

ΜΥΕ003: Ανάκτηση Πληροφορίας

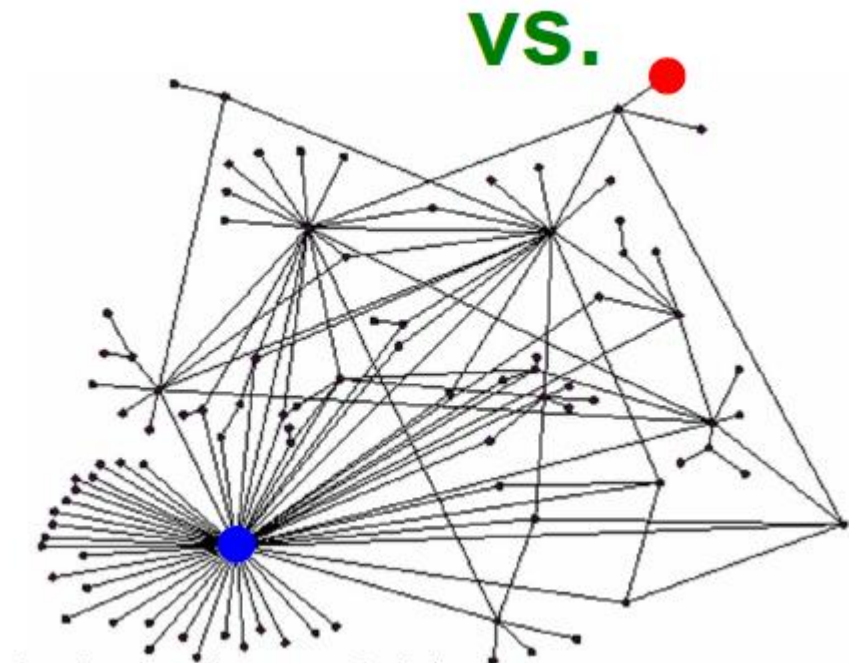
Διδάσκουσα: Ευαγγελία Πιτουρά

Κεφάλαιο 21: Ανάλυση Συνδέσμων.

Τι θα δούμε σήμερα

Πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το δίκτυο στη διάταξη των αποτελεσμάτων

Δεν είναι όλες οι σελίδες (κόμβοι) ίσες.
Ποιες σελίδες είναι «σημαντικές»?



Τι θα δούμε σήμερα

Ανάλυση συνδέσμων (link analysis)

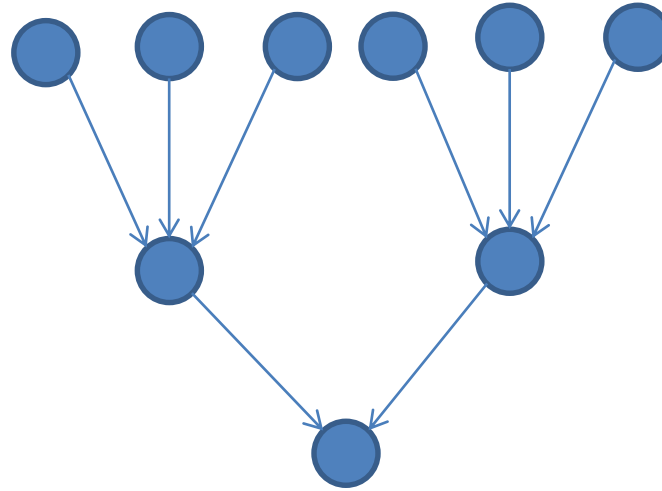
- PageRank
- HITS (Κομβικές σελίδες και σελίδες κύρους)
- SALSA

Υπολογισμός μιας τιμής ανά σελίδα (κόμβο) που εκφράζει το πόσο σημαντική είναι στο δίκτυο

Διάταξη με βάση τη δημοτικότητα

Διάταξη των σελίδων με βάση τον αριθμό των εισερχόμενων ακμών (**in-degree**, **degree centrality**)

Αρκεί η δημοτικότητα;



- Δεν είναι σημαντικό *πόσοι κόμβοι* δείχνουν σε μια σελίδα αλλά το *πόσο σημαντικοί* είναι αυτοί οι κόμβοι

PageRank

PageRank

- Βασική ιδέα: Μια σελίδα είναι σημαντική αν δείχνουν σε αυτήν σημαντικές σελίδες
- Η αξία (PageRank) ενός κόμβου είναι το **άθροισμα** της αξίας των φίλων του

PageRank: Βασική ιδέα

Έχουμε μια «μονάδα κύρους» που τη λέμε PageRank και την μοιράζουμε στις σελίδες.

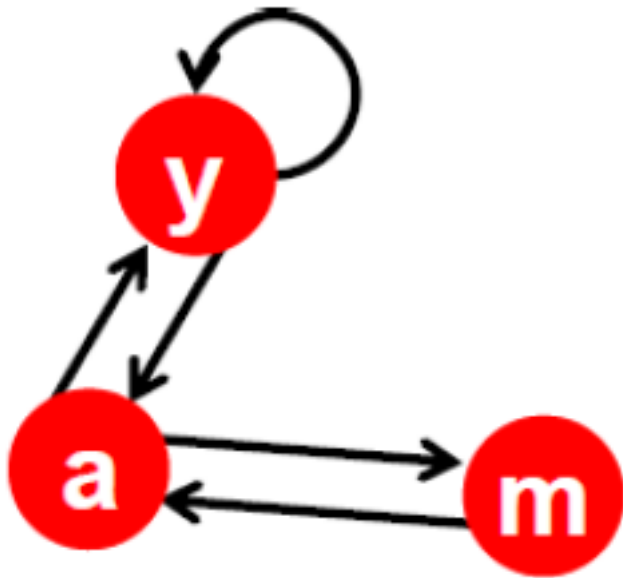
Κάθε σελίδα έχει μια τιμή PageRank

- Κάθε σελίδα *μοιράζει το PageRank της στις σελίδες που δείχνει*
- Το PageRank μιας σελίδας είναι το *άθροισμα των PageRank των σελίδων που δείχνουν σε αυτήν*

PageRank: Ορισμός

$$\text{PageRank}(v) = \sum_{u \in \text{inneighbors}(v)} \frac{\text{PageRank}(u)}{\text{outdegree}(u)}$$

PageRank: παράδειγμα



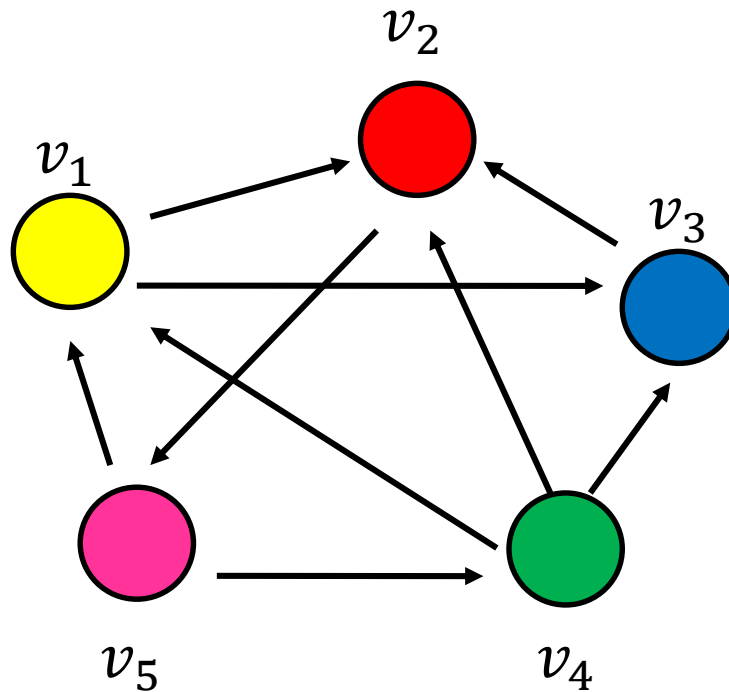
$$r_j = \sum_{i \rightarrow j} \frac{r_i}{d_i}$$

$$r_y = r_y/2 + r_a/2$$

$$r_a = r_y/2 + r_m$$

$$r_m = r_a/2$$

PageRank: παράδειγμα



PageRank: παράδειγμα

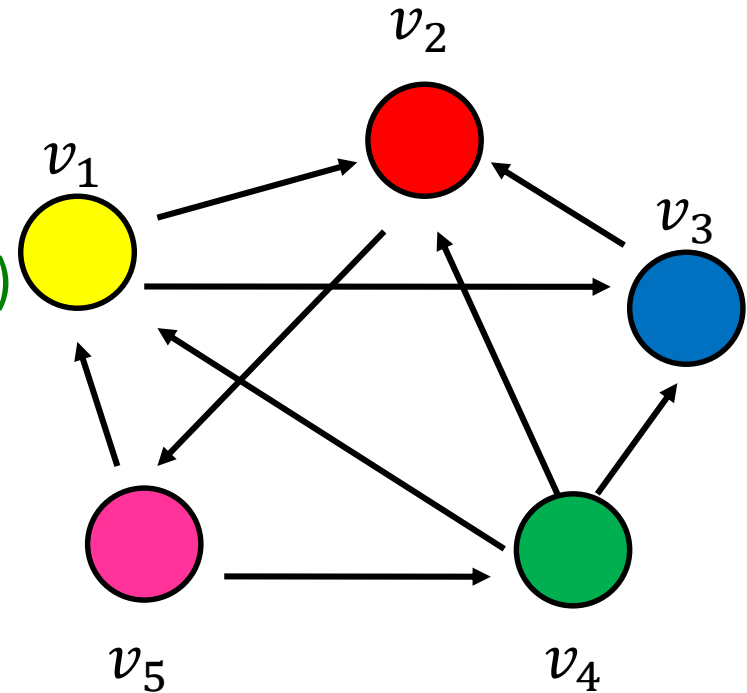
$$r(u_1) = 1/3 r(u_4) + 1/2 r(u_5)$$

$$r(u_2) = 1/2 r(u_1) + r(u_3) + 1/3 r(u_4)$$

$$r(u_3) = 1/2 r(u_1) + 1/3 r(u_4)$$

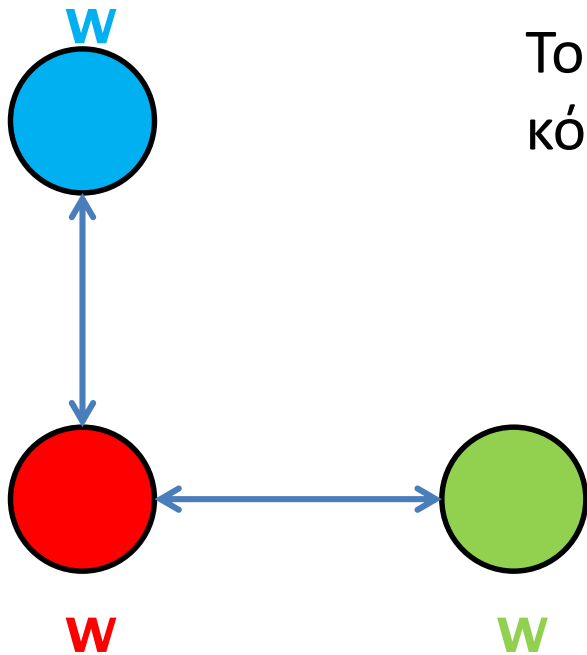
$$r(u_4) = 1/2 r(u_5)$$

$$r(u_5) = r(u_2)$$



$$r(u_1) + r(u_2) + r(u_3) + r(u_4) + r(u_5) = 1 \quad r(u): \text{PageRank}(u)$$

Ένα απλό παράδειγμα: υπολογισμός



Το συνολικό PageRank μοιράζεται στους 3 κόμβους

$$w + w + w = 1$$

$$w = w + w$$

$$w = \frac{1}{2} w$$

$$w = \frac{1}{2} w$$

- Λύνοντας το σύστημα εξισώσεων παίρνουμε το PageRank των κόμβων

$$w = \frac{1}{2} \quad w = \frac{1}{4} \quad w = \frac{1}{4}$$

PageRank: Επαναληπτικός Αλγόριθμος

Σε ένα γράφο με n nodes, αναθέτουμε σε όλους το ίδιο αρχικό PageRank = $1/n$.

