Συναρτησιακές και Πλειότιμες Εξαρτήσεις

Συναρτησιακές Εξαρτήσεις

Έστω ένα σχήμα σχέσης $R(A_1, A_2, \ldots, A_n)$. Ας συμβολίσουμε με $R = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ το σύνολο των γνωρισμάτων της R.

Με απλά λόγια, μια συναρτησιακή εξάρτηση μας λέει ότι

αν δυο πλειάδες μιας σχέσης της R συμφωνούν (έχουν την ίδια τιμή) σε κάποια γνωρίσματα $X \subseteq R$ τότε συμφωνούν και σε κάποια γνωρίσματα $Y \subseteq R$.

Έστω $X \subseteq R$ και $Y \subseteq R$,

μια συναρτησιακή εξάρτηση $X \rightarrow Y$ ισχύει στο σχήμα R

αν για κάθε σχέση r(R), για κάθε ζεύγος πλειάδων t_1 και t_2 της r, τέτοιες ώστε $\mathbf{t_1[X] = t_2[X] \Rightarrow t_1[Y] = t_2[Y]}$

Αντί $\{A_1, A_2, \ldots, An\} \rightarrow \{B_1, B_2, \ldots, Bm\}$ γράφουμε

$A_1A_2 \ldots A_n \rightarrow B_1B_2 \ldots B_m$

Παρατήρηση

$A_1A_2 \ldots A_n \rightarrow B_1$ και $A_1A_2 \ldots A_n \rightarrow B_2 \Leftrightarrow A_1A_2 \ldots A_n \rightarrow B_1B_2$

Συναρτησιακές Εξαρτήσεις

- Το Y *εξαρτάται συναρτησιακά* από το X
- Γιατί καλούνται συναρτησιακές
- $K \subseteq R$ **υπερκλειδί** της R ανν $K \rightarrow$?

Παράδειγμα

Έστω το παρακάτω σχεσιακό σχήμα:

Εγγραφή(Μάθημα, Φοιτητής, Ώρα, Αίθουσα, Βαθμός)

(συντομογραφία) **Ε(Μ, Φ, Ω, Α, Β)**

1. Τα μαθήματα προσφέρονται μόνο μια φορά (μια συγκεκριμένη ώρα και αίθουσα).
2. Οι φοιτητές δεν μπορούν να είναι σε δυο διαφορετικά μέρη ταυτόχρονα
3. Δε γίνεται να έχουμε δυο μαθήματα ταυτόχρονα στην ίδια αίθουσα
4. Ένας φοιτητής παίρνει μόνο ένα βαθμό σε κάθε μάθημα

Ποιες συναρτησιακές εξαρτήσεις εκφράζουν αυτές τις συνθήκες.

Ποιο είναι το κλειδί.

Συναρτησιακές Εξαρτήσεις

Παράδειγμα: Ένας Λογαριασμός μπορεί να ανήκει σε παραπάνω από έναν πελάτη και ένας πελάτης πολλούς λογαριασμούς

Λογαριασμός

Όνομα-Υποκαταστήματος	Αριθμός-Λογαριασμού	Ποσό	Όνομα-Πελάτη

Παράδειγμα: Ένας Πελάτης πολλά δάνεια και ένα Δάνειο από παραπάνω από έναν πελάτη

Πελάτης

Όνομα-Πελάτη	Οδός	Πόλη	Αριθμός-Δανείου

Συναρτησιακές Εξαρτήσεις

Ταινία

Τίτλος	Έτος	Διάρκεια	Είδος

Παίζει

Όνομα-Ηθοποιού	Τίτλος	Έτος

Ηθοποιός

Όνομα	Διεύθυνση	Έτος-Γέννησης	Σύζυγος-Ηθοποιού

Τετριμμένες εξαρτήσεις (ισχύουν για όλα τα σχήματα)

