κώστας	Άννα	Μαρία	Ελένη
Νίκος	Μαρία	Άννα	Ελένη
Πέτρος	Άννα	Μαρία	Ελένη

Προφίλ Προτιμήσεων Ανδρών

	1 ^{ος}	2 ^{ος}	3 ^{ος}
Άννα	Νίκος	Κώστας	Πέτρος
Μαρία	Κώστας	Νίκος	Πέτρος
Ελένη	Κώστας	Νίκος	Πέτρος

Προφίλ Προτιμήσεων Γυναικών

□ Παραδείγματα : Α

- Ερώτηση: Είναι η ανάθεση Κ-Α, Ν-Μ, Π-Ε ευσταθής ?
- Απάντηση: Ναι.

	1 ^η	2 ^η	3 ^η
Κώστας	Άννα	Μαρία	Ελένη
Νίκος	Μαρία	Άννα	Ελένη
Πέτρος	Άννα	Μαρία	Ελένη

Προφίλ Προτιμήσεων Ανδρών

	1 ^{ος}	2 ^{ος}	3 ^{ος}
Άννα	Νίκος	Κώστας	Πέτρος
Μαρία	Κώστας	Νίκος	Πέτρος
Ελένη	Κώστας	Νίκος	Πέτρος

Προφίλ Προτιμήσεων Γυναικών

□ Παραδείγματα : 1

- Τέλεια Ταιριάσματα: (Κώστας-Άννα, Νίκος-Μαρία)
(Κώστας-Μαρία, Νίκος - Άννα)

	1 ^η	2 ^η
Κώστας	Άννα	Μαρία
Νίκος	Άννα	Μαρία

Προφίλ Προτιμήσεων Ανδρών

	1 ^{ος}	2 ^{ος}
Άννα	Κώστας	Νίκος
Μαρία	Κώστας	Νίκος

Προφίλ Προτιμήσεων Γυναικών

□ Παραδείγματα : 1

- Τέλεια Ταιριάσματα: (Κώστας-Άννα, Νίκος-Μαρία)
(Κώστας-Μαρία, Νίκος - Άννα)
- Το ταίριασμα (Κώστας-Άννα, Νίκος-Μαρία) είναι **ευσταθές !!!**

	1 ^η	2 ^η
Κώστας	Άννα	Μαρία
Νίκος	Άννα	Μαρία

Προφίλ Προτιμήσεων Ανδρών

	1 ^{ος}	2 ^{ος}
Άννα	Κώστας	Νίκος
Μαρία	Κώστας	Νίκος

Προφίλ Προτιμήσεων Γυναικών

□ Παραδείγματα : 1

- Τέλεια Ταιριάσματα: (Κώστας-Άννα, Νίκος-Μαρία)
(Κώστας-Μαρία, Νίκος - Άννα)
- Το ταίριασμα (Κώστας-Μαρία, Νίκος - Άννα) δεν είναι **ευσταθές (Κ-Α) !!!**

	1 ^η	2 ^η
Κώστας	Άννα	Μαρία
Νίκος	Άννα	Μαρία

Προφίλ Προτιμήσεων Ανδρών

	1 ^{ος}	2 ^{ος}
Άννα	Κώστας	Νίκος
Μαρία	Κώστας	Νίκος

Προφίλ Προτιμήσεων Γυναικών

□ Παραδείγματα : 2

- Τέλεια Ταιριάσματα: (Κώστας-Άννα, Νίκος-Μαρία)
(Κώστας-Μαρία, Νίκος - Άννα)

	1 ^η	2 ^η
Κώστας	Άννα	Μαρία
Νίκος	Μαρία	Άννα

Προφίλ Προτιμήσεων Ανδρών

	1 ^{ος}	2 ^{ος}
Άννα	Νίκος	Κώστας
Μαρία	Κώστας	Νίκος

Προφίλ Προτιμήσεων Γυναικών

□ Παραδείγματα : 2

- Τέλεια Ταιριάσματα: (Κώστας-Άννα, Νίκος-Μαρία)
(Κώστας-Μαρία, Νίκος - Άννα)
- Το ταίριασμα (Κώστας-Άννα, Νίκος-Μαρία) είναι **ευσταθές**, άντρες 😊 !!!

	1 ^η	2 ^η
Κώστας	Άννα	Μαρία
Νίκος	Μαρία	Άννα

Προφίλ Προτιμήσεων Ανδρών

	1 ^{ος}	2 ^{ος}
Άννα	Νίκος	Κώστας
Μαρία	Κώστας	Νίκος

Προφίλ Προτιμήσεων Γυναικών

□ Παραδείγματα : 2

- Τέλεια Ταιριάσματα: (Κώστας-Άννα, Νίκος-Μαρία)
(Κώστας-Μαρία, Νίκος - Άννα)
- Το ταίριασμα (Κώστας-Μαρία, Νίκος-Άννα) είναι **ευσταθές**, γυναίκες 😊 !!!

	1 ^η	2 ^η
Κώστας	Άννα	Μαρία
Νίκος	Μαρία	Άννα

Προφίλ Προτιμήσεων Ανδρών

	1 ^{ος}	2 ^{ος}
Άννα	Νίκος	Κώστας
Μαρία	Κώστας	Νίκος

Προφίλ Προτιμήσεων Γυναικών

Αλγόριθμος Πρότασης-και-Απόρριψης



- ❑ Αλγόριθμος *Πρότασης-και-Απόρριψης* (Propose-and-Reject algorithm) των *Gale-Shapley, 1962*.
- ❑ Διαισθητική μέθοδος που μας εγγυάται την εύρεση ενός ευσταθούς ταιριάσματος.

Αλγόριθμος Πρότασης-και-Απόρριψης



Gale-Shapley 1962

```
Αρχικά κάθε άτομο είναι ελεύθερο
while (κάποιος άνδρας είναι ελεύθερος και δεν έχει κάνει
      πρόταση σε κάθε γυναίκα)
  Διάλεξε έναν τέτοιο άνδρα m
  w = 1η γυναίκα της λίστας του m στην οποία δεν έχει
    κάνει ακόμα πρόταση
  if (w είναι ελεύθερη)
    m και w δεσμεύονται
  else if (w προτιμά τον m από τον τωρινό σύντροφο m')
    m και w δεσμεύονται, και ο m' γίνεται ελεύθερος
  else
    η w απορρίπτει τον m
end-while
```



Παράδειγμα Αλγορίθμου Πρότασης-και-Απόρριψης



Λίστα Προτίμησης Ανδρών

	1 ^η	2 ^η	3 ^η	4 ^η	5 ^η
Αδάμ	Βάσω	Άννα	Δανάη	Έρρικα	Γωγώ
Βάιος	Δανάη	Βάσω	Άννα	Γωγώ	Έρρικα
Γιάννης	Βάσω	Έρρικα	Γωγώ	Δανάη	Άννα
Δήμος	Άννα	Δανάη	Γωγώ	Βάσω	Έρρικα
Έκτορας	Βάσω	Δανάη	Άννα	Έρρικα	Γωγώ

Λίστα Προτίμησης Γυναικών

	1 ^{ος}	2 ^{ος}	3 ^{ος}	4 ^{ος}	5 ^{ος}
Άννα	Έκτορας	Αδάμ	Βάιος	Δήμος	Γιάννης
Βάσω	Γιάννης	Βάιος	Δήμος	Αδάμ	Έκτορας
Γωγώ	Βάιος	Γιάννης	Δήμος	Έκτορας	Αδάμ
Δανάη	Αδάμ	Έκτορας	Δήμος	Γιάννης	Βάιος
Έρρικα	Δήμος	Βάιος	Έκτορας	Γιάννης	Αδάμ



Παράδειγμα Αλγορίθμου Πρότασης-και-Απόρριψης

Λίστα Προτίμησης Ανδρών

	1 ^η	2 ^η	3 ^η	4 ^η	5 ^η
Αδάμ	Βάσω	Άννα	Δανάη	Έρρικα	Γωγώ
Βάιος	Δανάη	Βάσω	Άννα	Γωγώ	Έρρικα
Γιάννης	Βάσω	Έρρικα	Γωγώ	Δανάη	Άννα
Δήμος	Άννα	Δανάη	Γωγώ	Βάσω	Έρρικα
Έκτορας	Βάσω	Δανάη	Άννα	Έρρικα	Γωγώ