- Εκτελούμε μια ακολουθία από k ενημερώσεις των PageRank τιμών με βάση των παρακάτω κανόνα:
 1. Κάθε σελίδα **μοιράζει** την τρέχουσα PageRank τιμή της ισόποσα στις *εξερχόμενες ακμές και τις περνά στους αντίστοιχους κόμβους*
 2. Κάθε σελίδα **ανανεώνει** την PageRank τιμή της ώστε να είναι ίση με το άθροισμα των ποσών που δέχεται μέσω των εισερχόμενων ακμών της.

PageRank: Αλγόριθμος

Επαναληπτικός υπολογισμός

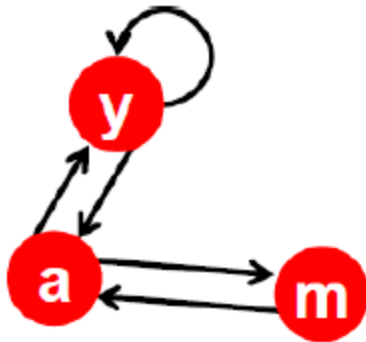
Initialize all PageRank weights to $\frac{1}{n}$

Repeat:

$$w_v = \sum_{u \rightarrow v} \frac{1}{d_{out}(u)} w_u$$

Until the weights do not change

Υπολογισμός: Παράδειγμα



$$r_y = r_y/2 + r_a/2$$

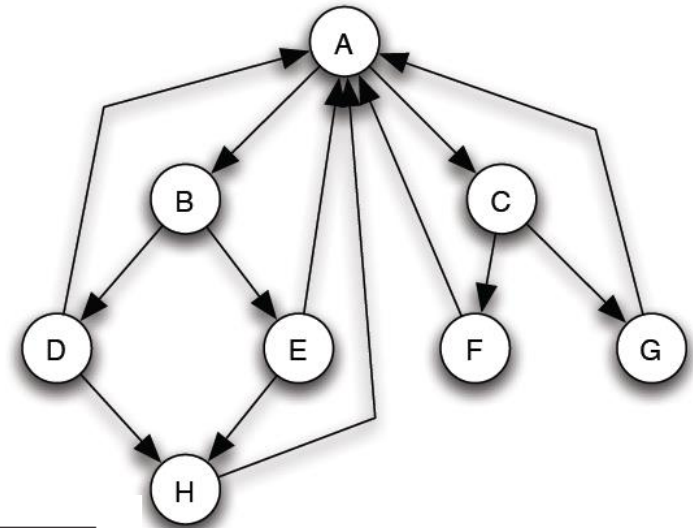
$$r_a = r_y/2 + r_m$$

$$r_m = r_a/2$$

$$\begin{pmatrix} r_y \\ r_a \\ r_m \end{pmatrix} = \begin{matrix} 1/3 & 1/3 & 5/12 & 9/24 & & 6/15 \\ 1/3 & 3/6 & 1/3 & 11/24 & \dots & 6/15 \\ 1/3 & 1/6 & 3/12 & 1/6 & & 3/15 \end{matrix}$$

Ένα μεγαλύτερο παράδειγμα

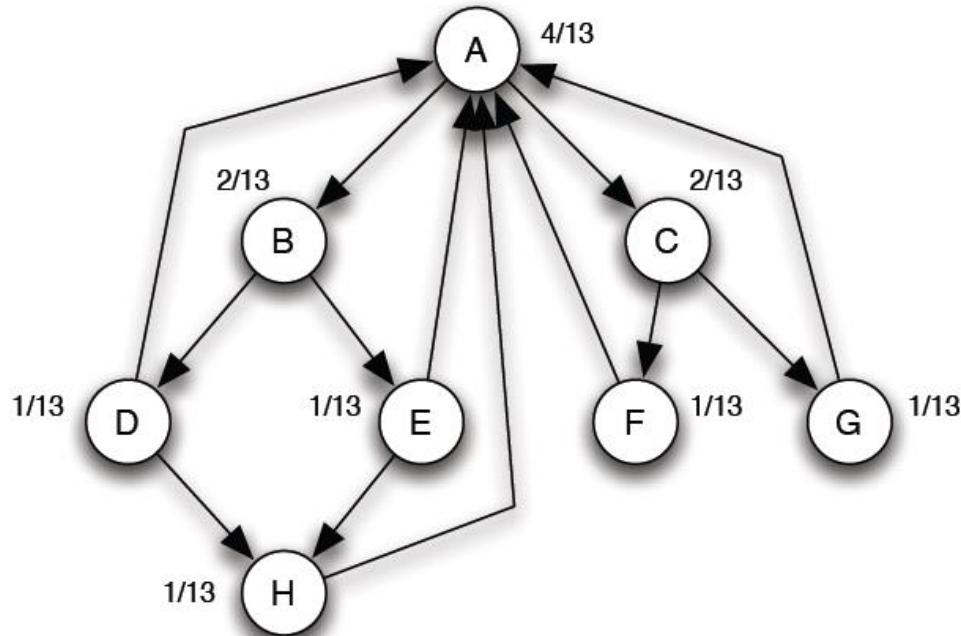
Αρχικά όλοι οι κόμβοι
PageRank $1/8$



Step	A	B	C	D	E	F	G	H
1	$1/2$	$1/16$	$1/16$	$1/16$	$1/16$	$1/16$	$1/16$	$1/8$
2	$3/16$	$1/4$	$1/4$	$1/32$	$1/32$	$1/32$	$1/32$	$1/16$

- Ένα είδος ροής (“fluid”) που κινείται στο δίκτυο
- Το συνολικό PageRank στο δίκτυο παραμένει σταθερό (δε χρειάζεται κανονικοποίηση)

Ισορροπία



- Ένας απλός τρόπος να ελέγξουμε αν το σύνολο PageRank τιμών αντιστοιχεί σε **ισορροπία**: οι τιμές αθροίζουν σε 1 και **δεν αλλάζουν** αν εφαρμόσουμε τον κανόνα ενημέρωσης

PageRank: Διανυσματική αναπαράσταση

Stochastic Adjacency Matrix – (Στοχαστικός) Πίνακας
Γειτνίασης M

Πίνακας M – πίνακας γειτνίασης του web

Αν $j \rightarrow i$, τότε $M_{ij} = 1/\text{outdegree}(j)$

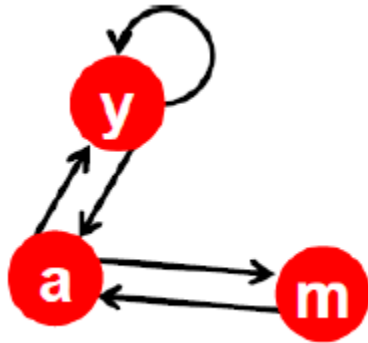
Αλλιώς, $M_{ij} = 0$

Page Rank Vector r

Ένα διάνυσμα με μία τιμή για κάθε σελίδα (το PageRank της σελίδας)

$$\sum r_i = 1$$

PageRank: Διανυσματική αναπαράσταση



	y	a	m
y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
a	$\frac{1}{2}$	0	1
m	0	$\frac{1}{2}$	0

Column stochastic: οι τιμές στις στήλες αθροίζουν στο 1

$$\begin{bmatrix} r_y \\ r_a \\ r_m \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{r}$$

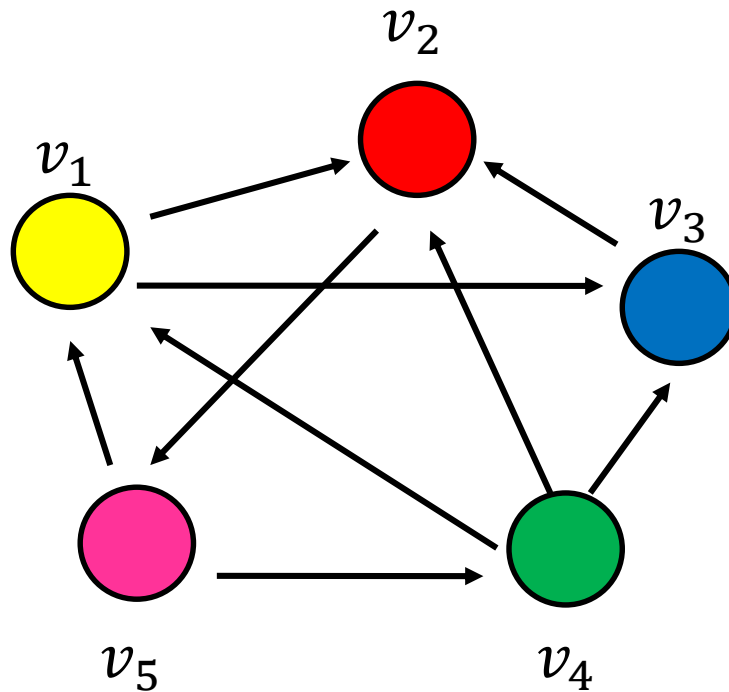
ιδιοδιάνυσμα, με ιδιοτιμή 1

Ισοδύναμα, r $1 \times n$ vector (αριστερό ιδιοδιάνυσμα)

row stochastic adjacency matrix

$$r = r M$$

PageRank: παράδειγμα



PageRank: Διανυσματική αναπαράσταση

$$r_j^{(t+1)} = \sum_{i \rightarrow j} \frac{r_i^{(t)}}{d_i} \quad \text{or equivalently} \quad r = Mr$$