Παράδειγμα: $A \rightarrow A$ ή $AB \rightarrow B$

Γενικά,

$X \rightarrow Y$ **τετριμμένη**, όταν $Y \subseteq X$

- Οι συναρτησιακές εξαρτήσεις ορίζονται στο **σχήμα** μιας σχέσης
- Ένα σύνολο από συναρτησιακές εξαρτήσεις F *ισχύει* σε ένα σχήμα
- Έλεγχος αν μια σχέση *ικανοποιεί* το σύνολο F

Παράδειγμα: Ποιες (μη τετριμμένες) συναρτησιακές εξαρτήσεις ικανοποιεί η παρακάτω σχέση

A	B	C	D
a_1	b_1	c_1	d_1
a_1	b_2	c_1	d_2
a_2	b_3	c_2	d_3
a_3	b_3	c_2	d_4

- *Συνάγουμε νέες εξαρτήσεις από ένα δεδομένο σύνολο εξαρτήσεων*

$F \models X \rightarrow Y$: η συναρτησιακή εξάρτηση $X \rightarrow Y$ **συνάγεται** από το σύνολο εξαρτήσεων F

F^+ : **κλειστότητα** του F : σύνολο όλων των συναρτησιακών εξαρτήσεων που συνάγονται από το F

Κανόνες Συμπερασμού- για τη συναγωγή εξαρτήσεων

Κανόνες Συμπερασμού

1. Ανακλαστικός Κανόνας

Αν $X \supseteq Y$, τότε $X \rightarrow Y$

2. Επαυξητικός Κανόνας

$\{X \rightarrow Y\} \models XZ \rightarrow YZ$

3. Μεταβατικός Κανόνας

$\{X \rightarrow Y, Y \rightarrow Z\} \models X \rightarrow Z$

Κανόνες του Amstrong: *βάσιμοι* (sound) δε δίνουν λανθασμένες εξαρτήσεις και *πλήρεις* (complete) μας δίνουν όλο το F^+

$\{X \rightarrow Y\} \models XZ \rightarrow YZ$ Επαυξητικός Κανόνας

Απόδειξη (με επαγωγή σε άτοπο)

Έστω ότι σε κάποιο στιγμιότυπο της r ισχύει

$X \rightarrow Y$ (1) αλλά όχι $XZ \rightarrow YZ$ (2)

Από (2 & ορισμό), υπάρχουν δυο πλειάδες $t1[XZ] = t2[XZ]$ (3)

και $t1[YZ] \neq t2[YZ]$

Από (3), $t1[X] = t2[X]$ (4) και $t1[Z] = t2[Z]$ (5)

Από (1) και (4), $t1[Y] = t2[y]$ (6)

Από (5) και (6), $t1[YZ] = t2[YZ]$ Άτοπο!

Επιπρόσθετοι κανόνες

4. Ενωτικός Κανόνας

$\{X \rightarrow Y, X \rightarrow Z\} \models X \rightarrow YZ$

5. Διασπαστικός Κανόνας

$\{X \rightarrow YZ\} \models X \rightarrow Y$

6. Ψευδομεταβατικός Κανόνας

$\{X \rightarrow Y, YZ \rightarrow W\} \models XZ \rightarrow W$

Ενωτικός Κανόνας

$\{X \to Y\ (1), X \to Z\ (2)\} \models X \to YZ$

Απόδειξη (με χρήση των κανόνων του Amstrong)

(2) + Επαυξ. $XY \to YZ$ (3)

(1) + Επαυξ. $X \to XY$ (4)

(3) (4) Μεταβ. $X \to YZ$

Ανακλαστικός Κανόνας

Αν $X \supseteq Y$, τότε $X \to Y$

Επαυξητικός Κανόνας

$\{X \to Y\} \models XZ \to YZ$

Μεταβατικός Κανόνας

$\{X \to Y, Y \to Z\} \models X \to Z$

Έστω R = {A, B, C, G, H, I} και F = $\{A \to B, A \to C, CG \to H, CG \to I, B \to H\}$