Ο Αδάμ κάνει πρόταση στην Βάσω

Λίστα Προτίμησης Γυναικών

	1 ^{ος}	2 ^{ος}	3 ^{ος}	4 ^{ος}	5 ^{ος}
Άννα	Έκτορας	Αδάμ	Βάιος	Δήμος	Γιάννης
Βάσω	Γιάννης	Βάιος	Δήμος	Αδάμ	Έκτορας
Γωγώ	Βάιος	Γιάννης	Δήμος	Έκτορας	Αδάμ
Δανάη	Αδάμ	Έκτορας	Δήμος	Γιάννης	Βάιος
Έρρικα	Δήμος	Βάιος	Έκτορας	Γιάννης	Αδάμ

Παράδειγμα Αλγορίθμου Πρότασης-και-Απόρριψης

Λίστα Προτίμησης Ανδρών

	1 ^η	2 ^η	3 ^η	4 ^η	5 ^η
Αδάμ	Βάσω	Άννα	Δανάη	Έρρικα	Γωγώ
Βάιος	Δανάη	Βάσω	Άννα	Γωγώ	Έρρικα
Γιάννης	Βάσω	Έρρικα	Γωγώ	Δανάη	Άννα
Δήμος	Άννα	Δανάη	Γωγώ	Βάσω	Έρρικα
Έκτορας	Βάσω	Δανάη	Άννα	Έρρικα	Γωγώ



Ο Αδάμ κάνει πρόταση στην Βάσω
- Η Βάσω δέχεται γιατί δεν έχει
ταίρι.

Λίστα Προτίμησης Γυναικών

	1 ^{ος}	2 ^{ος}	3 ^{ος}	4 ^{ος}	5 ^{ος}
Άννα	Έκτορας	Αδάμ	Βάιος	Δήμος	Γιάννης
Βάσω	Γιάννης	Βάιος	Δήμος	Αδάμ	Έκτορας
Γωγώ	Βάιος	Γιάννης	Δήμος	Έκτορας	Αδάμ
Δανάη	Αδάμ	Έκτορας	Δήμος	Γιάννης	Βάιος
Έρρικα	Δήμος	Βάιος	Έκτορας	Γιάννης	Αδάμ

Παράδειγμα Αλγορίθμου Πρότασης-και-Απόρριψης

Λίστα Προτίμησης Ανδρών

	1 ^η	2 ^η	3 ^η	4 ^η	5 ^η
Αδάμ	Βάσω	Άννα	Δανάη	Έρρικα	Γωγώ
Βάιος	Δανάη	Βάσω	Άννα	Γωγώ	Έρρικα
Γιάννης	Βάσω	Έρρικα	Γωγώ	Δανάη	Άννα
Δήμος	Άννα	Δανάη	Γωγώ	Βάσω	Έρρικα
Έκτορας	Βάσω	Δανάη	Άννα	Έρρικα	Γωγώ



Ο Βάιος κάνει πρόταση στην
Δανάη

Λίστα Προτίμησης Γυναικών

	1 ^{ος}	2 ^{ος}	3 ^{ος}	4 ^{ος}	5 ^{ος}
Άννα	Έκτορας	Αδάμ	Βάιος	Δήμος	Γιάννης
Βάσω	Γιάννης	Βάιος	Δήμος	Αδάμ	Έκτορας
Γωγώ	Βάιος	Γιάννης	Δήμος	Έκτορας	Αδάμ
Δανάη	Αδάμ	Έκτορας	Δήμος	Γιάννης	Βάιος
Έρρικα	Δήμος	Βάιος	Έκτορας	Γιάννης	Αδάμ

Παράδειγμα Αλγορίθμου Πρότασης-και-Απόρριψης

Λίστα Προτίμησης Ανδρών

	1 ^η	2 ^η	3 ^η	4 ^η	5 ^η
Αδάμ	Βάσω	Άννα	Δανάη	Έρρικα	Γωγώ
Βάιος	Δανάη	Βάσω	Άννα	Γωγώ	Έρρικα
Γιάννης	Βάσω	Έρρικα	Γωγώ	Δανάη	Άννα
Δήμος	Άννα	Δανάη	Γωγώ	Βάσω	Έρρικα
Έκτορας	Βάσω	Δανάη	Άννα	Έρρικα	Γωγώ



Ο Βάιος κάνει πρόταση στην Δανάη
- Η Δανάη δέχεται γιατί δεν έχει
ταίρι

Λίστα Προτίμησης Γυναικών

	1 ^{ος}	2 ^{ος}	3 ^{ος}	4 ^{ος}	5 ^{ος}
Άννα	Έκτορας	Αδάμ	Βάιος	Δήμος	Γιάννης
Βάσω	Γιάννης	Βάιος	Δήμος	Αδάμ	Έκτορας
Γωγώ	Βάιος	Γιάννης	Δήμος	Έκτορας	Αδάμ
Δανάη	Αδάμ	Έκτορας	Δήμος	Γιάννης	Βάιος
Έρρικα	Δήμος	Βάιος	Έκτορας	Γιάννης	Αδάμ

Παράδειγμα Αλγορίθμου Πρότασης-και-Απόρριψης

Λίστα Προτίμησης Ανδρών

	1 ^η	2 ^η	3 ^η	4 ^η	5 ^η
Αδάμ	Βάσω	Άννα	Δανάη	Έρρικα	Γωγώ
Βάιος	Δανάη	Βάσω	Άννα	Γωγώ	Έρρικα
Γιάννης	Βάσω	Έρρικα	Γωγώ	Δανάη	Άννα
Δήμος	Άννα	Δανάη	Γωγώ	Βάσω	Έρρικα
Έκτορας	Βάσω	Δανάη	Άννα	Έρρικα	Γωγώ



Ο Γιάννης κάνει πρόταση στην Βάσω

Λίστα Προτίμησης Γυναικών

	1 ^{ος}	2 ^{ος}	3 ^{ος}	4 ^{ος}	5 ^{ος}
Άννα	Έκτορας	Αδάμ	Βάιος	Δήμος	Γιάννης
Βάσω	Γιάννης	Βάιος	Δήμος	Αδάμ	Έκτορας
Γωγώ	Βάιος	Γιάννης	Δήμος	Έκτορας	Αδάμ
Δανάη	Αδάμ	Έκτορας	Δήμος	Γιάννης	Βάιος
Έρρικα	Δήμος	Βάιος	Έκτορας	Γιάννης	Αδάμ

Παράδειγμα Αλγορίθμου Πρότασης-και-Απόρριψης

Λίστα Προτίμησης Ανδρών

	1 ^η	2 ^η	3 ^η	4 ^η	5 ^η
Αδάμ	Βάσω	Άννα	Δανάη	Έρρικα	Γωγώ
Βάιος	Δανάη	Βάσω	Άννα	Γωγώ	Έρρικα
Γιάννης	Βάσω	Έρρικα	Γωγώ	Δανάη	Άννα
Δήμος	Άννα	Δανάη	Γωγώ	Βάσω	Έρρικα
Έκτορας	Βάσω	Δανάη	Άννα	Έρρικα	Γωγώ



Ο Γιάννης κάνει πρόταση στην Βάσω
- Η Βάσω αφήνει τον Αδάμ και
δέχεται τον Γιάννη

Λίστα Προτίμησης Γυναικών

	1 ^{ος}	2 ^{ος}	3 ^{ος}	4 ^{ος}	5 ^{ος}
Άννα	Έκτορας	Αδάμ	Βάιος	Δήμος	Γιάννης
Βάσω	Γιάννης	Βάιος	Δήμος	Αδάμ	Έκτορας
Γωγώ	Βάιος	Γιάννης	Δήμος	Έκτορας	Αδάμ
Δανάη	Αδάμ	Έκτορας	Δήμος	Γιάννης	Βάιος
Έρρικα	Δήμος	Βάιος	Έκτορας	Γιάννης	Αδάμ

Παράδειγμα Αλγορίθμου Πρότασης-και-Απόρριψης

Λίστα Προτίμησης Ανδρών

	1 ^η	2 ^η	3 ^η	4 ^η	5 ^η
Αδάμ	Βάσω	Άννα	Δανάη	Έρρικα	Γωγώ
Βάιος	Δανάη	Βάσω	Άννα	Γωγώ	Έρρικα
Γιάννης	Βάσω	Έρρικα	Γωγώ	Δανάη	Άννα
Δήμος	Άννα	Δανάη	Γωγώ	Βάσω	Έρρικα
Έκτορας	Βάσω	Δανάη	Άννα	Έρρικα	Γωγώ