- Συγκλίνει;
- Συγκλίνει σε αυτό που θέλουμε;
- Ποια είναι η φυσική σημασία;

Τυχαίος Περίπατος (Random Walks)

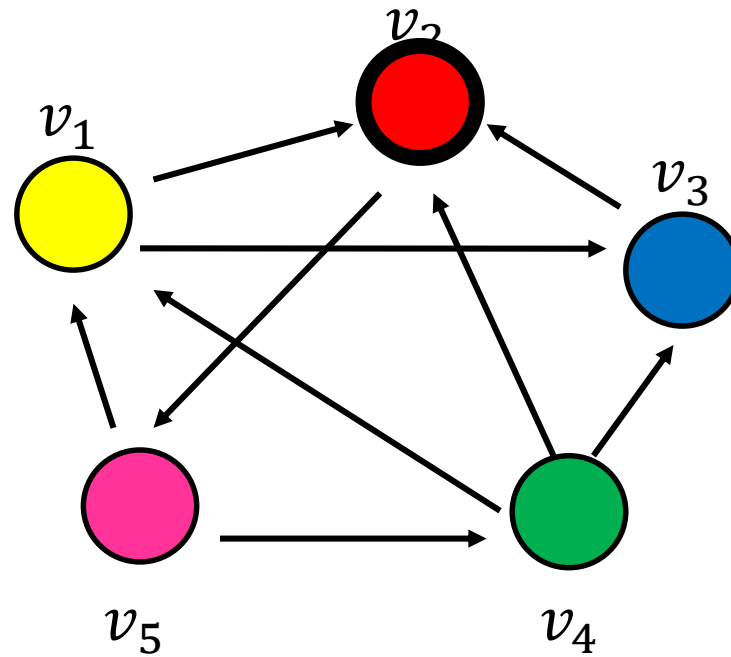
Ο αλγόριθμος προσομοιώνει ένα τυχαίο περίπατο (random walk) στο γράφο

Τυχαίος περίπατος:

- Ξεκίνα από κάποιον τυχαίο κόμβο (επιλεγμένο uniformly at random) με πιθανότητα $1/n$
- Επέλεξε τυχαία (uniformly at random) μια από τις εξερχόμενες ακμές του κόμβου
- Ακολούθησε την ακμή
- Επανάλαβε