Παραδείγματα συναρτησιακών εξαρτήσεων που συνάγονται από το F

- $A \to H$
- $CG \to HI$
- $AG \to I$

Κανόνες Συμπερασμού

1. **Ανακλαστικός Κανόνας** Αν $X \supseteq Y$, τότε $X \rightarrow Y$
2. **Επαυξητικός Κανόνας** $\{X \rightarrow Y\}$ συνάγει $XZ \rightarrow YZ$
3. **Μεταβατικός Κανόνας** $\{X \rightarrow Y, Y \rightarrow Z\}$ συνάγει $X \rightarrow Z$
4. **Ενωτικός Κανόνας** $\{X \rightarrow Y, X \rightarrow Z\}$ συνάγει $X \rightarrow YZ$
5. **Διασπαστικός Κανόνας** $\{X \rightarrow YZ\}$ συνάγει $X \rightarrow Y$
6. **Ψευδομεταβατικός Κανόνας** $\{X \rightarrow Y, YZ \rightarrow W\}$ συνάγει $XZ \rightarrow W$

Κλειστότητα

X^+ : *κλειστότητα ενός συνόλου X από γνωρίσματα υπό το F*

σύνολο όλων των γνωρισμάτων που εξαρτώνται συναρτησιακά από το X μέσω του F

Υπολογισμός του X^+

```
Result := X
while (αλλαγή στο Result)
        Για κάθε συναρτησιακή εξάρτηση: Y → Z ∈ F
                Αν Y ⊆ Result, Result := Result ∪ Z
```

Παράδειγμα

Έστω R = {A, B, C, G, H, I} και F = {A → B, A → C, CG → H, CG → I, B → H}

Υπολογισμός του $\{A, G\}^+$

- Είναι ο αλγόριθμος σωστός

  (α) Για κάθε $Y \in$ Result, ισχύει $Y \in X^+$

  (β) Για κάθε $Y \in X^+$, ισχύει $Y \in$ Result

- Πολυπλοκότητα χειρότερης περίπτωσης

- Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο (πως;) για να:

  1. Δείξουμε αν μια συναρτησιακή εξάρτηση ισχύει

  2. Υπολογίσουμε τα κλειδιά ενός σχήματος σχέσης

  3. Υπολογίσουμε το F^+

R(A, B, C, D) $F = \{AB \rightarrow C, C \rightarrow D, D \rightarrow A\}$

1. Δείξουμε αν μια συναρτησιακή εξάρτηση ισχύει

$C \rightarrow A$?

$A \rightarrow D$?

$AB \rightarrow D$?

Παράδειγμα

$R(A, B, C, D) \quad F = \{AB \rightarrow C, C \rightarrow D, D \rightarrow A\}$

2. Υπολογίσουμε τα κλειδιά ενός σχήματος σχέσης

Παράδειγμα

$R(A, B, C, D) \quad F = \{AB \rightarrow C, C \rightarrow D, D \rightarrow A\}$

3. Υπολογίσουμε το F^+

• *Απλοποίηση ενός δοσμένου συνόλου συναρτησιακών εξαρτήσεων χωρίς να μεταβάλλουμε το κλείσιμό του*

Έστω δυο σύνολα συναρτησιακών εξαρτήσεων E και F

Λέμε ότι το F **καλύπτει** το E (ή το E καλύπτεται από το F), αν κάθε ΣΕ στο E, ανήκει στο F^+ (δηλαδή, συνάγεται από το F).

Δυο σύνολα συναρτησιακών εξαρτήσεων E και F είναι **ισοδύναμα**

ανν $E^+ = F^+$.