Ο Αδάμ κάνει πρόταση στην Άννα

Λίστα Προτίμησης Γυναικών

	1 ^{ος}	2 ^{ος}	3 ^{ος}	4 ^{ος}	5 ^{ος}
Άννα	Έκτορας	Αδάμ	Βάιος	Δήμος	Γιάννης
Βάσω	Γιάννης	Βάιος	Δήμος	Αδάμ	Έκτορας
Γωγώ	Βάιος	Γιάννης	Δήμος	Έκτορας	Αδάμ
Δανάη	Αδάμ	Έκτορας	Δήμος	Γιάννης	Βάιος
Έρρικα	Δήμος	Βάιος	Έκτορας	Γιάννης	Αδάμ

Παράδειγμα Αλγορίθμου Πρότασης-και-Απόρριψης

Λίστα Προτίμησης Ανδρών

	1 ^η	2 ^η	3 ^η	4 ^η	5 ^η
Αδάμ	Βάσω	Άννα	Δανάη	Έρρικα	Γωγώ
Βάιος	Δανάη	Βάσω	Άννα	Γωγώ	Έρρικα
Γιάννης	Βάσω	Έρρικα	Γωγώ	Δανάη	Άννα
Δήμος	Άννα	Δανάη	Γωγώ	Βάσω	Έρρικα
Έκτορας	Βάσω	Δανάη	Άννα	Έρρικα	Γωγώ



Ο Αδάμ κάνει πρόταση στην Άννα
- Η Άννα δέχεται γιατί δεν έχει
ταίρι

Λίστα Προτίμησης Γυναικών

	1 ^{ος}	2 ^{ος}	3 ^{ος}	4 ^{ος}	5 ^{ος}
Άννα	Έκτορας	Αδάμ	Βάιος	Δήμος	Γιάννης
Βάσω	Γιάννης	Βάιος	Δήμος	Αδάμ	Έκτορας
Γωγώ	Βάιος	Γιάννης	Δήμος	Έκτορας	Αδάμ
Δανάη	Αδάμ	Έκτορας	Δήμος	Γιάννης	Βάιος
Έρρικα	Δήμος	Βάιος	Έκτορας	Γιάννης	Αδάμ

Παράδειγμα Αλγορίθμου Πρότασης-και-Απόρριψης

Λίστα Προτίμησης Ανδρών

	1 ^η	2 ^η	3 ^η	4 ^η	5 ^η
Αδάμ	Βάσω	Άννα	Δανάη	Έρρικα	Γωγώ
Βάιος	Δανάη	Βάσω	Άννα	Γωγώ	Έρρικα
Γιάννης	Βάσω	Έρρικα	Γωγώ	Δανάη	Άννα
Δήμος	Άννα	Δανάη	Γωγώ	Βάσω	Έρρικα
Έκτορας	Βάσω	Δανάη	Άννα	Έρρικα	Γωγώ



Ο Δήμος κάνει πρόταση στην Άννα

Λίστα Προτίμησης Γυναικών

	1 ^{ος}	2 ^{ος}	3 ^{ος}	4 ^{ος}	5 ^{ος}
Άννα	Έκτορας	Αδάμ	Βάιος	Δήμος	Γιάννης
Βάσω	Γιάννης	Βάιος	Δήμος	Αδάμ	Έκτορας
Γωγώ	Βάιος	Γιάννης	Δήμος	Έκτορας	Αδάμ
Δανάη	Αδάμ	Έκτορας	Δήμος	Γιάννης	Βάιος
Έρρικα	Δήμος	Βάιος	Έκτορας	Γιάννης	Αδάμ

Παράδειγμα Αλγορίθμου Πρότασης-και-Απόρριψης

Λίστα Προτίμησης Ανδρών

	1 ^η	2 ^η	3 ^η	4 ^η	5 ^η
Αδάμ	Βάσω	Άννα	Δανάη	Έρρικα	Γωγώ
Βάιος	Δανάη	Βάσω	Άννα	Γωγώ	Έρρικα
Γιάννης	Βάσω	Έρρικα	Γωγώ	Δανάη	Άννα
Δήμος	Άννα	Δανάη	Γωγώ	Βάσω	Έρρικα
Έκτορας	Βάσω	Δανάη	Άννα	Έρρικα	Γωγώ

Λίστα Προτίμησης Γυναικών

	1 ^{ος}	2 ^{ος}	3 ^{ος}	4 ^{ος}	5 ^{ος}
Άννα	Έκτορας	Αδάμ	Βάιος	Δήμος	Γιάννης
Βάσω	Γιάννης	Βάιος	Δήμος	Αδάμ	Έκτορας
Γωγώ	Βάιος	Γιάννης	Δήμος	Έκτορας	Αδάμ
Δανάη	Αδάμ	Έκτορας	Δήμος	Γιάννης	Βάιος
Έρρικα	Δήμος	Βάιος	Έκτορας	Γιάννης	Αδάμ



Ο Δήμος κάνει πρόταση στην Άννα
- Η Άννα τον απορρίπτει γιατί
προτιμάει τον Αδάμ

Παράδειγμα Αλγορίθμου Πρότασης-και-Απόρριψης

Λίστα Προτίμησης Ανδρών

	1 ^η	2 ^η	3 ^η	4 ^η	5 ^η
Αδάμ	Βάσω	Άννα	Δανάη	Έρρικα	Γωγώ
Βάιος	Δανάη	Βάσω	Άννα	Γωγώ	Έρρικα
Γιάννης	Βάσω	Έρρικα	Γωγώ	Δανάη	Άννα
Δήμος	Βάσω	Δανάη	Γωγώ	Βάσω	Έρρικα
Έκτορας	Βάσω	Δανάη	Άννα	Έρρικα	Γωγώ



Ο Δήμος κάνει πρόταση στην Δανάη

Λίστα Προτίμησης Γυναικών

	1 ^{ος}	2 ^{ος}	3 ^{ος}	4 ^{ος}	5 ^{ος}
Άννα	Έκτορας	Αδάμ	Βάιος	Δήμος	Γιάννης
Βάσω	Γιάννης	Βάιος	Δήμος	Αδάμ	Έκτορας
Γωγώ	Βάιος	Γιάννης	Δήμος	Έκτορας	Αδάμ
Δανάη	Αδάμ	Έκτορας	Δήμος	Γιάννης	Βάιος
Έρρικα	Δήμος	Βάιος	Έκτορας	Γιάννης	Αδάμ

Παράδειγμα Αλγορίθμου Πρότασης-και-Απόρριψης

Λίστα Προτίμησης Ανδρών

	1 ^η	2 ^η	3 ^η	4 ^η	5 ^η
Αδάμ	Βάσω	Άννα	Δανάη	Έρρικα	Γωγώ
Βάιος	Δανάη	Βάσω	Άννα	Γωγώ	Έρρικα
Γιάννης	Βάσω	Έρρικα	Γωγώ	Δανάη	Άννα
Δήμος	Άννα	Δανάη	Γωγώ	Βάσω	Έρρικα
Έκτορας	Βάσω	Δανάη	Άννα	Έρρικα	Γωγώ



Ο Δήμος κάνει πρόταση στην Δανάη
- Η Δανάη αφήνει τον Βάιο και
δέχεται τον Δήμο

Λίστα Προτίμησης Γυναικών

	1 ^{ος}	2 ^{ος}	3 ^{ος}	4 ^{ος}	5 ^{ος}
Άννα	Έκτορας	Αδάμ	Βάιος	Δήμος	Γιάννης
Βάσω	Γιάννης	Βάιος	Δήμος	Αδάμ	Έκτορας
Γωγώ	Βάιος	Γιάννης	Δήμος	Έκτορας	Αδάμ
Δανάη	Αδάμ	Έκτορας	Δήμος	Γιάννης	Έκτορας
Έρρικα	Δήμος	Βάιος	Έκτορας	Γιάννης	Αδάμ

Παράδειγμα Αλγορίθμου Πρότασης-και-Απόρριψης

Λίστα Προτίμησης Ανδρών

	1 ^η	2 ^η	3 ^η	4 ^η	5 ^η
Αδάμ	Βάσω	Άννα	Δανάη	Έρρικα	Γωγώ
Βάιος	Δανάη	Βάσω	Άννα	Γωγώ	Έρρικα
Γιάννης	Βάσω	Έρρικα	Γωγώ	Δανάη	Άννα
Δήμος	Άννα	Δανάη	Γωγώ	Βάσω	Έρρικα
Έκτορας	Βάσω	Δανάη	Άννα	Έρρικα	Γωγώ