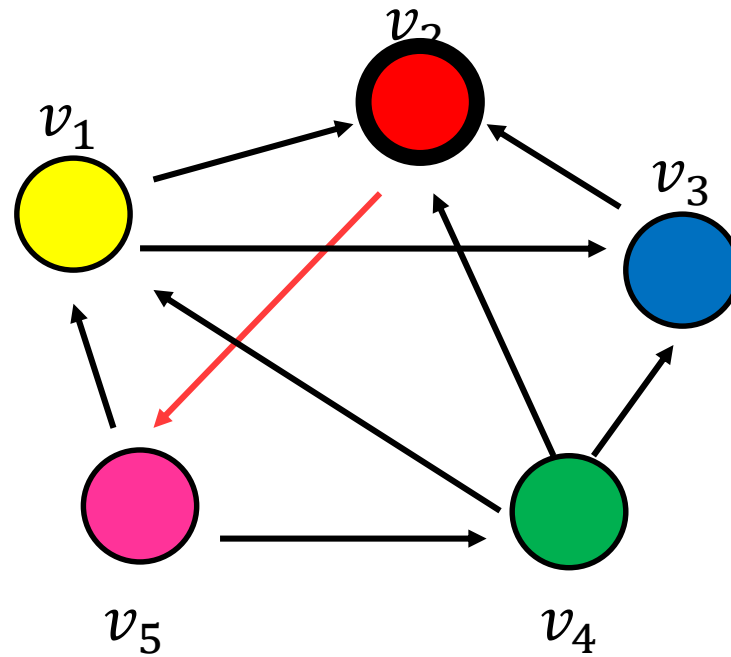
Παράδειγμα

- Step 0



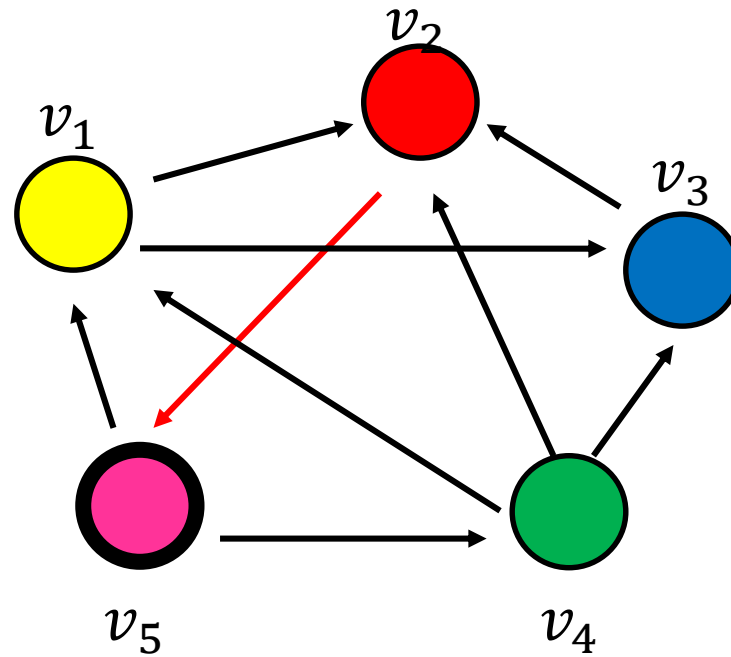
Παράδειγμα

- Step 0



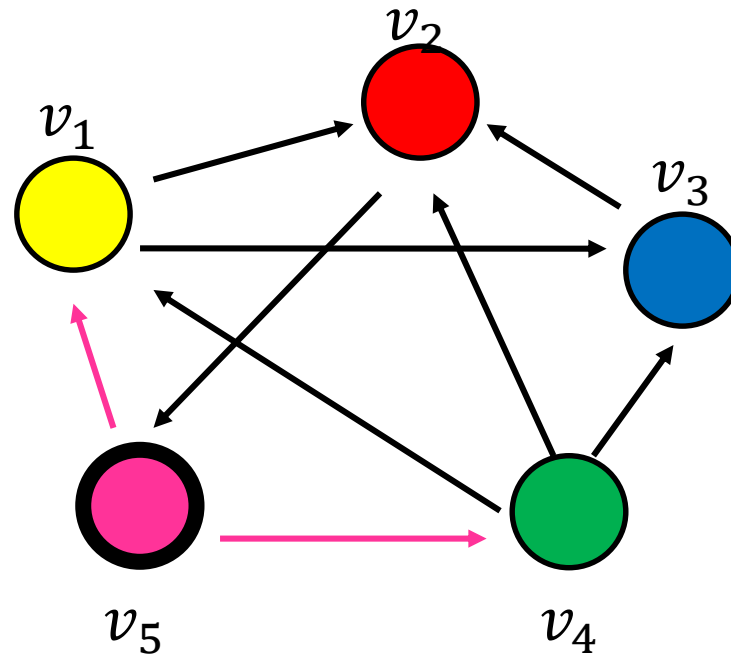
Παράδειγμα

- Step 1



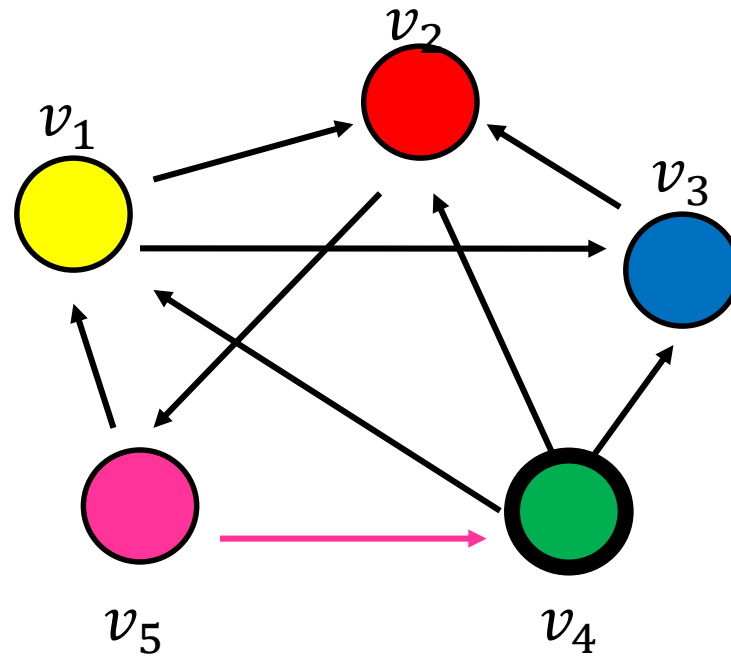
Παράδειγμα

- Step 1



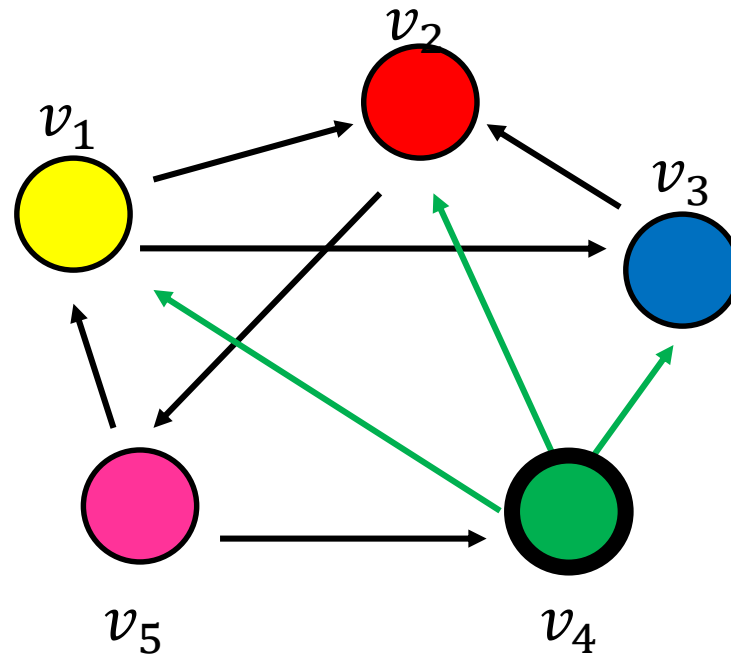
Παράδειγμα

- Step 2



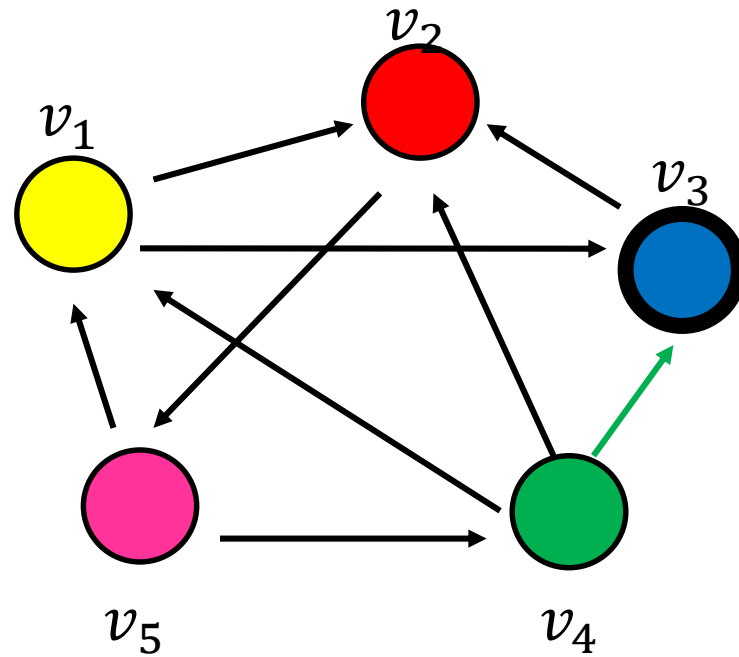
Παράδειγμα

- Step 2



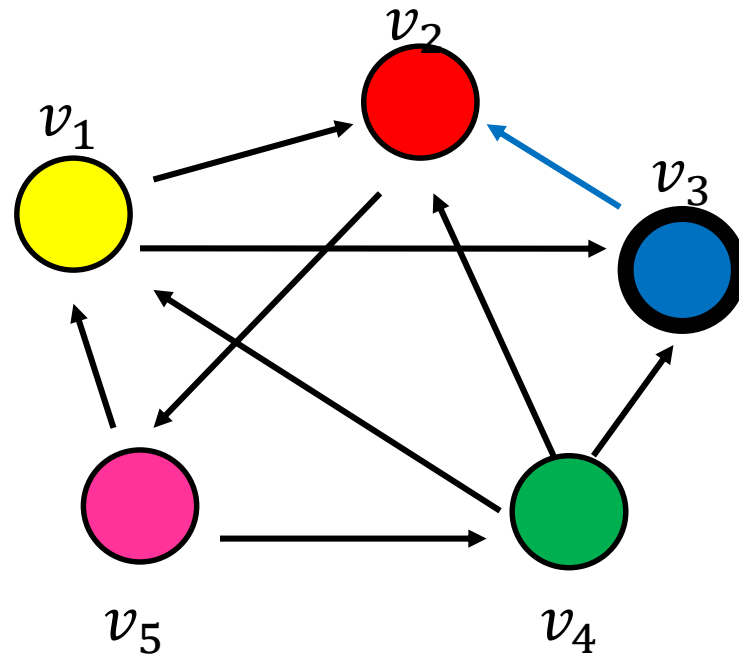
Παράδειγμα

- Step 3



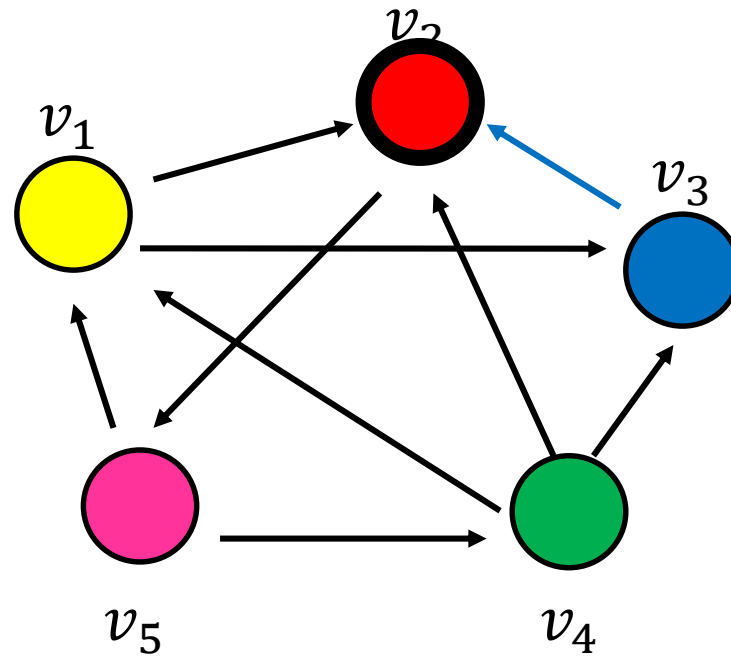
Παράδειγμα

- Step 3



Παράδειγμα

- Step 4...



Τυχαίος Περίπατος

Η πιθανότητα να είσαι στη σελίδα X μετά από k βήματα του τυχαίου περιπάτου είναι το $PageRank$ της σελίδας X μετά από k επαναλήψεις του υπολογισμού του $PageRank$

Το μοντέλο του **Random Surfer**

Του χρήστη που τριγυρνά στο web, ξεκινώντας από μια τυχαία σελίδα και συνεχίζει ακολουθώντας τυχαία κάποια από τις συνδέσεις της σελίδας

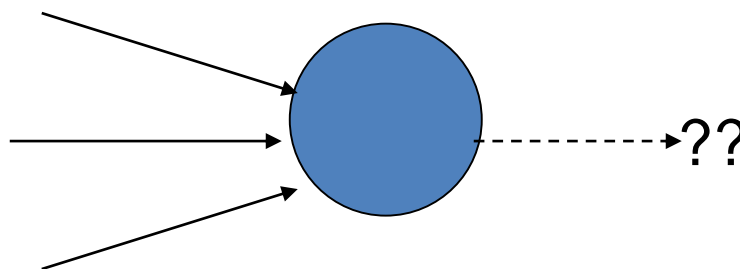
PageRank: Επεκτάσεις

Δύο προβλήματα

1. **Dead ends**: σελίδες χωρίς εξερχόμενες ακμές
Έχουν ως αποτέλεσμα να ξεφεύγει (leak out) το PageRank
2. **Spider traps**: Ομάδα σελίδων που όλες οι εξερχόμενες ακμές είναι μεταξύ τους
Τελικά απορροφούν όλο το PageRank

PageRank: Αδιέξοδα

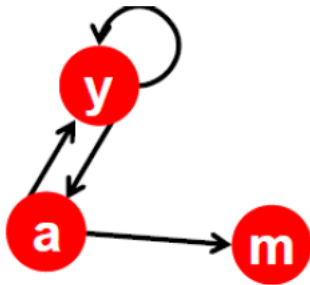
Αδιέξοδα (dead ends): σελίδες που δεν έχουν εξερχόμενες ακμές



Ο τυχαίος περίπατος μπορεί να κολλήσει σε ένα τέτοιο κόμβο

Λέγονται και **sink nodes**

PageRank: Αδιέξοδα



	y	a	m
y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
a	$\frac{1}{2}$	0	0
m	0	$\frac{1}{2}$	0

$$\mathbf{r}_y = \mathbf{r}_y/2 + \mathbf{r}_a/2$$

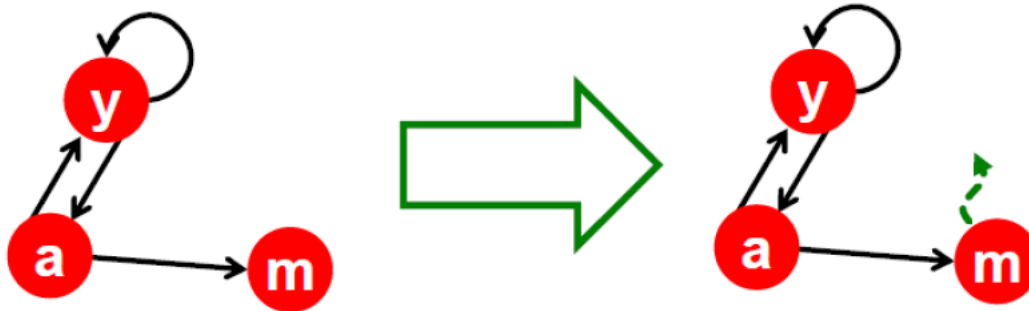
$$\mathbf{r}_a = \mathbf{r}_y/2$$

$$\mathbf{r}_m = \mathbf{r}_a/2$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_y \\ \mathbf{r}_a \\ \mathbf{r}_m \end{bmatrix} = \begin{array}{cccccc} 1/3 & 2/6 & 3/12 & 5/24 & & 0 \\ 1/3 & 1/6 & 2/12 & 3/24 & \dots & 0 \\ 1/3 & 1/6 & 1/12 & 2/24 & & 0 \end{array}$$

PageRank: Αδιέξοδα

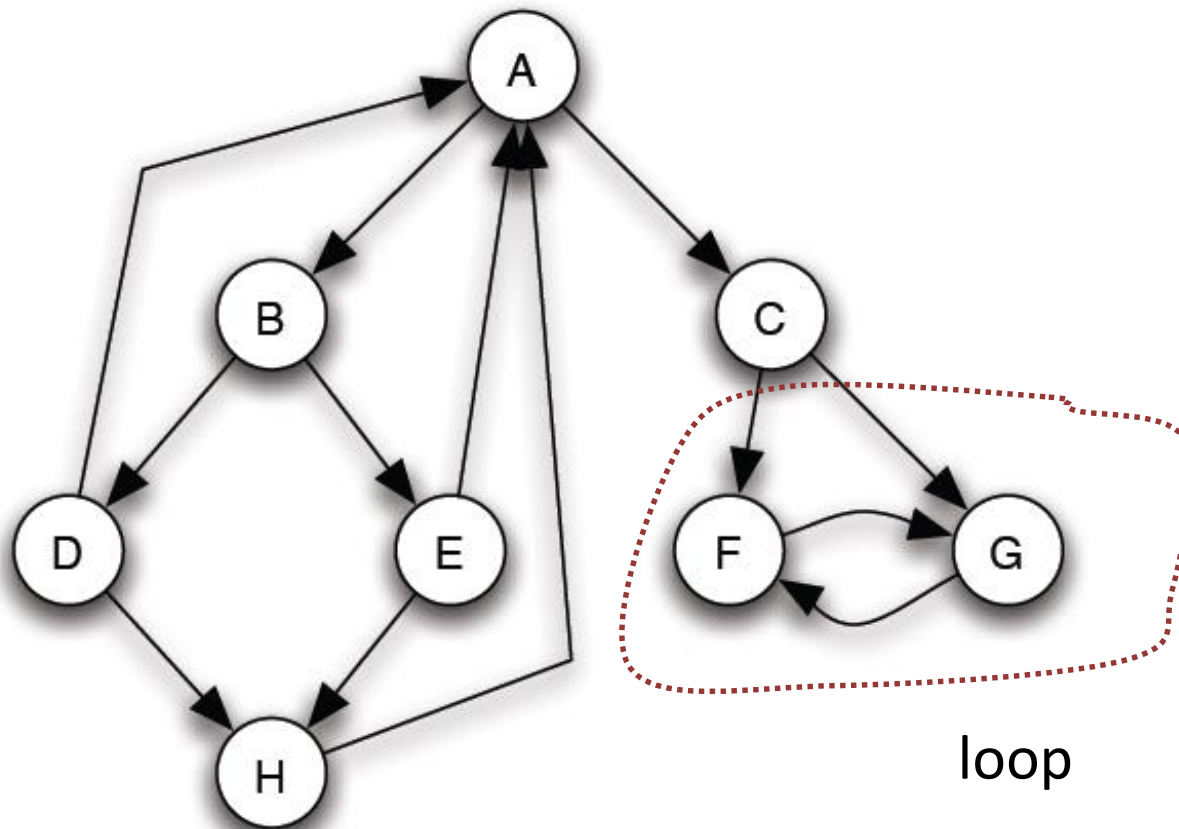
Teleports: ακολουθήσε με πιθανότητα 1 τυχαία links από τους αδιέξοδους κόμβους



