



# Συναρτησιακές Εξαρτήσεις



## Εισαγωγή

Θεωρία για το πότε ένας σχεδιασμός είναι «καλός»

Η θεωρία βασίζεται στις **Συναρτησιακές Εξαρτήσεις (Functional Dependencies)**

*Τι είναι:*

Εξαρτήσεις ανάμεσα σε σύνολα από γνωρίσματα

*Συμβολισμός*

**S1 → S2** (όπου S1, S2 σύνολα γνωρισμάτων)

*Τι σημαίνει:*

Αν ίδιες τιμές στα γνωρίσματα του S1  $\Rightarrow$  ίδιες τιμές στα γνωρίσματα του S2



Παράδειγμα: Σχήμα Σχέσης  $R(A, B, C, D)$  (Υπενθύμιση συμβολισμού)

Στιγμιότυπο,  $r(R)$

|    | A              | B              | C              | D              |
|----|----------------|----------------|----------------|----------------|
| r1 | a <sub>1</sub> | b <sub>1</sub> | c <sub>1</sub> | d <sub>1</sub> |
| r2 | a <sub>1</sub> | b <sub>2</sub> | c <sub>1</sub> | d <sub>2</sub> |
| r3 | a <sub>2</sub> | b <sub>3</sub> | c <sub>2</sub> | d <sub>3</sub> |
| r4 | a <sub>3</sub> | b <sub>3</sub> | c <sub>2</sub> | d <sub>4</sub> |

Συμβολισμός

$$r1[A] = a_1$$

$$r2[BC] = b_2 c_1$$

Έστω ένα σχήμα σχέσης  $R(A_1, A_2, \dots, A_n)$ . Θα συμβολίζουμε με

$R = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  το σύνολο των γνωρισμάτων της  $R$ .



### ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω  $X \subseteq R$  και  $Y \subseteq R$ ,

για **συναρτησιακή εξάρτηση**  $X \rightarrow Y$  ισχύει στο σχήμα  $R$

αν για κάθε σχέση  $r(R)$ , για κάθε ζεύγος πλειάδων  $t_1$  και  $t_2$  της  $r$ , τέτοιες ώστε  $t_1[X] = t_2[X] \Rightarrow t_1[Y] = t_2[Y]$

Με απλά λόγια, μια συναρτησιακή εξάρτηση  $X \rightarrow Y$  μας λέει ότι

*αν οποιεσδήποτε δυο πλειάδες μιας σχέσης της  $R$  συμφωνούν (έχουν την ίδια τιμή) σε κάποια γνωρίσματα  $X \subseteq R$  τότε συμφωνούν (έχουν την ίδια τιμή) και σε κάποια γνωρίσματα  $Y \subseteq R$ .*

## Συναρτησιακές Εξαρτήσεις



Αντί  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \rightarrow \{B_1, B_2, \dots, B_m\}$  γράφουμε

$$A_1 A_2 \dots A_n \rightarrow B_1 B_2 \dots B_m$$

**Ισχύουν στο σχήμα** - δηλαδή για όλες τις πιθανές σχέσεις (πλειάδες)

*Παράδειγμα:* Ποιες (μη τετριμμένες) συναρτησιακές εξαρτήσεις *ικανοποιεί* η παρακάτω σχέση - δεν ξέρουμε αν ισχύουν στο σχήμα

Μπορούμε όμως να πούμε ποιες **δεν ισχύουν**

| A     | B     | C     | D     |
|-------|-------|-------|-------|
| $a_1$ | $b_1$ | $c_1$ | $d_1$ |
| $a_1$ | $b_2$ | $c_1$ | $d_2$ |
| $a_2$ | $b_3$ | $c_2$ | $d_3$ |
| $a_3$ | $b_3$ | $c_2$ | $d_4$ |

## Συναρτησιακές Εξαρτήσεις



- Το  $Y$  *εξαρτάται συναρτησιακά* από το  $X$
- Γιατί καλούνται συναρτησιακές
- $K \subseteq R$  **υπερκλειδί** της  $R$  αν  $K \rightarrow ?$   
Υπενθύμιση:  $R$  είναι το σύνολο των γνωρισμάτων του σχήματος