(δηλαδή αν το E καλύπτει το F και το F καλύπτει το E)

• Πως μπορούμε να υπολογίσουμε αν ένα σύνολο F καλύπτει ένα σύνολο E;

• Πως μπορούμε να υπολογίσουμε αν ένα σύνολο F είναι ισοδύναμο με ένα σύνολο E;

Παράδειγμα

$F1 = \{A \to C, B \to C\}$

$F2 = \{A \to B, A \to C\}$

$F3 = \{A \to B, AB \to C\}$

F1 καλύπτει το F3;

F3 καλύπτει το F1;

F1 ισοδύναμο του F3;

F2 ισοδύναμο του F3;

Ελάχιστο Κάλυμμα

Ελάχιστο κάλυμμα F_{min} της F: ελάχιστο σύνολο από ΣΕ που είναι ισοδύναμο με την F

Ένα σύνολο F συναρτησιακών εξαρτήσεων είναι **ελάχιστο** αν:

- κάθε ΣΕ στο F έχει ένα μόνο γνώρισμα στο δεξιό της μέρος
- δε μπορούμε να αφαιρέσουμε μια ΣΕ από το F και να πάρουμε ένα σύνολο ισοδύναμο του F
- δε μπορούμε να αντικαταστήσουμε μια ΣΕ $X \to Z$ από το F με μια ΣΕ $Y \to Z$ τέτοια ώστε $Y \subset X$ και να πάρουμε ένα σύνολο ισοδύναμο του F

Περιττά γνωρίσματα: γνωρίσματα που αν αφαιρεθούν δεν επηρεάζουν το κλείσιμο (δηλαδή προκύπτει ισοδύναμο σύνολο)

Έστω ένα σύνολο F συναρτησιακών εξαρτήσεων και η ΣΕ $X \rightarrow Y \in F$

- Το γνώρισμα $A \in X$ είναι **περιττό στο X** αν

  $F \models (F - \{X \rightarrow Y\}) \cup \{(X - A) \rightarrow Y\}$

Δηλαδή, αν ισχύει $A_2 \ldots A_n \rightarrow B_1 B_2 \ldots B_m$

Έστω ένα σύνολο F συναρτησιακών εξαρτήσεων και η ΣΕ $X \rightarrow Y \in F$

- Το γνώρισμα $B \in Y$ είναι **περιττό στο Y** αν

  $(F - \{X \rightarrow Y\}) \cup \{X \rightarrow (Y - B)\} \models F$

Δηλαδή, αν $A_1 A_2 \ldots A_n \rightarrow B_2 \ldots B_m + \ldots$

μας δίνει $A_1 A_2 \ldots A_n \rightarrow \boldsymbol{B_1} B_2 \ldots B_m$

Γενικά, αν στο δεξί μέρος μόνο ένα γνώρισμα, αν η εξάρτηση είναι περιττή

• Πως θα υπολογίσουμε αν ένα γνώρισμα στο **α.μ.** μιας ΣΕ είναι περιττό;

(Υπενθύμιση) Το γνώρισμα $A \in X$ είναι *περιττό στο X* αν

$$F \models (F - \{X \rightarrow Y\}) \cup \{(X - A) \rightarrow Y\}$$

Υπολόγισε το $(X - \{A\})^+$ με βάση τις ΣΕ του συνόλου F.

Το A είναι περιττό αν το $(X - \{A\})^+$ περιέχει το Y

• Πως θα υπολογίσουμε αν ένα γνώρισμα στο **δ.μ.** μιας ΣΕ είναι περιττό;

(Υπενθύμιση) Το γνώρισμα $B \in Y$ είναι *περιττό στο Y* αν

$$(F - \{X \rightarrow Y\}) \cup \{X \rightarrow (Y - B)\} \models F$$

Υπολογίζουμε το $(X)^+$ χρησιμοποιώντας το F, έχοντας το $X \rightarrow Y - B$ αντί $X \rightarrow Y$

Περιττό αν το B ανήκει

Αλγόριθμος υπολογισμού ελάχιστου καλύμματος

1. Αντικατέστησε τις συναρτησιακές εξαρτήσεις

   $X_1 \rightarrow Y_1Y_2$ με $X_1 \rightarrow Y_1$ και $X_1 \rightarrow Y_2$

2. Για κάθε ΣΕ

   (i) Βρες τα περιττά γνωρίσματα στο α.μ.