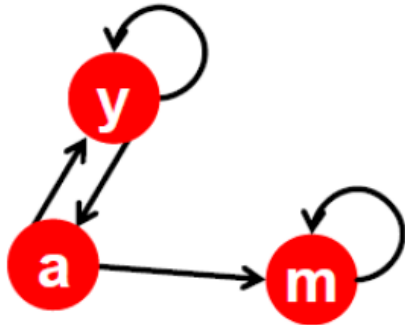
Αντίστοιχη τροποποίηση
του πίνακα

	y	a	m
y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
a	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$
m	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

PageRank: Spider Traps



PageRank: Spider Traps



	y	a	m
y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
a	$\frac{1}{2}$	0	0
m	0	$\frac{1}{2}$	1

$$r_y = r_y/2 + r_a/2$$

$$r_a = r_y/2$$

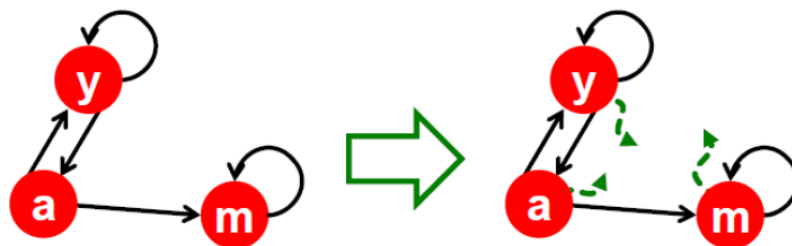
$$r_m = r_a/2 + r_m$$

$$\begin{bmatrix} r_y \\ r_a \\ r_m \end{bmatrix} = \begin{matrix} 1/3 & 2/6 & 3/12 & 5/24 & & 0 \\ 1/3 & 1/6 & 2/12 & 3/24 & \dots & 0 \\ 1/3 & 3/6 & 7/12 & 16/24 & & 1 \end{matrix}$$

Random Walks with Jumps

Τυχαία περίπατοι με «άλματα»

Με πιθανότητα β , ο περιπατητής ακολουθεί μια τυχαία εξερχόμενη ακμή όπως πριν και με πιθανότητα $1-\beta$ επιλέγει (*jumps*) σε μια τυχαία σελίδα στο δίκτυο, επιλεγμένη με πιθανότητα $1/n$



Random Walks with Jumps

Brin-Page, 1998

$$r_j = \sum_{i \rightarrow j} \beta \frac{r_i}{d_i} + (1 - \beta) \frac{1}{n} \quad bM + (1-b) \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Προτεινόμενη τιμή **0,8 – 0,9**

damping factor: probability to jump ~0,15

Μοντέλο του Random Surfer

Του χρήστη που περιπλανιέται στο web, ξεκινώντας από μια τυχαία σελίδα συνεχίζει ακολουθώντας τυχαία συνδέσεις ή με κάποια πιθανότητα βαριέται και πάει (jumps) σε μια άλλη τυχαία σελίδα

5 links και **1 jump**

Περίληψη: ορισμός

Pagerank: μια τιμή που δείχνει πόσο σημαντικός είναι ένας κόμβος

Ένας κόμβος είναι σημαντικός αν δείχνουν σε αυτόν σημαντικοί κόμβοι

Κάθε κόμβος έχει ένα **PageRank**

- Κάθε κόμβος **μοιράζει** το PageRank του **στους κόμβους που δείχνει**
- Το PageRank ενός κόμβου είναι **το άθροισμα** των PageRank **των κόμβων που δείχνουν σε αυτόν**

$$\text{PageRank}(v) = \sum_{u \rightarrow v} \frac{\text{PageRank}(u)}{\text{outdegree}(u)}$$

Περίληψη: παράδειγμα

$$r(u_1) = 1/3 r(u_4) + 1/2 r(u_5)$$

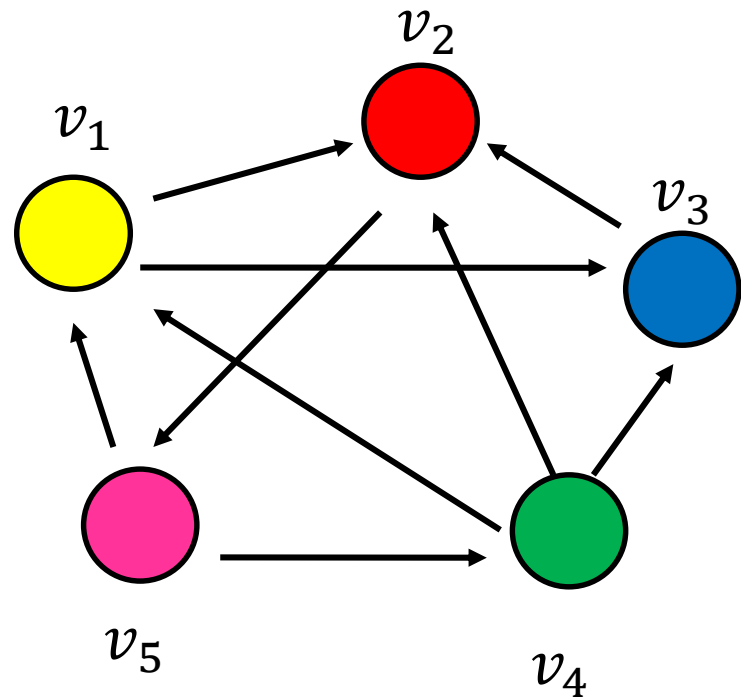
$$r(u_2) = 1/2 r(u_1) + r(u_3) + 1/3 r(u_4)$$

$$r(u_3) = 1/2 r(u_1) + 1/3 r(u_4)$$

$$r(u_4) = 1/2 r(u_5)$$

$$r(u_5) = r(u_2)$$

$r(u)$: PageRank(u)



Περίληψη: αλγόριθμος

Επαναληπτικός υπολογισμός (power iteration method)

Initialize $r^0(v) \leftarrow \frac{1}{n}$

$t = 1$

repeat

$$r^t(v) \leftarrow \sum_{u \rightarrow v} \frac{r^{t-1}(u)}{\text{outdegree}(u)}$$

$t = t + 1$

until convergence

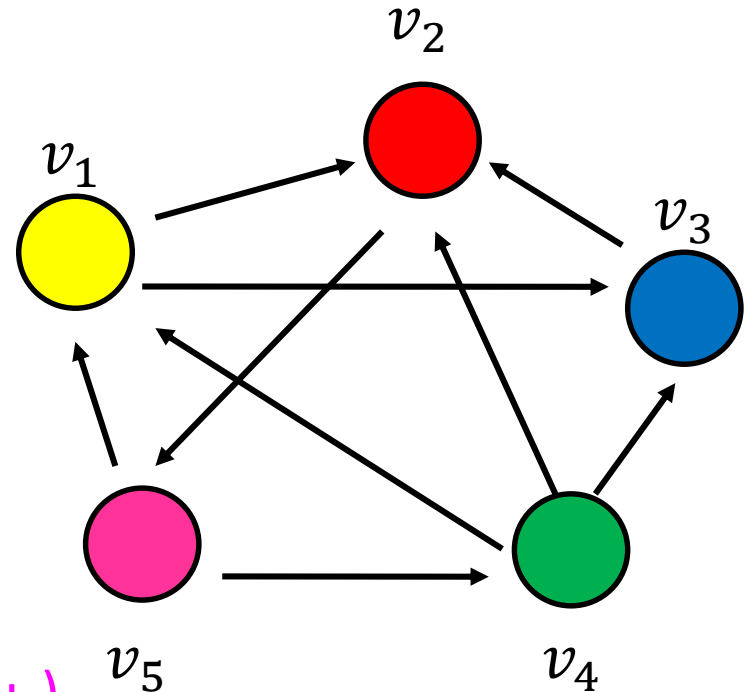
Περίληψη: πίνακες

M : $M[i, j]$ $1/\text{outdegree}(j)$ αν $j \rightarrow i$, 0, αλλιώς

r το διάνυσμα στήλη με τις PageRank τιμές

$$r = M r$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$r = \begin{bmatrix} r(u_1) \\ r(u_2) \\ r(u_3) \\ r(u_4) \\ r(u_5) \end{bmatrix}$$

$$r(u_1) = 1/3 r(u_4) + 1/2 r(u_5)$$

$$r(u_2) = 1/2 r(u_1) + r(u_3) + 1/3 r(u_4)$$

$$r(u_3) = 1/2 r(u_1) + 1/3 r(u_4)$$

$$r(u_4) = 1/2 r(u_5)$$

$$r(u_5) = r(u_2)$$

Περίληψη: random walks

Ξεκίνα από κάποιον τυχαίο κόμβο

Επέλεξε τυχαία μια από τις εξερχόμενες ακμές του
Ακολουθήσε την ακμή
Επανάλαβε

(με άλματα)