Ο Βάιος κάνει πρόταση στην Βάσω

Λίστα Προτίμησης Γυναικών

	1 ^{ος}	2 ^{ος}	3 ^{ος}	4 ^{ος}	5 ^{ος}
Άννα	Έκτορας	Αδάμ	Βάιος	Δήμος	Γιάννης
Βάσω	Γιάννης	Βάιος	Δήμος	Αδάμ	Έκτορας
Γωγώ	Βάιος	Γιάννης	Δήμος	Έκτορας	Αδάμ
Δανάη	Αδάμ	Έκτορας	Δήμος	Γιάννης	Έκτορας
Έρρικα	Δήμος	Βάιος	Έκτορας	Γιάννης	Αδάμ

Παράδειγμα Αλγορίθμου Πρότασης-και-Απόρριψης

Λίστα Προτίμησης Ανδρών

	1 ^η	2 ^η	3 ^η	4 ^η	5 ^η
Αδάμ	Βάσω	Άννα	Δανάη	Έρρικα	Γωγώ
Βάιος	Δανάη	Βάσω	Άννα	Γωγώ	Έρρικα
Γιάννης	Βάσω	Έρρικα	Γωγώ	Δανάη	Άννα
Δήμος	Άννα	Δανάη	Γωγώ	Βάσω	Έρρικα
Έκτορας	Βάσω	Δανάη	Άννα	Έρρικα	Γωγώ



Ο Βάιος κάνει πρόταση στην Βάσω
- Η Βάσω τον απορρίπτει γιατί
προτιμάει τον Γιάννη

Λίστα Προτίμησης Γυναικών

	1 ^{ος}	2 ^{ος}	3 ^{ος}	4 ^{ος}	5 ^{ος}
Άννα	Έκτορας	Αδάμ	Βάιος	Δήμος	Γιάννης
Βάσω	Γιάννης	Βάιος	Δήμος	Αδάμ	Έκτορας
Γωγώ	Βάιος	Γιάννης	Δήμος	Έκτορας	Αδάμ
Δανάη	Αδάμ	Έκτορας	Δήμος	Γιάννης	Βάιος
Έρρικα	Δήμος	Βάιος	Έκτορας	Γιάννης	Αδάμ

Παράδειγμα Αλγορίθμου Πρότασης-και-Απόρριψης

Λίστα Προτίμησης Ανδρών

	1 ^η	2 ^η	3 ^η	4 ^η	5 ^η
Αδάμ	Βάσω	Άννα	Δανάη	Έρρικα	Γωγώ
Βάιος	Δανάη	Βάσω	Άννα	Γωγώ	Έρρικα
Γιάννης	Βάσω	Έρρικα	Γωγώ	Δανάη	Άννα
Δήμος	Άννα	Δανάη	Γωγώ	Βάσω	Έρρικα
Έκτορας	Βάσω	Δανάη	Άννα	Έρρικα	Γωγώ



Ο Βάιος κάνει πρόταση στην Άννα

Λίστα Προτίμησης Γυναικών

	1 ^{ος}	2 ^{ος}	3 ^{ος}	4 ^{ος}	5 ^{ος}
Άννα	Έκτορας	Αδάμ	Βάιος	Δήμος	Γιάννης
Βάσω	Γιάννης	Βάιος	Δήμος	Αδάμ	Έκτορας
Γωγώ	Βάιος	Γιάννης	Δήμος	Έκτορας	Αδάμ
Δανάη	Αδάμ	Έκτορας	Δήμος	Γιάννης	Βάιος
Έρρικα	Δήμος	Βάιος	Έκτορας	Γιάννης	Αδάμ

Παράδειγμα Αλγορίθμου Πρότασης-και-Απόρριψης

Λίστα Προτίμησης Ανδρών

	1 ^η	2 ^η	3 ^η	4 ^η	5 ^η
Αδάμ	Βάσω	Άννα	Δανάη	Έρρικα	Γωγώ
Βάιος	Δανάη	Βάσω	Άννα	Γωγώ	Έρρικα
Γιάννης	Βάσω	Έρρικα	Γωγώ	Δανάη	Άννα
Δήμος	Άννα	Δανάη	Γωγώ	Βάσω	Έρρικα
Έκτορας	Βάσω	Δανάη	Άννα	Έρρικα	Γωγώ



Ο Βάιος κάνει πρόταση στην Άννα
- Η Άννα τον απορρίπτει γιατί
προτιμάει τον Αδάμ

Λίστα Προτίμησης Γυναικών

	1 ^{ος}	2 ^{ος}	3 ^{ος}	4 ^{ος}	5 ^{ος}
Άννα	Έκτορας	Αδάμ	Βάιος	Δήμος	Γιάννης
Βάσω	Γιάννης	Βάιος	Δήμος	Αδάμ	Έκτορας
Γωγώ	Βάιος	Γιάννης	Δήμος	Έκτορας	Αδάμ
Δανάη	Αδάμ	Έκτορας	Δήμος	Γιάννης	Βάιος
Έρρικα	Δήμος	Βάιος	Έκτορας	Γιάννης	Αδάμ

Παράδειγμα Αλγορίθμου Πρότασης-και-Απόρριψης

Λίστα Προτίμησης Ανδρών

	1 ^η	2 ^η	3 ^η	4 ^η	5 ^η
Αδάμ	Βάσω	Άννα	Δανάη	Έρρικα	Γωγώ
Βάιος	Δανάη	Βάσω	Άννα	Γωγώ	Έρρικα
Γιάννης	Βάσω	Έρρικα	Γωγώ	Δανάη	Άννα
Δήμος	Άννα	Δανάη	Γωγώ	Βάσω	Έρρικα
Έκτορας	Βάσω	Δανάη	Άννα	Έρρικα	Γωγώ



Ο Βάιος κάνει πρόταση στην Γωγώ

Λίστα Προτίμησης Γυναικών

	1 ^{ος}	2 ^{ος}	3 ^{ος}	4 ^{ος}	5 ^{ος}
Άννα	Έκτορας	Αδάμ	Βάιος	Δήμος	Γιάννης
Βάσω	Γιάννης	Βάιος	Δήμος	Αδάμ	Έκτορας
Γωγώ	Βάιος	Γιάννης	Δήμος	Έκτορας	Αδάμ
Δανάη	Αδάμ	Έκτορας	Δήμος	Γιάννης	Βάιος
Έρρικα	Δήμος	Βάιος	Έκτορας	Γιάννης	Αδάμ

Παράδειγμα Αλγορίθμου Πρότασης-και-Απόρριψης

Λίστα Προτίμησης Ανδρών

	1 ^η	2 ^η	3 ^η	4 ^η	5 ^η
Αδάμ	Βάσω	Άννα	Δανάη	Έρρικα	Γωγώ
Βάιος	Δανάη	Βάσω	Άννα	Γωγώ	Έρρικα
Γιάννης	Βάσω	Έρρικα	Γωγώ	Δανάη	Άννα
Δήμος	Άννα	Δανάη	Γωγώ	Βάσω	Έρρικα
Έκτορας	Βάσω	Δανάη	Άννα	Έρρικα	Γωγώ



Ο Βάιος κάνει πρόταση στην Γωγώ
- Η Γωγώ δέχεται γιατί δεν έχει
ταίρι

Λίστα Προτίμησης Γυναικών

	1 ^{ος}	2 ^{ος}	3 ^{ος}	4 ^{ος}	5 ^{ος}
Άννα	Έκτορας	Αδάμ	Βάιος	Δήμος	Γιάννης
Βάσω	Γιάννης	Βάιος	Δήμος	Αδάμ	Έκτορας
Γωγώ	Βάιος	Γιάννης	Δήμος	Έκτορας	Αδάμ
Δανάη	Αδάμ	Έκτορας	Δήμος	Γιάννης	Βάιος
Έρρικα	Δήμος	Βάιος	Έκτορας	Γιάννης	Αδάμ

Παράδειγμα Αλγορίθμου Πρότασης-και-Απόρριψης

Λίστα Προτίμησης Ανδρών

	1 ^η	2 ^η	3 ^η	4 ^η	5 ^η
Αδάμ	Βάσω	Άννα	Δανάη	Έρρικα	Γωγώ
Βάιος	Δανάη	Βάσω	Άννα	Γωγώ	Έρρικα
Γιάννης	Βάσω	Έρρικα	Γωγώ	Δανάη	Άννα
Δήμος	Άννα	Δανάη	Γωγώ	Βάσω	Έρρικα
Έκτορας	Βάσω	Δανάη	Άννα	Έρρικα	Γωγώ