   (ii) Βρες τα περιττά γνωρίσματα στο δ.μ (δηλαδή τις περιττές εξαρτήσεις

Παράδειγμα

Έστω R(A, B, C) και F = {$A \rightarrow BC$, $B \rightarrow C$, $A \rightarrow B$, $AB \rightarrow C$}.

Βρείτε το F_{min}.

Παράδειγμα

Έστω R(A, B, C) και F = {A → BC, B → C, A → B, AB → C}. Βρείτε το F_{min}.

Μετά από πράξεις {A → B, B → C, AB → C}

Εξέταση αν το A είναι περιττό στο AB → C, υπολογίζοντας το $(B)^+$

Νέο σύνολο {A → B, B → C}

- Εξέταση αν το B είναι περιττό στο B → C (δε χρειάζεται)
- Εξέταση αν το C είναι περιττό στο B → C (*δηλαδή, ουσιαστικά αν ο κανόνας είναι περιττός*)

αν το B^+ δίνει C με τους υπόλοιπους κανόνες!

Μετά από πράξεις {A → B, B → C, AB → C}

Αν ξεκινούσα εξετάζοντας αν το B είναι περιττό στο AB → C

Υπολογισμός του A+, το B είναι περιττό άρα

Νέο σύνολο {A → B, B → C, A → C}

Εξέταση B περιττό στο A → B, (A^+) όχι

Εξέταση C περιττό στο B → C, (B^+) όχι

Εξέταση C περιττό στο A → C, (A^+) ναι!

Νέο σύνολο {A → B, B → C}

Ανακεφαλαίωση

- Συναρτησιακή εξάρτηση
- Κανόνες συναγωγής εξαρτήσεων
- Κλείσιμο γνωρίσματος
- Ισοδυναμία συνόλου εξαρτήσεων
- Ελάχιστο κάλυμμα

Πλειότιμες Εξαρτήσεις

Πλειότιμες Εξαρτήσεις

Προκύπτουν όταν δυο γνωρίσματα είναι ανεξάρτητα το ένα από το άλλο

Παράδειγμα

Ηθοποιός(Όνομα, Οδός, Πόλη, Τίτλος, Έτος)

Υποθέτουμε ότι για κάθε ηθοποιό είναι πιθανόν να υπάρχουν πολλές διευθύνσεις

Κανένα από τα 5 γνωρίσματα δεν εξαρτάται συναρτησιακά από τα άλλα τέσσερα $\Rightarrow$ δεν υπάρχουν μη μη τετριμμένες εξαρτήσεις $\Rightarrow$ κλειδί ?

π.χ., Όνομα Οδός Τίτλος Έτος $\rightarrow$ Πόλη δεν ισχύει

Παράδειγμα (συνέχεια)

Ηθοποιός(Όνομα, Οδός, Πόλη, Τίτλος, Έτος)

δεν υπάρχουν μη τετριμμένες εξαρτήσεις

Το σχήμα <u>είναι σε BCNF</u> αλλά <u>υπάρχει επανάληψη πληροφορίας</u> που δεν οφείλεται όμως σε συναρτησιακές εξαρτήσεις

$X \twoheadrightarrow Y$

Για κάθε ζεύγος πλειάδων t_1 και t_2 της σχέσης R που συμφωνούν σε όλα τα γνωρίσματα του X μπορούμε να βρούμε στο R δυο πλειάδες t_3 και t_4 τέτοιες ώστε

- και οι δυο συμφωνούν με τις t_1 και t_2 στο X:

  $t_1[X] = t_2[X] = t3[X] = t_4[X]$
- η t_3 συμφωνεί με την t_1 στο Y: $t3[Y] = t_1[Y]$
- η t_3 συμφωνεί με την t_2 στο R - X - Y: $t3[R - X - Y] = t2[R - X - Y]$
- η t_4 συμφωνεί με την t_2 στο Y: $t4[Y] = t2[Y]$
- η t_4 συμφωνεί με την t_1 στο R - X - Y: $t4[R - X - Y] = t_1[R - X - Y]$