Με πιθανότητα β

Επέλεξε τυχαία μια από τις εξερχόμενες ακμές του
Ακολουθήσε την ακμή

Με πιθανότητα $1-\beta$

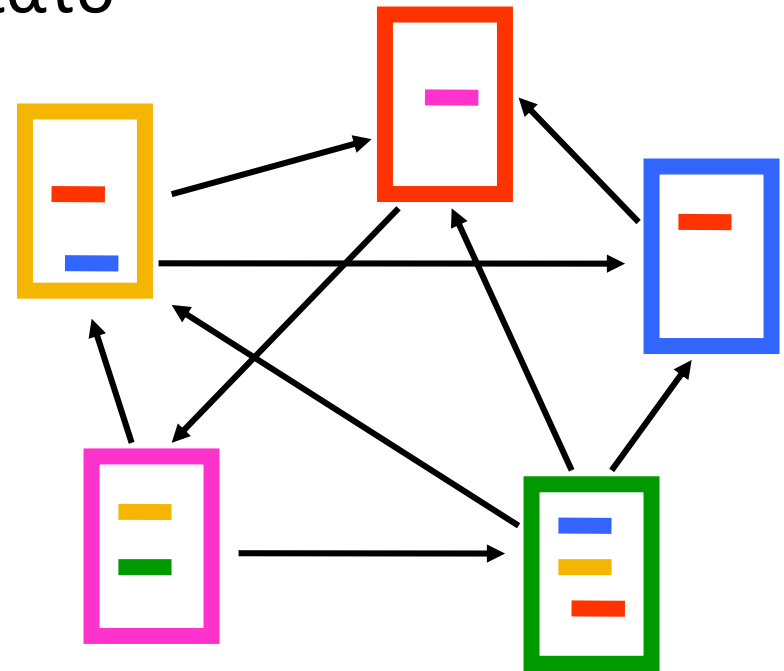
Επέλεξε ένα τυχαίο κόμβο

- Random surfer
- PageRank του κόμβου u : η πιθανότητα να είμαστε στον κόμβο όταν $t \rightarrow \infty$

PageRank: τυχαίος περίπατος (επανάληψη)

- Vanilla random walk
 - Κάνουμε το πίνακα γειτνίασης στοχαστικό και τρέχουμε ένα τυχαίο περίπατο

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

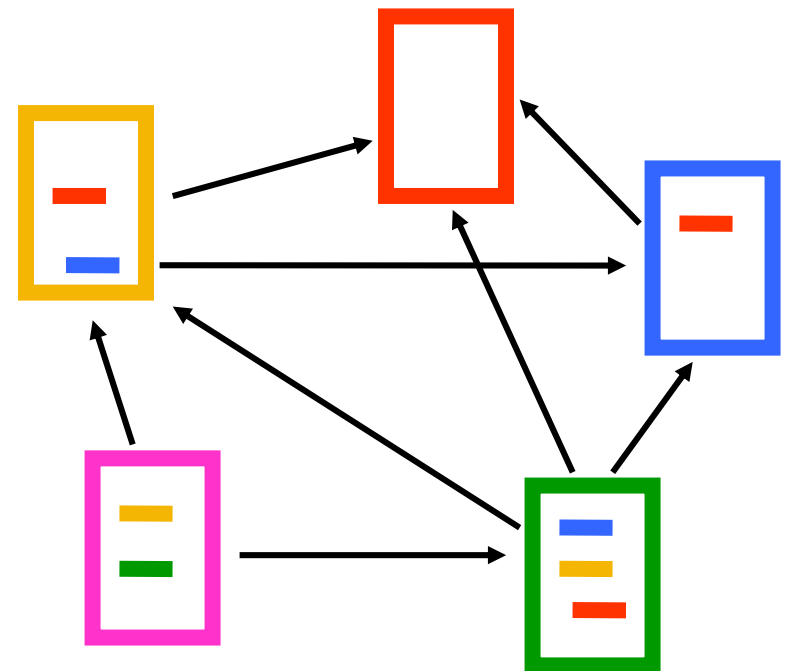


Σε αυτή τη διαφάνεια P είναι ο M transpose

PageRank: τυχαίος περίπατος

- Τι συμβαίνει με τα αδιέξοδα (**sink nodes**);
 - Όταν ο τυχαίος περίπατος φτάσει σε έναν κόμβο χωρίς εξερχόμενες ακμές;

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$



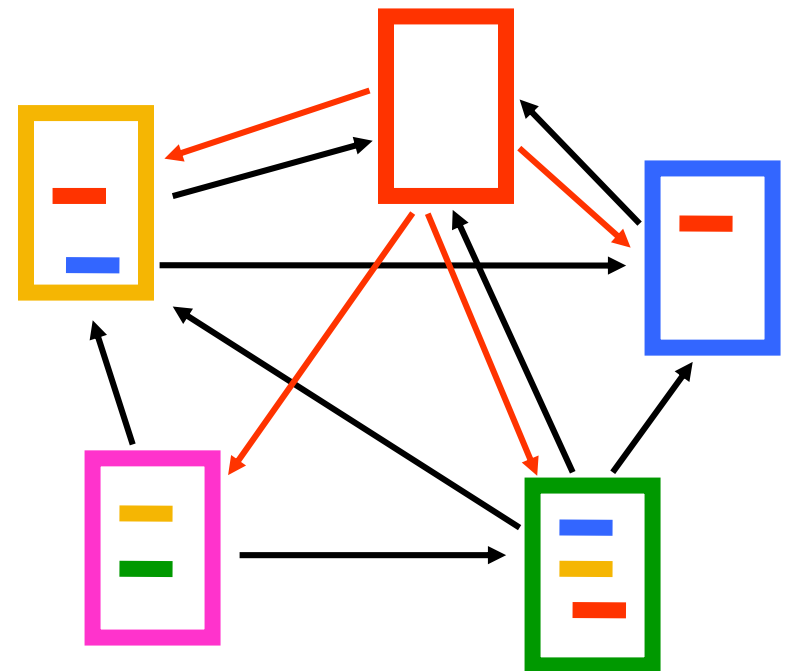
Στις διαφάνειες έχουμε τον ανάστροφο του M

PageRank: τυχαίος περίπατος

- Αντικαθιστούμε αυτά τα διανύσματα με ένα διάνυσμα v
 - συνήθως, το ομοιόμορφο διάνυσμα

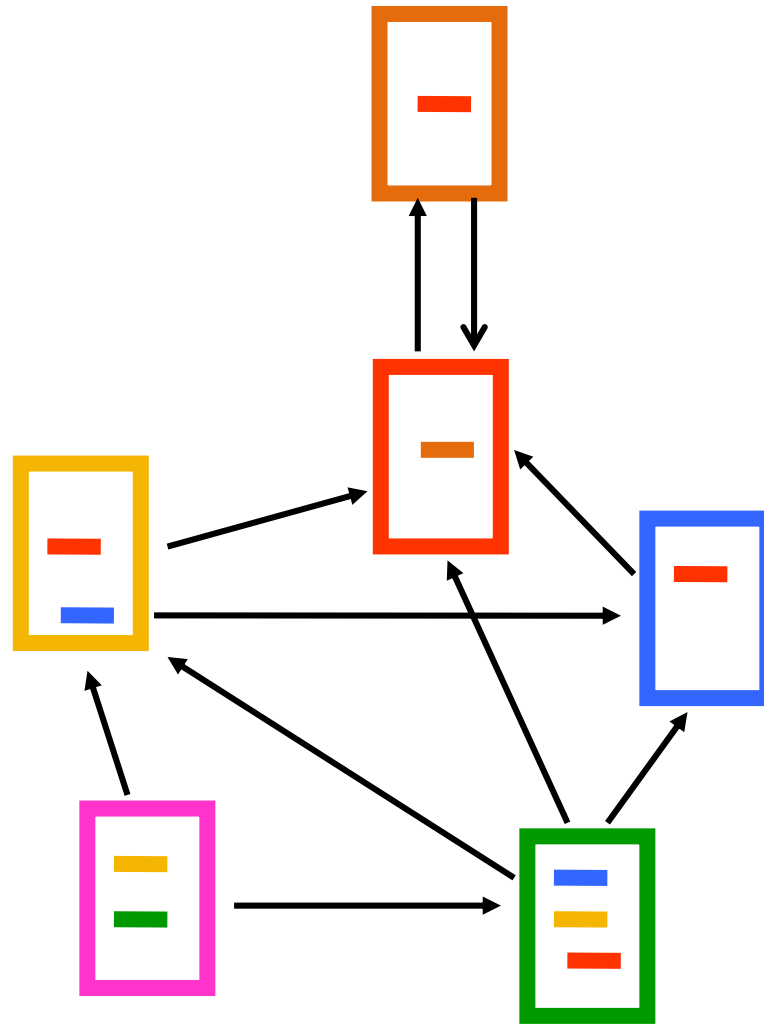
$$P' = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P' = P + dv^T \quad d = \begin{cases} 1 & \text{if } i \text{ is sink} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



PageRank: τυχαίος περίπατος

- Για τα loops (spider traps);



PageRank: τυχαίος περίπατος

- Προσθέτουμε ένα τυχαίο άλμα σε ένα διάνυσμα \mathbf{v} με πιθανότητα $1-\beta$
 - συνήθως, το ομοιόμορφο διάνυσμα
 - β dumping factor
- Ο τυχαίος περίπατος ξαναρχίζει μετά από $1/(1-\beta)$ βήματα in expectation
 - Εξασφαλίζει irreducibility

$$P'' = \beta \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} + (1-\beta) \begin{bmatrix} 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

$$P'' = \beta P' + (1-\beta) \mathbf{u} \mathbf{v}^T, \text{ όπου } \mathbf{u} \text{ διάνυσμα με όλα } 1$$