**Μια γενίκευση της έννοιας του κλειδιού**



**Παρατήρηση**

$$A_1 A_2 \dots A_n \rightarrow B_1 \text{ και } A_1 A_2 \dots A_n \rightarrow B_2 \Leftrightarrow A_1 A_2 \dots A_n \rightarrow B_1 B_2$$

**Παράδειγμα φυσικής σημασίας εξαρτήσεων**



Όπως και τα κλειδιά, οι συναρτησιακές εξαρτήσεις προκύπτουν από τη φυσική περιγραφή του προβλήματος - από τον πραγματικό κόσμο

Έστω το παρακάτω σχεσιακό σχήμα:

Εγγραφή(Μάθημα, Φοιτητής, Ώρα+Μέρα, Αίθουσα, Βαθμός)

(συντομογραφία) **E(M, Φ, Ω, Α, Β)**

1. Τα μαθήματα προσφέρονται μόνο μια φορά [σε μια συγκεκριμένη ώρα και αίθουσα].
2. Οι φοιτητές δεν μπορούν να είναι σε δυο διαφορετικά μέρη ταυτόχρονα
3. Δε γίνεται να έχουμε δυο μαθήματα ταυτόχρονα (την ίδια ώρα) στην ίδια αίθουσα
4. Ένας φοιτητής παίρνει μόνο ένα βαθμό σε κάθε μάθημα

Ποιες συναρτησιακές εξαρτήσεις εκφράζουν αυτές τις συνθήκες.

Ποιο (ποια) είναι το κλειδί αν ισχύουν τα (1) έως (4)

5. Τι σημαίνει  $\Phi \rightarrow M, MB \rightarrow \Phi$

## Συναρτησιακές Εξαρτήσεις



Παράδειγμα: Στο παρακάτω σχήμα ένας λογαριασμός μπορεί να ανήκει σε παραπάνω από έναν πελάτη και ένας πελάτης πολλούς λογαριασμούς. Ποιες άλλες (εκτός του κλειδιού) συναρτησιακές εξαρτήσεις μπορεί να ισχύουν αλλά δε φαίνονται στο παρακάτω σχήμα;

### Λογαριασμός

|                              |                            |      |                     |
|------------------------------|----------------------------|------|---------------------|
| <u>Όνομα-Υποκαταστήματος</u> | <u>Αριθμός-Λογαριασμού</u> | Ποσό | <u>Όνομα-Πελάτη</u> |
|------------------------------|----------------------------|------|---------------------|

Παράδειγμα: Ένας Πελάτης πολλά δάνεια και ένα Δάνειο από παραπάνω από έναν πελάτη

### Πελάτης

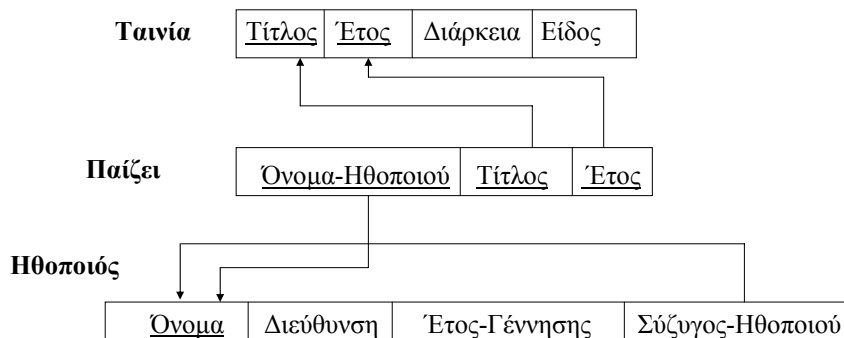
|                     |      |      |                        |
|---------------------|------|------|------------------------|
| <u>Όνομα-Πελάτη</u> | Οδός | Πόλη | <u>Αριθμός-Δανείου</u> |
|---------------------|------|------|------------------------|

- Σημείωση: Στα παραπάνω σχεσιακά μοντέλα, με τα κλειδιά εκφράζεται μόνο ένα υποσύνολο των περιορισμών
- Διαισθητικά, οι δύο παραπάνω σχεδιασμοί δεν είναι «καλοί», γιατί;