Ο Έκτορας κάνει πρόταση στην Βάσω

Λίστα Προτίμησης Γυναικών

	1 ^{ος}	2 ^{ος}	3 ^{ος}	4 ^{ος}	5 ^{ος}
Άννα	Έκτορας	Αδάμ	Βάιος	Δήμος	Γιάννης
Βάσω	Γιάννης	Βάιος	Δήμος	Αδάμ	Έκτορας
Γωγώ	Βάιος	Γιάννης	Δήμος	Έκτορας	Αδάμ
Δανάη	Αδάμ	Έκτορας	Δήμος	Γιάννης	Βάιος
Έρρικα	Δήμος	Βάιος	Έκτορας	Γιάννης	Αδάμ

Παράδειγμα Αλγορίθμου Πρότασης-και-Απόρριψης

Λίστα Προτίμησης Ανδρών

	1 ^η	2 ^η	3 ^η	4 ^η	5 ^η
Αδάμ	Βάσω	Άννα	Δανάη	Έρρικα	Γωγώ
Βάιος	Δανάη	Βάσω	Άννα	Γωγώ	Έρρικα
Γιάννης	Βάσω	Έρρικα	Γωγώ	Δανάη	Άννα
Δήμος	Άννα	Δανάη	Γωγώ	Βάσω	Έρρικα
Έκτορας	Βάσω	Δανάη	Άννα	Έρρικα	Γωγώ



Ο Έκτορας κάνει πρόταση στην Βάσω
- Η Βάσω τον απορρίπτει γιατί
προτιμάει τον Γιάννη

Λίστα Προτίμησης Γυναικών

	1 ^{ος}	2 ^{ος}	3 ^{ος}	4 ^{ος}	5 ^{ος}
Άννα	Έκτορας	Αδάμ	Βάιος	Δήμος	Γιάννης
Βάσω	Γιάννης	Βάιος	Δήμος	Αδάμ	Έκτορας
Γωγώ	Βάιος	Γιάννης	Δήμος	Έκτορας	Αδάμ
Δανάη	Αδάμ	Έκτορας	Δήμος	Γιάννης	Βάιος
Έρρικα	Δήμος	Βάιος	Έκτορας	Γιάννης	Αδάμ

Παράδειγμα Αλγορίθμου Πρότασης-και-Απόρριψης

Λίστα Προτίμησης Ανδρών

	1 ^η	2 ^η	3 ^η	4 ^η	5 ^η
Αδάμ	Βάσω	Άννα	Δανάη	Έρρικα	Γωγώ
Βάιος	Δανάη	Βάσω	Άννα	Γωγώ	Έρρικα
Γιάννης	Βάσω	Έρρικα	Γωγώ	Δανάη	Άννα
Δήμος	Άννα	Δανάη	Γωγώ	Βάσω	Έρρικα
Έκτορας	Βάσω	Δανάη	Άννα	Έρρικα	Γωγώ



Ο Έκτορας κάνει πρόταση στην Δανάη

Λίστα Προτίμησης Γυναικών

	1 ^{ος}	2 ^{ος}	3 ^{ος}	4 ^{ος}	5 ^{ος}
Άννα	Έκτορας	Αδάμ	Βάιος	Δήμος	Γιάννης
Βάσω	Γιάννης	Βάιος	Δήμος	Αδάμ	Έκτορας
Γωγώ	Βάιος	Γιάννης	Δήμος	Έκτορας	Αδάμ
Δανάη	Αδάμ	Έκτορας	Δήμος	Γιάννης	Βάιος
Έρρικα	Δήμος	Βάιος	Έκτορας	Γιάννης	Αδάμ

Παράδειγμα Αλγορίθμου Πρότασης-και-Απόρριψης

Λίστα Προτίμησης Ανδρών

	1 ^η	2 ^η	3 ^η	4 ^η	5 ^η
Αδάμ	Βάσω	Άννα	Δανάη	Έρρικα	Γωγώ
Βάιος	Δανάη	Βάσω	Άννα	Γωγώ	Έρρικα
Γιάννης	Βάσω	Έρρικα	Γωγώ	Δανάη	Άννα
Δήμος	Άννα	Δανάη	Γωγώ	Βάσω	Έρρικα
Έκτορας	Βάσω	Δανάη	Άννα	Έρρικα	Γωγώ



Ο Έκτορας κάνει πρόταση στην Δανάη
- Η Δανάη αφήνει τον Δήμο και
δέχεται τον Έκτορα

Λίστα Προτίμησης Γυναικών

	1 ^{ος}	2 ^{ος}	3 ^{ος}	4 ^{ος}	5 ^{ος}
Άννα	Έκτορας	Αδάμ	Βάιος	Δήμος	Γιάννης
Βάσω	Γιάννης	Βάιος	Δήμος	Αδάμ	Έκτορας
Γωγώ	Βάιος	Γιάννης	Δήμος	Έκτορας	Αδάμ
Δανάη	Αδάμ	Έκτορας	Δήμος	Γιάννης	Βάιος
Έρρικα	Δήμος	Βάιος	Έκτορας	Γιάννης	Αδάμ

Παράδειγμα Αλγορίθμου Πρότασης-και-Απόρριψης

Λίστα Προτίμησης Ανδρών

	1 ^η	2 ^η	3 ^η	4 ^η	5 ^η
Αδάμ	Βάσω	Άννα	Δανάη	Έρρικα	Γωγώ
Βάιος	Δανάη	Βάσω	Άννα	Γωγώ	Έρρικα
Γιάννης	Βάσω	Έρρικα	Γωγώ	Δανάη	Άννα
Δήμος	Άννα	Δανάη	Γωγώ	Βάσω	Έρρικα
Έκτορας	Βάσω	Δανάη	Άννα	Έρρικα	Γωγώ



Ο Δήμος κάνει πρόταση στην Γωγώ

Λίστα Προτίμησης Γυναικών

	1 ^{ος}	2 ^{ος}	3 ^{ος}	4 ^{ος}	5 ^{ος}
Άννα	Έκτορας	Αδάμ	Βάιος	Δήμος	Γιάννης
Βάσω	Γιάννης	Βάιος	Δήμος	Αδάμ	Έκτορας
Γωγώ	Βάιος	Γιάννης	Δήμος	Έκτορας	Αδάμ
Δανάη	Αδάμ	Έκτορας	Δήμος	Γιάννης	Βάιος
Έρρικα	Δήμος	Βάιος	Έκτορας	Γιάννης	Αδάμ

Παράδειγμα Αλγορίθμου Πρότασης-και-Απόρριψης

Λίστα Προτίμησης Ανδρών

	1 ^η	2 ^η	3 ^η	4 ^η	5 ^η
Αδάμ	Βάσω	Άννα	Δανάη	Έρρικα	Γωγώ
Βάιος	Δανάη	Βάσω	Άννα	Γωγώ	Έρρικα
Γιάννης	Βάσω	Έρρικα	Γωγώ	Δανάη	Άννα
Δήμος	Άννα	Δανάη	Γωγώ	Βάσω	Έρρικα
Έκτορας	Βάσω	Δανάη	Άννα	Έρρικα	Γωγώ



Ο Δήμος κάνει πρόταση στην Γωγώ
- Η Γωγώ τον απορρίπτει γιατί
προτιμάει τον Βάιο

Λίστα Προτίμησης Γυναικών

	1 ^{ος}	2 ^{ος}	3 ^{ος}	4 ^{ος}	5 ^{ος}
Άννα	Έκτορας	Αδάμ	Βάιος	Δήμος	Γιάννης
Βάσω	Γιάννης	Βάιος	Δήμος	Αδάμ	Έκτορας
Γωγώ	Βάιος	Γιάννης	Δήμος	Έκτορας	Αδάμ
Δανάη	Αδάμ	Έκτορας	Δήμος	Γιάννης	Βάιος
Έρρικα	Δήμος	Βάιος	Έκτορας	Γιάννης	Αδάμ

Παράδειγμα Αλγορίθμου Πρότασης-και-Απόρριψης

Λίστα Προτίμησης Ανδρών

	1 ^η	2 ^η	3 ^η	4 ^η	5 ^η
Αδάμ	Βάσω	Άννα	Δανάη	Έρρικα	Γωγώ
Βάιος	Δανάη	Βάσω	Άννα	Γωγώ	Έρρικα
Γιάννης	Βάσω	Έρρικα	Γωγώ	Δανάη	Άννα
Δήμος	Άννα	Δανάη	Γωγώ	Βάσω	Έρρικα
Έκτορας	Βάσω	Δανάη	Άννα	Έρρικα	Γωγώ