PageRank, τυχαίοι περίπατοι και αλυσίδες Markov

Τυχαίος περίπατος

Ποια είναι η πιθανότητα p_i^t να είσαι στον κόμβο i μετά από t βήματα;

$$p_1^0 = \frac{1}{5}$$

$$p_2^0 = \frac{1}{5}$$

$$p_3^0 = \frac{1}{5}$$

$$p_4^0 = \frac{1}{5}$$

$$p_5^0 = \frac{1}{5}$$

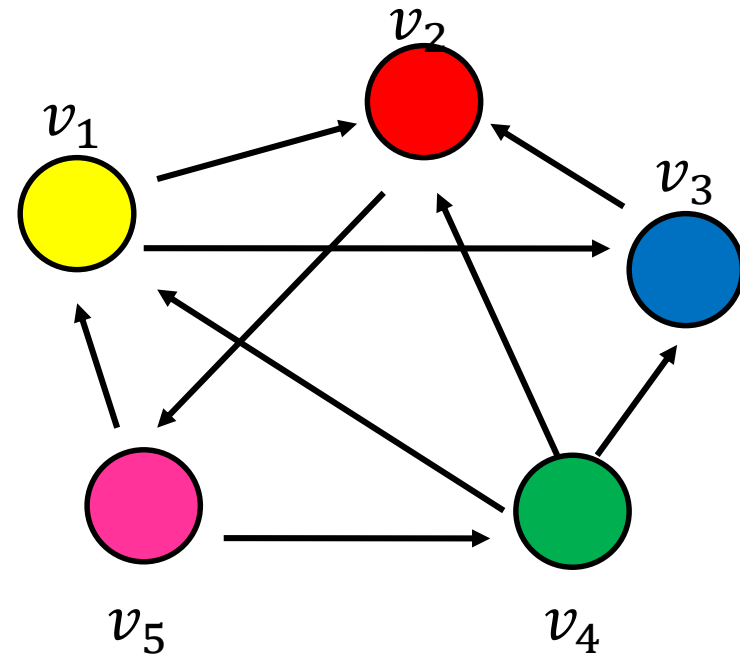
$$p_1^t = \frac{1}{3}p_4^{t-1} + \frac{1}{2}p_5^{t-1}$$

$$p_2^t = \frac{1}{2}p_1^{t-1} + p_3^{t-1} + \frac{1}{3}p_4^{t-1}$$

$$p_3^t = \frac{1}{2}p_1^{t-1} + \frac{1}{3}p_4^{t-1}$$

$$p_4^t = \frac{1}{2}p_5^{t-1}$$

$$p_5^t = p_2^{t-1}$$



Αλυσίδες Markov

- Περιγράφουν μια **στοχαστική διαδικασία διακριτού χρόνου** σε ένα σύνολο από καταστάσεις S
$$S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$$
με βάση έναν πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης (**transition probability matrix**) P
Όπου $P[i, j]$ είναι η πιθανότητα $s_i \rightarrow s_j$ να μεταβούμε στην κατάσταση s_j όταν είμαστε στην κατάσταση s_i
- Οι γραμμές αθροίζουν σε 1 (row stochastic)
- **Memoryless**: η επόμενη κατάσταση εξαρτάται μόνο από την τωρινή κατάσταση και όχι από τον παρελθόν της διαδικασίας

Αλυσίδες Markov

- State probability distribution vector

$$p^t = (p_1^t, p_2^t, \dots, p_n^t)$$

Διάνυσμα που αποθηκεύει την πιθανότητα να είμαστε στην κατάσταση p_i μετά από t βήματα

- Μπορούμε να το υπολογίσουμε ως:

$$p^t = P p^{t-1}$$

- Το state probability vector **συγκλίνει** σε μια μοναδική κατανομή αν η αλυσίδα είναι *μη περιοδική* (aperiodic) και *αμείωτη* (irreducible)

Αλυσίδες Markov

Irreducible: υπάρχει πάντα μια ακολουθία μεταβάσεων με μη μηδενική πιθανότητα από μια οποιαδήποτε κατάσταση σε μία άλλη (connectivity)

Aperiodicity: οι καταστάσεις δε μπορούν να χωριστούν σε σύνολα τέτοια ώστε όλες οι μεταβάσεις να συμβαίνουν κυκλικά από το ένα σύνολο στο άλλο

Τυχαίοι Περίπατοι

Οι τυχαίοι περίπατοι στους γράφους αντιστοιχούν σε Αλυσίδες Markov

- Το σύνολο των καταστάσεων S είναι οι κόμβοι του γράφου
- Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης είναι η πιθανότητα να ακολουθήσουμε μια ακμή από έναν κόμβο σε ένα άλλο

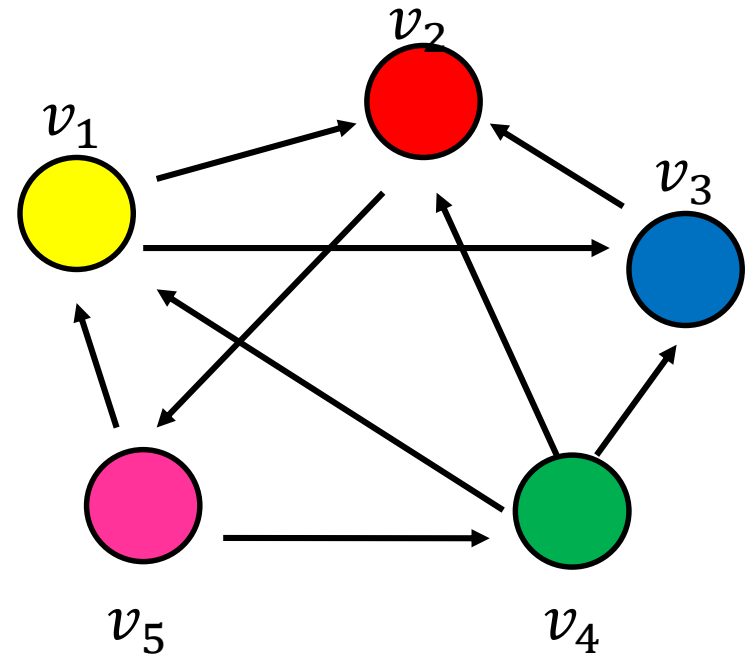
$$P[i, j] = 1/\text{outdegree}(i)$$

Στα επόμενα θα θεωρήσουμε τον ανάστροφο (transpose) του πίνακα M

Ένα παράδειγμα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$



Το διάνυσμα πιθανοτήτων

$$p^t = (p_1^t, p_2^t, \dots, p_n^t)$$

Διάνυσμα που αποθηκεύει την πιθανότητα να είμαστε στον κόμβο u_i μετά από t βήματα

- p_i^0 πιθανότητα να αρχίσουμε από τον κόμβο i (συνηθώς) ομοιόμορφη
- $p^t = P p^{t-1}$

Ένα παράδειγμα

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

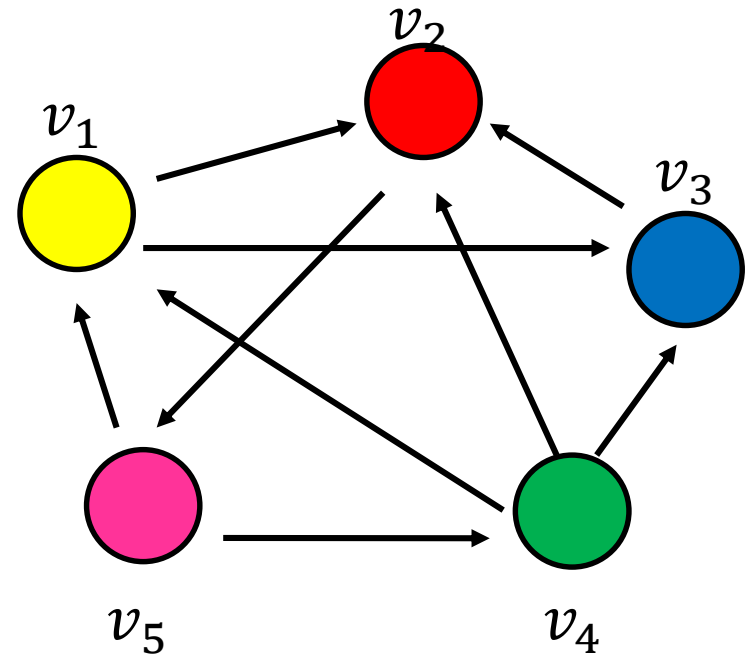
$$p_1^t = \frac{1}{3}p_4^{t-1} + \frac{1}{2}p_5^{t-1}$$

$$p_2^t = \frac{1}{2}p_1^{t-1} + p_3^{t-1} + \frac{1}{3}p_4^{t-1}$$

$$p_3^t = \frac{1}{2}p_1^{t-1} + \frac{1}{3}p_4^{t-1}$$

$$p_4^t = \frac{1}{2}p_5^{t-1}$$

$$p_5^t = p_2^{t-1}$$



Stationary distribution

- Η stationary κατανομή ενός τυχαίου περίπατου με πίνακα μετάβασης P είναι η κατανομή πιθανοτήτων π τέτοια ώστε
 - $\pi = \pi P$
- Το **ιδιοδιάνυσμα** (principal left eigenvector) του πίνακα P (οι στοχαστικοί πίνακες έχουν μέγιστη ιδιοτιμή 1)
- Το ποσοστό των φορών που επισκεπτόμαστε την κατάσταση (κόμβο) i όταν $t \rightarrow \infty$
- Θεωρία Αλυσίδων Markov: Ο τυχαίος περίπατος **συγκλίνει** σε μια μοναδική stationary distribution ανεξάρτητα από την αρχική κατάσταση αν ο γράφος είναι **ισχυρά συνεκτικός** και δεν είναι **διμερής**

Υπολογισμός

- Power Method

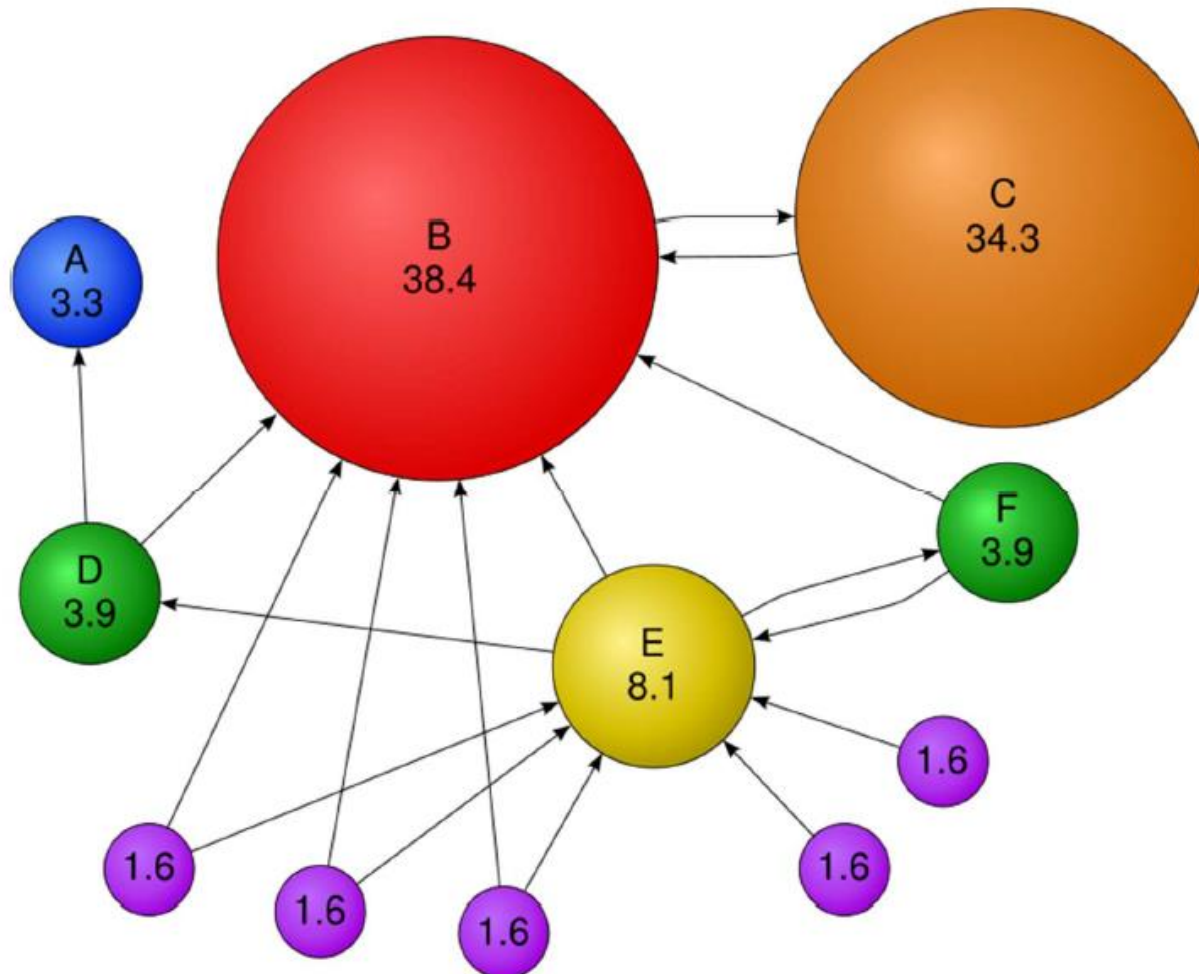
Initialize q^0 to some distribution
Repeat
 $q^t = q^{t-1}P$
Until convergence