## Συναρτησιακές Εξαρτήσεις



Στο παρακάτω σχήμα, υπάρχει κάποιος περιορισμός που δεν εκφράζεται από τα κλειδιά;





Τετριμμένες εξαρτήσεις (ισχύουν για όλα τα σχήματα)

Παράδειγμα:  $A \rightarrow A$  ή  $AB \rightarrow B$

Γενικά,

$X \rightarrow Y$  **τετριμμένη**, όταν  $Y \subseteq X$



- Οι συναρτησιακές εξαρτήσεις ορίζονται στο **σχήμα** μιας σχέσης
- Ένα σύνολο από συναρτησιακές εξαρτήσεις  $F$  **ισχύει** σε ένα σχήμα
- Έλεγχος αν μια σχέση **ικανοποιεί** το σύνολο  $F$



*Συνάγουμε νέες εξαρτήσεις από ένα δεδομένο σύνολο εξαρτήσεων*

$F \models X \rightarrow Y$  : η συναρτησιακή εξάρτηση  $X \rightarrow Y$  **συνάγεται** από το σύνολο εξαρτήσεων  $F$



$F^+$  : **κλειστότητα** του  $F$ : σύνολο όλων των συναρτησιακών εξαρτήσεων που συνάγονται από το  $F$

**Κανόνες Συμπερασμού**- για τη συναγωγή εξαρτήσεων



## Κανόνες Συμπερασμού (Inference Rules)

### 1. Ανακλαστικός Κανόνας

Αν  $X \supseteq Y$ , τότε  $X \rightarrow Y$

### 2. Επαυξητικός Κανόνας

$\{X \rightarrow Y\} \models XZ \rightarrow YZ$

### 3. Μεταβατικός Κανόνας

$\{X \rightarrow Y, Y \rightarrow Z\} \models X \rightarrow Z$

**Κανόνες του Armstrong:** βάσιμοι (sound) δε δίνουν λανθασμένες εξαρτήσεις και πλήρεις (complete) μας δίνουν όλο το  $F^+$



$\{X \rightarrow Y\} \models XZ \rightarrow YZ$       Επαυξητικός Κανόνας

*Απόδειξη*

(με επαγωγή σε άτοπο:) έστω ότι σε κάποιο στιγμιότυπο της  $r$  ισχύει

$X \rightarrow Y$  (1) αλλά όχι  $XZ \rightarrow YZ$  (2)

Από (2 & ορισμό), υπάρχουν δυο πλειάδες  $t1[XZ] = t2[XZ]$  (3)

και  $t1[YZ] \neq t2[YZ]$

Από (3),  $t1[X] = t2[X]$  (4) και  $t1[Z] = t2[Z]$  (5)

Από (1) και (4),  $t1[Y] = t2[Y]$  (6)

Από (5) και (6),  $t1[YZ] = t2[YZ]$  Άτοπο!

Απόδειξη των 3 κανόνων  
με βάση τον ορισμό





## Επιπρόσθετοι κανόνες

### 4. Ενωτικός Κανόνας

$$\{X \rightarrow Y, X \rightarrow Z\} \models X \rightarrow YZ$$

### 5. Διασπαστικός Κανόνας

$$\{X \rightarrow YZ\} \models X \rightarrow Y$$

### 6. Ψευδομεταβατικός Κανόνας

$$\{X \rightarrow Y, YZ \rightarrow W\} \models XZ \rightarrow W$$



## Ενωτικός Κανόνας

$$\{X \rightarrow Y (1), X \rightarrow Z (2)\} \models X \rightarrow YZ$$

Απόδειξη (με χρήση των κανόνων του Amstrong)

(2) + Επαυξ.  $XY \rightarrow YZ$  (3)

(1) + Επαυξ.  $X \rightarrow XY$  (4)