Ο Δήμος κάνει πρόταση στην Βάσω

Λίστα Προτίμησης Γυναικών

	1 ^{ος}	2 ^{ος}	3 ^{ος}	4 ^{ος}	5 ^{ος}
Άννα	Έκτορας	Αδάμ	Βάιος	Δήμος	Γιάννης
Βάσω	Γιάννης	Βάιος	Δήμος	Αδάμ	Έκτορας
Γωγώ	Βάιος	Γιάννης	Δήμος	Έκτορας	Αδάμ
Δανάη	Αδάμ	Έκτορας	Δήμος	Γιάννης	Βάιος
Έρρικα	Δήμος	Βάιος	Έκτορας	Γιάννης	Αδάμ

Παράδειγμα Αλγορίθμου Πρότασης-και-Απόρριψης

Λίστα Προτίμησης Ανδρών

	1 ^η	2 ^η	3 ^η	4 ^η	5 ^η
Αδάμ	Βάσω	Άννα	Δανάη	Έρρικα	Γωγώ
Βάιος	Δανάη	Βάσω	Άννα	Γωγώ	Έρρικα
Γιάννης	Βάσω	Έρρικα	Γωγώ	Δανάη	Άννα
Δήμος	Άννα	Δανάη	Γωγώ	Βάσω	Έρρικα
Έκτορας	Βάσω	Δανάη	Άννα	Έρρικα	Γωγώ



Ο Δήμος κάνει πρόταση στην Βάσω
- Η Βάσω τον απορρίπτει γιατί
προτιμάει τον Γιάννη

Λίστα Προτίμησης Γυναικών

	1 ^{ος}	2 ^{ος}	3 ^{ος}	4 ^{ος}	5 ^{ος}
Άννα	Έκτορας	Αδάμ	Βάιος	Δήμος	Γιάννης
Βάσω	Γιάννης	Βάιος	Δήμος	Αδάμ	Έκτορας
Γωγώ	Βάιος	Γιάννης	Δήμος	Έκτορας	Αδάμ
Δανάη	Αδάμ	Έκτορας	Δήμος	Γιάννης	Βάιος
Έρρικα	Δήμος	Βάιος	Έκτορας	Γιάννης	Αδάμ

Παράδειγμα Αλγορίθμου Πρότασης-και-Απόρριψης

Λίστα Προτίμησης Ανδρών

	1 ^η	2 ^η	3 ^η	4 ^η	5 ^η
Αδάμ	Βάσω	Άννα	Δανάη	Έρρικα	Γωγώ
Βάιος	Δανάη	Βάσω	Άννα	Γωγώ	Έρρικα
Γιάννης	Βάσω	Έρρικα	Γωγώ	Δανάη	Άννα
Δήμος	Άννα	Δανάη	Γωγώ	Βάσω	Έρρικα
Έκτορας	Βάσω	Δανάη	Άννα	Έρρικα	Γωγώ



Ο Δήμος κάνει πρόταση στην Έρρικα

Λίστα Προτίμησης Γυναικών

	1 ^{ος}	2 ^{ος}	3 ^{ος}	4 ^{ος}	5 ^{ος}
Άννα	Έκτορας	Αδάμ	Βάιος	Δήμος	Γιάννης
Βάσω	Γιάννης	Βάιος	Δήμος	Αδάμ	Έκτορας
Γωγώ	Βάιος	Γιάννης	Δήμος	Έκτορας	Αδάμ
Δανάη	Αδάμ	Έκτορας	Δήμος	Γιάννης	Βάιος
Έρρικα	Δήμος	Βάιος	Έκτορας	Γιάννης	Αδάμ

Παράδειγμα Αλγορίθμου Πρότασης-και-Απόρριψης

Λίστα Προτίμησης Ανδρών

	1 ^η	2 ^η	3 ^η	4 ^η	5 ^η
Αδάμ	Βάσω	Άννα	Δανάη	Έρρικα	Γωγώ
Βάιος	Δανάη	Βάσω	Άννα	Γωγώ	Έρρικα
Γιάννης	Βάσω	Έρρικα	Γωγώ	Δανάη	Άννα
Δήμος	Άννα	Δανάη	Γωγώ	Βάσω	Έρρικα
Έκτορας	Βάσω	Δανάη	Άννα	Έρρικα	Γωγώ



Ο Δήμος κάνει πρόταση στην Έρρικα
- Η Έρρικα δέχεται γιατί δεν
έχει ταίρι

Λίστα Προτίμησης Γυναικών

	1 ^{ος}	2 ^{ος}	3 ^{ος}	4 ^{ος}	5 ^{ος}
Άννα	Έκτορας	Αδάμ	Βάιος	Δήμος	Γιάννης
Βάσω	Γιάννης	Βάιος	Δήμος	Αδάμ	Έκτορας
Γωγώ	Βάιος	Γιάννης	Δήμος	Έκτορας	Αδάμ
Δανάη	Αδάμ	Έκτορας	Δήμος	Γιάννης	Βάιος
Έρρικα	Δήμος	Βάιος	Έκτορας	Γιάννης	Αδάμ

Παράδειγμα Αλγορίθμου Πρότασης-και-Απόρριψης

Λίστα Προτίμησης Ανδρών

	1 ^η	2 ^η	3 ^η	4 ^η	5 ^η
Αδάμ	Βάσω	Άννα	Δανάη	Έρρικα	Γωγώ
Βάιος	Δανάη	Βάσω	Άννα	Γωγώ	Έρρικα
Γιάννης	Βάσω	Έρρικα	Γωγώ	Δανάη	Άννα
Δήμος	Άννα	Δανάη	Γωγώ	Βάσω	Έρρικα
Έκτορας	Βάσω	Δανάη	Άννα	Έρρικα	Γωγώ

Λίστα Προτίμησης Γυναικών

	1 ^{ος}	2 ^{ος}	3 ^{ος}	4 ^{ος}	5 ^{ος}
Άννα	Έκτορας	Αδάμ	Βάιος	Δήμος	Γιάννης
Βάσω	Γιάννης	Βάιος	Δήμος	Αδάμ	Έκτορας
Γωγώ	Βάιος	Γιάννης	Δήμος	Έκτορας	Αδάμ
Δανάη	Αδάμ	Έκτορας	Δήμος	Γιάννης	Βάιος
Έρρικα	Δήμος	Βάιος	Έκτορας	Γιάννης	Αδάμ



ΤΕΡΜΑΤΙΣΜΟΣ

- Όλοι βρήκαν ταίρι

- Είναι ευσταθές ταίριασμα !!!

Αλγόριθμος Πρότασης-και-Απόρριψης



Gale-Shapley 1962

```
Αρχικά κάθε άτομο είναι ελεύθερο
while (κάποιος άνδρας είναι ελεύθερος και δεν έχει κάνει
      πρόταση σε κάθε γυναίκα)
    Διάλεξε έναν τέτοιο άνδρα m
    w = 1η γυναίκα της λίστας του m στην οποία δεν έχει
      κάνει ακόμα πρόταση
    if (w είναι ελεύθερη)
        m και w δεσμεύονται
    else if (w προτιμά τον m από τον τωρινό σύντροφο m')
        m και w δεσμεύονται, και ο m' γίνεται ελεύθερος
    else
        η w απορρίπτει τον m
end-while
```



Απόδειξη Ορθότητας: Τερματισμός

Ισχυρισμός. Ο αλγόριθμος τερματίζει μετά από $O(n^2)$ επαναλήψεις του βρόχου while.

Παρατήρηση 1. Οι άντρες κάνουν πρόταση στις γυναίκες σε φθίνουσα σειρά προτίμησης.

Παρατήρηση 2. Όταν μια γυναίκα ταιριάζεται, δεν ξαναμένει ποτέ μόνη της. Μόνο ανταλλάσσει(σεται) με καλύτερους συντρόφους !