$A_1 A_2 \ldots A_n \twoheadrightarrow B_1 B_2 \ldots B_m$

A_1	A_2	…	A_n	B_1	B_2	…	B_m	C_1	C_2	… C_k		
a_1	a_2	…	a_n	b_1	b_2	…	b_m	c_1	c_2	… c_k	←	t_1
a_1	a_2	…	a_n	b'_1	b'_2	…	b'_m	c'_1	c'_2	… c'_k	←	t_2
											←	t_3
											←	t_4

Παράδειγμα

Ηθοποιός(Όνομα, Οδός, Πόλη, Τίτλος, Έτος)

Όνομα $\twoheadrightarrow$ Οδός Πόλη

Όνομα	Οδός	Πόλη	Τίτλος	Έτος
C. Fisher	123 Mapple Str	Hollywood	Star Wars	1977
C. Fisher	5 Locust Ln	Malibu	Empire Strikes Back	1980
?				
?				

Κανόνες Συμπερασμού για Πλειότιμες Εξαρτήσεις

1. **Ανακλαστικός κανόνας** Αν $Y \subseteq X$, τότε $X \rightarrow Y$
2. **Επαυξητικός κανόνας** Αν $X \rightarrow Y$ τότε $XZ \rightarrow YZ$
3. **Μεταβατικός κανόνας** Αν $X \rightarrow Y$ και $Y \rightarrow Z$ τότε $X \rightarrow Z$

4. **Συμπληρωματικός κανόνας για ΠΕ** Αν $X \twoheadrightarrow Y$ τότε $X \twoheadrightarrow$ **R** - X - Y

5. **Επαυξητικός κανόνας για ΠΕ**

Αν $X \twoheadrightarrow Y$ και $Z \subseteq W$ τότε **W**X $\twoheadrightarrow$ **Z** Y

6. **Μεταβατικός κανόνας για ΠΕ**

Αν $X \twoheadrightarrow Y$ και $Y \twoheadrightarrow Z$ τότε $X \twoheadrightarrow Z - Y$

Κανόνες Συμπερασμού για Πλειότιμες Εξαρτήσεις

7. Κανόνας αντιγραφής

Αν $X \rightarrow Y$, τότε $X \twoheadrightarrow Y$

8. Κανόνας συγχώνευσης

Αν $X \twoheadrightarrow Y$, $Z \subseteq Y$ και

$\exists$ W τέτοιο ώστε: (α) $W \cap Y = \varnothing$ και (β) $W \rightarrow Z$

τότε $X \rightarrow Z$

Κανόνες Συμπερασμού για Πλειότιμες Εξαρτήσεις

- **τετριμμένη ΠΕ**; αν (α) το $Y \subseteq X$ ή (β) $X \cup Y = R$

Κανόνες Συμπερασμού για Πλειότιμες Εξαρτήσεις

• *βάσιμοι* (sound) δε δίνουν λανθασμένες εξαρτήσεις και *πλήρεις* (complete) μας δίνουν όλο το D^+

• *Απόδειξη του* **κανόνας αντιγραφής** (Αν $X \rightarrow Y$, τότε $X \twoheadrightarrow Y$)

δηλαδή κάθε συναρτησιακή εξάρτηση είναι και πλειότιμη

Οποτεδήποτε t1[X] = t2[X], υπάρχουν ...

Το ανάποδο ισχύει;

Αντιπαράδειγμα,

π.χ., $a_1\ b_1\ c_1$

$a_1\ b_2\ c_1$

Κανόνες Συμπερασμού για Πλειότιμες Εξαρτήσεις

• *Παράδειγμα* **συμπληρωματικού κανόνα**

Αν $X \twoheadrightarrow Y$ τότε $X \twoheadrightarrow R - X - Y$

Όνομα $\twoheadrightarrow$ Οδός Πόλη

Όνομα $\twoheadrightarrow$ Τίτλος Έτος

• *Απόδειξη του συμπληρωματικού κανόνα*