(3) (4) Μεταβ.  $X \rightarrow YZ$

Απόδειξη των επιπλέον κανόνων με βάση τον ορισμό ή/και των κανόνων του Amstrong

### Ανακλαστικός Κανόνας

Αν  $X \supseteq Y$ , τότε  $X \rightarrow Y$

### Επαυξητικός Κανόνας

$$\{X \rightarrow Y\} \models XZ \rightarrow YZ$$

### Μεταβατικός Κανόνας

$$\{X \rightarrow Y, Y \rightarrow Z\} \models X \rightarrow Z$$



1. Ανακλαστικός Κανόνας  $\forall X \supseteq Y, \text{ τότε } X \rightarrow Y$
2. Επαυξητικός Κανόνας  $\{X \rightarrow Y\}$  συνάγει  $XZ \rightarrow YZ$
3. Μεταβατικός Κανόνας  $\{X \rightarrow Y, Y \rightarrow Z\}$  συνάγει  $X \rightarrow Z$
4. Ενωτικός Κανόνας  $\{X \rightarrow Y, X \rightarrow Z\}$  συνάγει  $X \rightarrow YZ$
5. Διασπαστικός Κανόνας  $\{X \rightarrow YZ\}$  συνάγει  $X \rightarrow Y$
6. Ψευδομεταβατικός Κανόνας  $\{X \rightarrow Y, YZ \rightarrow W\}$  συνάγει  $XZ \rightarrow W$



Έστω  $R = \{A, B, C, G, H, I\}$  και  $F = \{A \rightarrow B, A \rightarrow C, CG \rightarrow H, CG \rightarrow I, B \rightarrow H\}$

Παραδείγματα συναρτησιακών εξαρτήσεων που συνάγονται από το  $F$

- $A \rightarrow H$  (α) Υπάρχει τρόπος/αλγόριθμος να τις υπολογίσουμε όλες;
- $CG \rightarrow HI$  (β) Πως μπορούμε να υπολογίσουμε το κλειδί;
- $AG \rightarrow I$



$X^+$  : κλειστότητα (closure) ενός συνόλου  $X$  από γνωρίσματα από το  $F$   
 σύνολο όλων των γνωρισμάτων που εξαρτώνται συναρτησιακά από το  $X$  μέσω του  $F$

### Υπολογισμός του $X^+$

```
Result := X
while (αλλαγή στο Result)
  Για κάθε συναρτησιακή εξάρτηση:  $Y \rightarrow Z \in F$ 
    Αν  $Y \subseteq \text{Result}$ ,  $\text{Result} := \text{Result} \cup Z$ 
```



### Παράδειγμα

Έστω  $R = \{A, B, C, G, H, I\}$  και  $F = \{A \rightarrow B, A \rightarrow C, CG \rightarrow H, CG \rightarrow I, B \rightarrow H\}$

Υπολογισμός του  $\{A, G\}^+$



- Είναι ο αλγόριθμος σωστός
  - (α) Για κάθε  $Y \in \text{Result}$ , ισχύει  $Y \in X^+$
  - (β) Για κάθε  $Y \in X^+$ , ισχύει  $Y \in \text{Result}$
- Πολυπλοκότητα χειρότερης περίπτωσης



Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο (πως;) για να:

1. Δείξουμε αν μια συναρτησιακή εξάρτηση ισχύει
2. Υπολογίσουμε τα κλειδιά ενός σχήματος σχέσης
3. Υπολογίσουμε το  $F^+$



$R(A, B, C, D) F = \{AB \rightarrow C, C \rightarrow D, D \rightarrow A\}$

1. Δείξουμε αν μια συναρτησιακή εξάρτηση ισχύει

$C \rightarrow A ?$

$A \rightarrow D ?$

$AB \rightarrow D ?$



$R(A, B, C, D) F = \{AB \rightarrow C, C \rightarrow D, D \rightarrow A\}$

2. Υπολογίσουμε τα κλειδιά ενός σχήματος σχέσης

Παράδειγμα Ι



$R(A, B, C, D) \quad F = \{AB \rightarrow C, C \rightarrow D, D \rightarrow A\}$

**3. Υπολογίσαμε το  $F^+$**

Παράδειγμα ΙΙ



$R(A, B, C, D, E) \quad F = \{A \rightarrow BC, C \rightarrow AD, B \rightarrow ED, AD \rightarrow E\}$