Απόδειξη: Σε κάθε επανάληψη ένας άντρας κάνει πρόταση σε μια νέα γυναίκα. Υπάρχουν μόνο n^2 δυνατές προτάσεις. ▀

	1 ^η	2 ^η	3 ^η	4 ^η	5 ^η
Αδάμ	A	B	Γ	Δ	E
Βάιος	B	Γ	Δ	A	E
Γιάννης	Γ	Δ	A	B	E
Δήμος	Δ	A	B	Γ	E
Έκτορας	A	B	Γ	Δ	E

	1 ^{ος}	2 ^{ος}	3 ^{ος}	4 ^{ος}	5 ^{ος}
Άννα	B	Γ	Δ	E	A
Βάσω	Γ	Δ	E	A	B
Γωγώ	Δ	E	A	B	Γ
Δανάη	E	A	B	Γ	Δ
Έρρικα	A	B	Γ	Δ	Z

Απαιτούνται $n(n-1)+1$ προτάσεις (στο χειρότερο στιγμιότυπο)

Απόδειξη Ορθότητας: Τελειότητα

Ισχυρισμός. Όλοι οι άνδρες και όλες οι γυναίκες ταιριάζονται.

Απόδειξη. (άτοπο)

- Έστω ότι ένας άνδρας m (π.χ. ο Έκτορας) δεν έχει ταιριάξει μέχρι το τέλος του αλγορίθμου.
 - Έκανε πρόταση σε όλες τις γυναίκες αλλά δεν απέδωσε.
- Τότε κάποια γυναίκα w (έστω η Άννα), δεν έχει ταιριάξει επίσης μετά τον τερματισμό του αλγορίθμου.
 - $(n-1)$ άντρες έχουν ταιριάξει με $(n-1)$ γυναίκες.
- Από την Παρατήρηση 2, στην γυναίκα w (στην Άννα) δεν έγινε ποτέ πρόταση.
- Άτοπο διότι ο άνδρας w (ο Έκτορας) έχει κάνει πρόταση σε όλες τις γυναίκες αφού καταλήγει χωρίς ταίρι. ■

Απόδειξη Ορθότητας: Ευστάθεια

Ισχυρισμός. Δεν υπάρχουν ασταθή ζευγάρια.

Απόδειξη. (άτοπο)

- Έστω ένα ασταθές ζευγάρι $m-w$ (Έκτορας-Άννα) :
κάθε ένας προτιμά τον άλλο από τον τωρινό του σύντροφο στο ταίριασμα S κατά Gale-Shapley.
- Περίπτωση 1: Ο άνδρας m (E) δεν έκανε πρόταση ποτέ στην w (A).
 $\Rightarrow$ ο άνδρας m (E) προτιμά την σύντροφό του από την w (A).
 $\Rightarrow$ το ζευγάρι $m-w$ ($E-A$) είναι ευσταθές.
- Περίπτωση 2: Ο άνδρας m (E) έκανε πρόταση στην w (A).
 $\Rightarrow$ η w (A) απέρριψε τον m (E) (εκείνη την στιγμή ή αργότερα).
 $\Rightarrow$ η w (A) προτιμά τον τωρινό σύντροφό της από τον m (E).
 $\Rightarrow$ το ζευγάρι $w-m$ ($A-E$) είναι ευσταθές.
- Σε κάθε περίπτωση το ζευγάρι $m-w$ ($E-A$) είναι ευσταθές, άτοπο. ■

Ταίριασμα S

Έκτορας - Βάσω

Βάϊος - Άννα

...

(1) οι άντρες κάνουν
πρόταση σε φθίνουσα σειρά
προτίμησης

(2) οι γυναίκες μόνο
ανταλλάσσουν

Σύνοψη Ευσταθούς Ταιριάσματος

Πρόβλημα Ευσταθούς Ταιριάσματος

- Δεδομένων n ανδρών και n γυναικών, και των προτιμήσεών τους, βρες ένα ευσταθές ταίριασμα αν υπάρχει !!!
- Ο Αλγόριθμος Gale-Shapley βρίσκει ένα ευσταθές ταίριασμα σε χρόνο $O(n^2)$.
- Εγγυάται την εύρεση ενός ευσταθούς ταιριάσματος για **οποιοδήποτε** στιγμιότυπο του προβλήματος.
- Βέλτιστη ως προς τους άνδρες. Στον αλγόριθμο GS όπου οι άντρες προτείνουν, κάθε άντρας επιλέγει την καλύτερη έγκυρη σύντροφο.
- **Ερώτηση.** Εάν υπάρχουν πολλά ευσταθή ταιριάσματα, κάθε εκτέλεση του αλγορίθμου Gale-Shapley δίνει το ίδιο ευσταθές ταίριασμα;
- **Ερώτηση.** Η αντρική βελτιστότητα εμφανίζεται σε βάρος της γυναικείας βελτιστότητας;
- **Ερώτηση.** Πώς θα υλοποιηθεί ο αλγόριθμος GS αποδοτικά;

Χαρακτηρισμός της Λύσης

Ερώτηση 1 Για ένα δεδομένο στιγμιότυπο, μπορεί να υπάρχουν πολλά ευσταθή ταιριάσματα. Κάθε εκτέλεση του αλγορίθμου Gale-Shapley δίνει το ίδιο ευσταθές ταιρίασμα; Εάν ναι, ποιο επιλέγει πάντα;

Στιγμιότυπο με δύο ευσταθή ταιριάσματα : ☐ Άννα-Χ, Βάσω-Υ, Γωγώ-Ζ.
☐ Άννα-Υ, Βάσω-Χ, Γωγώ-Ζ.

	1 ^η	2 ^η	3 ^η
Χ	A	B	Γ
Υ	B	A	Γ
Ζ	A	B	Γ

	1 ^{ος}	2 ^{ος}	3 ^{ος}
Άννα	Υ	Χ	Ζ
Βάσω	Χ	Υ	Ζ
Γωγώ	Χ	Υ	Ζ

Χαρακτηρισμός της Λύσης

Ισχυρισμός Κάθε εκτέλεση του GS παράγει **βέλτιστη ανάθεση για τους άνδρες**, η οποία είναι ένα ευσταθές ταίριασμα!

- Δεν υπάρχει κανένας λόγος, εκ των προτέρων, να πιστέψουμε ότι μια βέλτιστη ανάθεση για τους άνδρες είναι **τέλεια**, πόσο μάλλον **ευσταθής**.
- Ταυτόχρονα βέλτιστη **για κάθε έναν** και **για όλους** τους άνδρες.

Ορισμός 1 Ο άνδρας **m** είναι ένας **έγκυρος σύντροφος** της γυναίκας **w** αν υπάρχει κάποιο ευσταθές ταίριασμα στο οποίο δεσμεύονται.

Ορισμός 2 **Ανδρική-βέλτιστη ανάθεση**. Κάθε άνδρας επιλέγει την **καλύτερη** **έγκυρη σύντροφο**.

Ορισμός 3 **Γυναικεία-πεσιμιστική ανάθεση**: Κάθε γυναίκα επιλέγει τον **χειρότερο έγκυρο σύντροφο**.

Ερώτηση 1 Η αντρική βελτιστότητα εμφανίζεται σε βάρος της γυναικείας βελτιστότητας;

Βελτιστότητα ως προς τους Άνδρες

Ισχυρισμός Ένα GS ταίριασμα S είναι βέλτιστο για τους άνδρες.

□ Απόδειξη. (άτοπο)

- Έστω ότι κάποιος άνδρας ταιριάζετε με διαφορετική από την καλύτερη σύντροφο. Οι άνδρες προτείνουν σε φθίνουσα τάξη ως προς τις προτιμήσεις τους $\Rightarrow$ κάποιος άνδρας απορρίπτεται από **έγκυρη σύντροφο**.
- Δ : ο **πρώτος** τέτοιος άνδρας, και
 A : η **πρώτη** έγκυρη γυναίκα που τον απορρίπτει.
- S : ένα **ευσταθές ταίριασμα** όπου A - Δ δεσμεύονται.
- Όταν ο Δ απορρίπτεται, η A δεσμεύεται με έναν άντρα, έστω Γ , τον οποίο προτιμάει από τον Δ .
- Έστω B : το ταίρι του Γ στο S .
- Ο Γ δεν έχει απορριφθεί από καμία έγκυρη σύντροφο μέχρι το σημείο που ο Δ απορρίφθηκε από την A .
- $\Rightarrow$ Ο Γ προτιμάει την A από την B .
- Αλλά η A προτιμάει τον Γ από τον Δ .
- Επομένως A - Γ είναι **ασταθές ζευγάρι** στο ταίριασμα S . ▀

S

Άννα-Δημήτρης

Βάσω-Γιώργος

...



καθώς ο Δ είχε την πρώτη απόρριψη από μια έγκυρη σύντροφο

Γυναικείος Πεσιμισμού

Ισχυρισμός Ο Αλγόριθμος GS βρίσκει ένα **γυναικείο-πεσιμιστικό** ευσταθές ταίριασμα S^* .