**1. Υπολογίστε το  
 $A^+, B^+, C^+, D^+, E^+$**

**2. Υποψήφια κλειδιά;**



Απλοποίηση ενός δοσμένου συνόλου συναρτησιακών εξαρτήσεων χωρίς να μεταβάλλουμε την κλειστότητά του

Έστω δυο σύνολα συναρτησιακών εξαρτήσεων  $E$  και  $F$   
 Λέμε ότι το  $F$  **καλύπτει** το  $E$  (ή το  $E$  καλύπτεται από το  $F$ ), αν κάθε  $\Sigma E$  στο  $E$ , ανήκει στο  $F^+$  (δηλαδή, συνάγεται από το  $F$ ) (αλλιώς,  $E \subseteq F^+$ )

Δυο σύνολα συναρτησιακών εξαρτήσεων  $E$  και  $F$  είναι **ισοδύναμα**  
 αν  $E^+ = F^+$ .  
 (δηλαδή, αν το  $E$  καλύπτει το  $F$  και το  $F$  καλύπτει το  $E$ )



- Πως μπορούμε να υπολογίσουμε αν ένα σύνολο  $F$  καλύπτει ένα σύνολο  $E$ ;

- Πως μπορούμε να υπολογίσουμε αν ένα σύνολο  $F$  είναι ισοδύναμο με ένα σύνολο  $E$ ;



$$F1 = \{A \rightarrow C, B \rightarrow C\}$$

$$F2 = \{A \rightarrow B, A \rightarrow C\}$$

$$F3 = \{A \rightarrow B, AB \rightarrow C\}$$

F1 καλύπτει το F3;

F3 καλύπτει το F1;

F1 ισοδύναμο του F3;

F2 καλύπτει το F3;



**Ελάχιστο κάλυμμα**  $F_{\min}$  της  $F$ : ελάχιστο σύνολο από ΣΕ που είναι ισοδύναμο με την  $F$

Ένα σύνολο  $F$  συναρτησιακών εξαρτήσεων είναι **ελάχιστο** αν:

1. κάθε ΣΕ στο  $F$  έχει *ένα μόνο γνώρισμα* στο δεξιό της μέρος
2. δε μπορούμε να αντικαταστήσουμε μια ΣΕ  $X \rightarrow Z$  από το  $F$  με μια ΣΕ  $Y \rightarrow Z$  τέτοια ώστε  $Y \subset X$  και να πάρουμε ένα σύνολο ισοδύναμο του  $F$  (δεν υπάρχει *περιττό γνώρισμα* στο *α.μ* της συναρτησιακής εξάρτησης)
3. δε μπορούμε να αφαιρέσουμε μια ΣΕ από το  $F$  και να πάρουμε ένα σύνολο ισοδύναμο του  $F$  (η ΣΕ είναι *περιττή*)





## Αλγόριθμος υπολογισμού ελάχιστου καλύμματος

1. Αντικατέστησε τις συναρτησιακές εξαρτήσεις

$$X_1 \rightarrow Y_1 Y_2 \text{ με } X_1 \rightarrow Y_1 \text{ και } X_1 \rightarrow Y_2.$$

2. Για κάθε ΣΕ

(i) Βρες τα *περιττά γνωρίσματα* στο α.μ., αφάιρесе τα

(ii) Έλεγξε αν είναι *περιττή*, αν ναι αφάιρесе τη



*Περιττά γνωρίσματα*: γνωρίσματα που αν αφαιρεθούν δεν επηρεάζουν το κλείσιμο (δηλαδή προκύπτει ισοδύναμο σύνολο)

Για παράδειγμα: το γνώρισμα  $AB \rightarrow C$  το  $A$  είναι περιττό στην εξάρτηση αν

$$F \text{ ισοδύναμο } (F - \{AB \rightarrow C\}) \cup \{B \rightarrow C\}$$

⏟  
 $F'$

Προφανώς το  $F'$  καλύπτει το  $F$ , άρα αρκεί να ελέγξουμε αν το  $F$  καλύπτει το  $F'$



Γενικεύοντας:

Έστω ένα σύνολο  $F$  συναρτησιακών εξαρτήσεων και η  $\Sigma E X \rightarrow Y \in F$

Το γνώρισμα  $A \in X$  είναι **περιττό στο  $X$**  αν

$$F \text{ καλύπτει } (F - \{X \rightarrow Y\}) \cup \{(X - A) \rightarrow Y\}$$

• Πως θα υπολογίσουμε αν ένα γνώρισμα στο **α.μ.** μιας  $\Sigma E$  είναι περιττό; Θα πρέπει να δείξουμε ότι οι  $\Sigma E$  του  $F'$  ανήκουν στο  $F^+$ , δηλαδή:

**Υπολόγισε το  $(X - \{A\})^+$  με βάση τις  $\Sigma E$  του συνόλου  $F$ .**

**Το  $A$  είναι περιττό αν το  $Y$  ανήκει στο  $(X - \{A\})^+$**



• Πως θα υπολογίσουμε αν μια  $\Sigma E X \rightarrow B$  (με ένα γνώρισμα στο **δ.μ.**) είναι περιττή;

**Υπολογίζουμε το  $(X)^+$  χρησιμοποιώντας το  $F - \{X \rightarrow B\}$**

**Περιττό αν το  $B$  ανήκει στο  $(X)^+$**



### Αλγόριθμος υπολογισμού ελάχιστου καλύμματος

1. Αντικατέστησε τις συναρτησιακές εξαρτήσεις

$$X_1 \rightarrow Y_1 Y_2 \text{ με } X_1 \rightarrow Y_1 \text{ και } X_1 \rightarrow Y_2.$$

2. Για κάθε ΣΕ

(i) Βρες τα περιττά γνωρίσματα στο α.μ.

*A* περιττό στο  $X (X \rightarrow Y)$ : υπολόγισε το  $(X - \{A\})^+$

(ii) Έλεγξε αν είναι περιττή, αν ναι αφάιρесе τη

*Εξάρτηση*  $X \rightarrow B$  περιττή: υπολόγισε το  $X^+$



### Παράδειγμα

Έστω  $R(A, B, C)$  και  $F = \{A \rightarrow BC, B \rightarrow C, A \rightarrow B, AB \rightarrow C\}$ .

Βρείτε το  $F_{\min}$ .



### Παράδειγμα

Έστω  $R(A, B, C)$  και  $F = \{A \rightarrow BC, B \rightarrow C, A \rightarrow B, AB \rightarrow C\}$ . Βρείτε το  $F_{\min}$ .

Μετά το βήμα 1:  $\{A \rightarrow B, A \rightarrow C, B \rightarrow C, A \rightarrow C, AB \rightarrow C\}$

Βήμα 2: Εξέταση αν το  $A$  είναι περιττό στο  $AB \rightarrow C$ , υπολογίζοντας το  $(B)^+$

είναι περιττό

Νέο σύνολο:  $\{A \rightarrow B, A \rightarrow C, B \rightarrow C, B \rightarrow C\}$

Βήμα 3: Εξέταση αν η ΣΕ  $A \rightarrow B$  είναι περιττή όχι

Εξέταση αν η ΣΕ  $A \rightarrow C$  είναι περιττή ναι

Νέο σύνολο:  $\{A \rightarrow B, B \rightarrow C\}$

Εξέταση αν η ΣΕ  $B \rightarrow C$  είναι περιττή όχι

Αποτέλεσμα:  $\{A \rightarrow B, B \rightarrow C\}$



### Παρατηρήσεις

- Το ελάχιστο κάλυμμα **δεν** είναι μοναδικό
- Το βήμα (i) πρέπει να προηγηθεί του βήματος (ii), δηλαδή πρέπει *πρώτα* να βρούμε τα περιττά γνωρίσματα στο α.μ. και μετά τις περιττές εξαρτήσεις



## Ανακεφαλαίωση

- Συναρτησιακή εξάρτηση
- Κανόνες συμπερασμού συναρτησιακών εξαρτήσεων
- Κλειστότητα γνωρίσματος
- Ισοδυναμία συνόλου εξαρτήσεων
- Ελάχιστο κάλυμμα