- Απόδειξη.
 - ▣ Έστω Α-Γ ταίρι στο S^* , αλλά ο Γ δεν είναι η χειρότερη επιλογή για την Α.
 - ▣ Υπάρχει ένα **ευσταθές ταίριασμα** S στο οποίο η Α ταιριάζεται με κάποιον, έστω Δ, που τον προτιμάει λιγότερο από τον Γ.
 - ▣ Έστω Β το ταίρι του Γ στο ταίριασμα S .
 - ▣ Ο Γ προτιμάει την Α από την Β στο S^* .
 - ▣ Επομένως, Α-Γ είναι **ασταθές ζευγάρι** στο S . ▣

Βέλτιστη ως προς τους άντρες



S^*	
S	
Άννα-Δημήτρης	Άννα-Γιώργος
Βάσω-Γιώργος	Βάσω-Δημήτρης
...	...

Πρόβλημα: Ταιριάζοντας Ειδικευόμενους Ιατρούς σε Νοσοκομεία

Αντιστοιχία: Άντρες $\approx$ νοσοκομεία, Γυναίκες $\approx$ ειδικευόμενοι ιατροί.

□ Παραλλαγή 1. Ορισμένοι συμμετέχοντες δηλώνουν άλλους ως μη-αποδεκτούς.

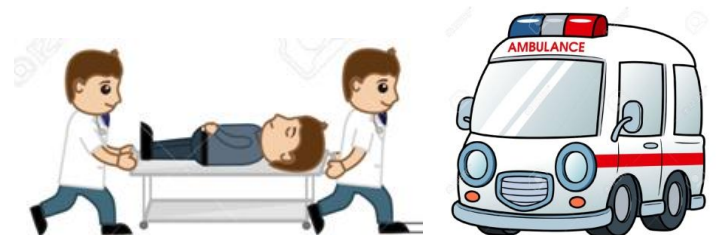
□ Παραλλαγή 2. Πλήθος αντρών και γυναικών διαφέρει

□ Παραλλαγή 3. Περιορισμένη πολυγαμία.

Ο ιατρός Α δεν θέλει να δουλέψει στην Αθήνα

Οι ιατροί είναι περισσότεροι από τα νοσοκομεία

Το νοσοκομείο Χ θέλει να προσλάβει 3 ειδικευόμενους ιατρούς



Πρόβλημα: Καλοί-Κακοί

- Έστω n άνδρες και n γυναίκες με λίστες προτιμήσεων.
- Υπάρχει k ($1 \leq k \leq n-1$): τέτοιος ώστε k καλοί άνδρες και k καλές γυναίκες ($n-k$ κακοί άνδρες, $n-k$ κακές γυναίκες).
- Όλοι θέλουν καλούς αντί για κακούς (καλοί πάντα προηγούνται στη λίστα προτίμησης).
- Δείξτε ότι σε κάθε ευσταθές ταίριασμα κάθε καλός άνδρας παντρεύεται μια καλή γυναίκα.

Λύση (άτοπο):

- Έστω ότι υπάρχει ευσταθές ταίριασμα S : καλός $m \leftrightarrow$ κακή w
- $k-1$ καλοί άνδρες: υπάρχει καλή γυναίκα $w' \leftrightarrow$ κακό άνδρα m'
- Αστάθεια στο S :
 - $m-w'$: και οι δυο καλοί, άρα προτιμούνται μεταξύ τους από τους τωρινούς συντρόφους τους. ▪

S

$m - w$

$m' - w'$

$\dots$

Αποδοτική υλοποίηση σε χρόνο $O(n^2)$

- Αναπαράσταση ανδρών και γυναικών
 - ▣ Σύνολα ανδρών και γυναικών $\{1, \dots, n\}$
- Λίστες προτιμήσεων – χώρος $O(n^2)$
 - ▣ Κάθε άνδρας m διατηρεί λίστα προτιμήσεων για τις γυναίκες **ManPref** $[m, i]$
 - ▣ Κάθε γυναίκα w διατηρεί λίστα προτιμήσεων για τους άνδρες **WomanPref** $[w, i]$
- Ζητήματα υλοποίησης σε $O(1)$ χρόνο.
 - ▣ Αναγνώριση **ελεύθερου** άνδρα
 - ▣ Για έναν άνδρα m : εύρεση της γυναίκας με την υψηλότερη κατάταξη στη λίστα του στην οποία δεν έχει κάνει ακόμη πρόταση
 - ▣ Για μια γυναίκα w : έλεγχος δέσμευσης της και αν ναι τότε προσδιορισμός του συντρόφου της w .
 - ▣ Για μια γυναίκα w και δύο άνδρες m, m' : ποιον από τους m και m' προτιμά η w

S

$m - w$

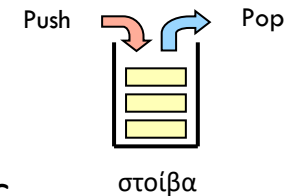
$m' - w'$

$\dots$

Αποδοτική υλοποίηση σε χρόνο $O(n^2)$

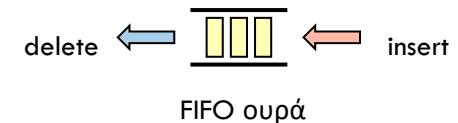
Αναγνώριση **ελεύθερου** άνδρα

- Λίστα ελεύθερων ανδρών: επιλογή από αρχή λίστας, διαγραφή αν δεσμευθεί, ένθεση αποδεσμευμένου άνδρα στο τέλος (ή αρχή) της λίστας
- **FIFO ουρά** ή **στοίβα**



Για έναν **άνδρα m**: εύρεση της γυναίκας με την υψηλότερη κατάταξη στη λίστα του στην οποία δεν έχει κάνει ακόμη πρόταση

- Επιπλέον πίνακας **Next**. Αρχικά, **Next[m]=1**.
- **Next[m]** = θέση επόμενης γυναίκας που θα κάνει πρόταση
- Ο m κάνει πρόταση στην w : **ManPref[m, Next[m]]** και μετά θέτει **Next[m]=Next[m]+1**



Για μια **γυναίκα w**: έλεγχος δέσμευσης της και αν ναι τότε προσδιορισμός του συντρόφου της w.

- Επιπλέον πίνακας **Current**. Αρχικά, **Current[w]=null** (αδέσμευτη)
- **Current[w]** = τρέχων σύντροφος της w.

Αποδοτική υλοποίηση σε χρόνο $O(n^2)$

Για μια γυναίκα w και δύο άνδρες m, m' : ποιον από τους m, m' προτιμά η w .

- Για κάθε γυναίκα, δημιουργούμε την **αντίστροφη (inverse)** της λίστας προτίμησής της
⇒ **επιπλέον πίνακας inverse**
- Σταθερός χρόνος για κάθε ερώτηση απόφασης μετά από $O(n)$ προεργασία για μια γυναίκα
⇒ $O(n^2)$ προεργασία για **όλες**

Άννα	1ος	2ος	3ος	4ος	5ος	6ος	7ος	8ος
WomanPref	8	3	7	1	4	5	6	2

Άννα	1	2	3	4	5	6	7	8
Inverse	4ος	8ος	2ος	5ος	6ος	7ος	3ος	1ος

```
for i = 1 to n
    inverse[w, WomanPref[w,i]] = i
```

Η Άννα προτιμά τον 3 από τον 6 καθώς
 $\text{inverse}[A, 3] = 2 < \text{inverse}[A, 6] = 7$

Ισχυρές Ιδέες και Τεχνικές

- ▣ Απομόνωση της δομής του προβλήματος.
- ▣ Σχεδίαση χρήσιμων και αποτελεσματικών αλγορίθμων.

Δυνητικά βαθείς κοινωνικές προεκτάσεις (legal disclaimer)

- Ιστορικά, οι άνδρες προτείνουν στις γυναίκες... γιατί όχι το αντίστροφο;
- Άνδρες: να προτείνουν νωρίς και συχνά.
- Άνδρες: να είναι πιο ειλικρινείς.
- Γυναίκες: να προτείνουν στους άνδρες.
- Η θεωρία μπορεί να σας καλυτερεύσει κοινωνικά και συγχρόνως να είναι διασκεδαστική!
- Όσοι κατανοήσετε το μάθημα, στο τέλος θα αποκτήσετε τον καλύτερο ή την καλύτερη σύντροφο ! 😊

Ευχαριστώ για τη Συμμετοχή σας !!!



Σταύρος Δ. Νικολόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Webpage: www.cs.uoi.gr/~stavros