- Μετά από πολλές επαναλήψεις $q^t \rightarrow \pi$ ανεξάρτητα από το αρχικό διάνυσμα q^0
- Power method γιατί υπολογίζει το $q^t = q^0 P^t$
- Ρυθμός σύγκλισης
 - Καθορίζεται από τη δεύτερη ιδιοτιμή λ_2^t

Stationary distribution

- Τι σημαίνει η stationary distribution π ενός τυχαίου περίπατου
- $\pi(i)$: η πιθανότητα να είμαστε στον κόμβο i μετά από ένα πολύ μεγάλο (άπειρο) αριθμό από βήματα
- $\pi = p_0 P^\infty$, όπου P ο πίνακας μετάβασης, p_0 το αρχικό διάνυσμα
 - $P(i, j)$: πιθανότητα μετάβασης από το i στο j σε ένα βήμα
 - $P^2(i, j)$: πιθανότητα μετάβασης από το i στο j σε δύο βήματα (πιθανότητα όλων των μονοπατιών μήκους 2)
 - $P^\infty(i, j) = \pi(j)$: πιθανότητα μετάβασης από το i στο j σε άπειρα βήματα – δεν έχει σημασία το αρχικό σημείο

PageRank: Παράδειγμα



PageRank: τυχαίος περίπατος

Ονομάζεται και τυχαίος περίπατος με επανεκκίνηση (random walk with restart)

Αν το διάνυσμα v που γίνεται το jump δεν είναι uniform, τότε μια προτίμηση σε συγκεκριμένους κόμβους (κόμβοι σε «μικρή» απόσταση από τους «restart» κόμβους)

Θεματικό PageRank

Η σημασία μιας σελίδας μόνο με βάση το δίκτυο – ανεξάρτητη από την ερώτηση (ή, το θέμα)

Πως μπορούμε να υπολογίσουμε «θεματικό» ή personalized PageRank;

Θεματικό PageRank

Έστω S ένα σύνολο από σελίδες «συναφείς» με το θέμα

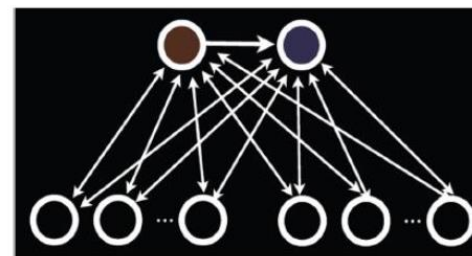
Προσθέτουμε συνδέσεις teleports σε αυτές αντί σε τυχαίους κόμβους

$$\begin{aligned} M'_{ij} &= (1 - \beta) M_{ij} + \beta / |S| && \text{if } i \in S \\ &= (1 - \beta) M_{ij} && \text{otherwise} \end{aligned}$$

Γειτνίαση με τις σελίδες στο σύνολο S

PageRank

Link Farms: δίκτυα από εκατομμύρια σελίδες που δείχνουν η μία στην άλλη με στόχο την αύξηση του PageRank κάποιων σελίδων



affordablecellphonerates.com

Search:

Results for "card phone prepaid":

Online prepaid phone card
Over 95 prepaid calling cards sale Great quality instant ph
www.zscomm.com

US 1¢/min - World 2¢/min
Use from Home, Office, Hotel & Cell Pre-Paid Card. Easy No
PennyTalk.com

Prepaid Phone Cards
Your Guide To Consumer Electronics. Find Prepaid Phone C
GizmoCafe.com

Prepaid Phone
Compare prepaid phones and plans. Boost Mobile® Officia
boostmobile.com

Prepaid Phone Cards
Looking For Prepaid Phone Cards? See Our Prepaid Phone
kellyscornerstore.com

Phone Card
Find Providers of Prepaid Phone Cards on the Business.co
www.business.com

Phone card
Unlimited local and long distance Int'l rates as low as 14 p
www.vintage.com

Related Searches:

- [Free Prepaid Calling Card](#)
- [Retail](#)
- [International Call](#)
- [Internet Phone Card](#)
- [Calling Cards from To](#)
- [Calling Cards for India](#)
- [Cellular Phone Prepaid Phone Card](#)
- [Long Distance Card](#)
- [Cheap International Calling Cards](#)
- [Instant Calling Card Pin](#)
- [Calling Card Costa Rica](#)
- [South Africa Calling Card](#)
- [Buy a Calling Card](#)

PageRank: χρήση στην ανάκτηση

- Σελίδες με μεγάλο PageRank υψηλότερα στη διάταξη
- Τελικός βαθμός συνδυασμός πολλών χαρακτηριστικών (features)

Περίληψη: πίνακες

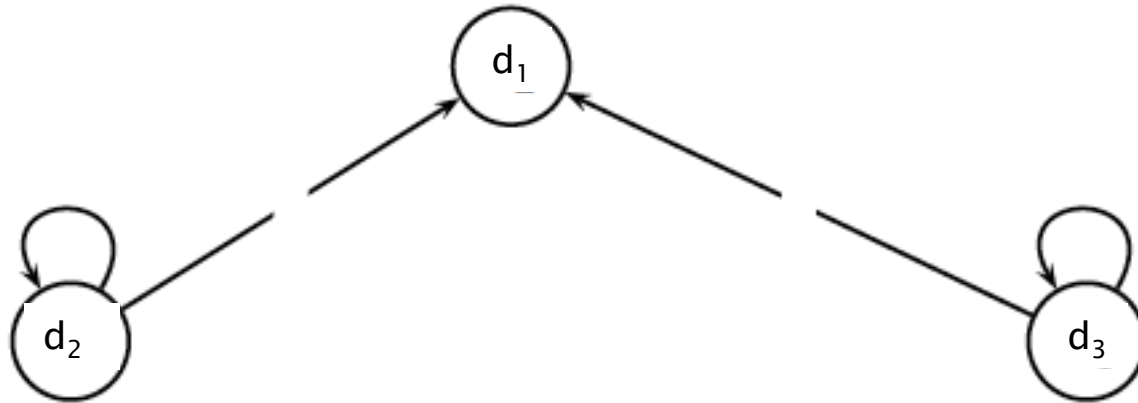
Επεκτάσεις

Dead ends: η στήλη στο M που του αντιστοιχεί $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1/n \\ 1/n \\ 1/n \end{bmatrix}$

Spider traps (loops): ακμές με πιθανότητα $1-\beta$

$$\beta M + (1-\beta) \begin{bmatrix} 1/n & & \\ 1/n & & \\ & \dots & \\ 1/n & & \end{bmatrix}$$

Άσκηση



PageRank
HITS

HITS

Hyperlink-Induced Topic Search (HITS)

Την ίδια εποχή με το PageRank

Δύο βασικές διαφορές

1. Κάθε σελίδα έχει δύο βαθμούς:
 - ένα **βαθμό κύρους (authority rank)** και
 - ένα **κομβικό βαθμό (hub rank)**
2. Οι βαθμοί είναι **θεματικοί**

HITS

Authorities (σελίδες κύρους): σελίδες που περιέχουν χρήσιμη πληροφορία (οι εξέχουσες, έγκριτες απαντήσεις στις ερωτήσεις)

Σελίδες εφημερίδων

Σελίδες μαθημάτων

Σελίδες κατασκευαστών αυτοκινήτων

Hubs (κομβικές σελίδες): σελίδες που δείχνουν σε αυθεντίες (λίστες μεγάλης αξίας)

Λίστες από εφημερίδες

Πρόγραμμα μαθημάτων

Λίστες από κατασκευαστές

Άλλη εφαρμογή: βιβλιογραφικές αναφορές

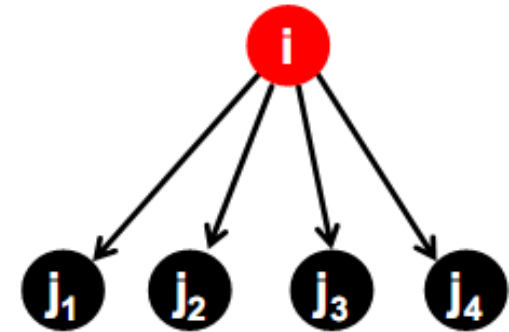
HITS

- Ένα **hub** είναι τόσο καλό όσο καλά είναι τα authorities στα οποία δείχνει (εξερχόμενες ακμές σε πολλά καλά authorities)
- Ένα **authority** είναι τόσο καλό όσο τα hubs που δείχνουν σε αυτό (εισερχόμενες ακμές από πολλά καλά hubs)

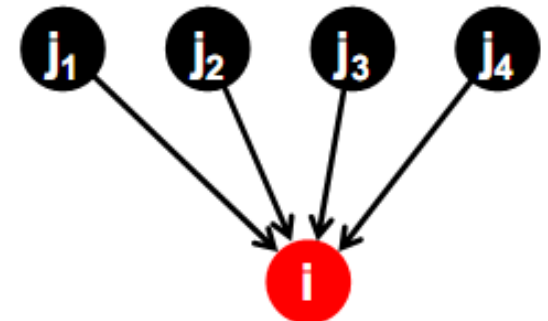
HITS: Ορισμοί

Κάθε σελίδα p , έχει δύο σκορ

- **hub score (h)** ως ειδικός Άθροισμα των authority σκορ των σελίδων στις οποίες δείχνει
- **authority score (a)** ποιότητα περιεχομένου
Άθροισμα των hub σκορ των σελίδων που δείχνουν σε αυτήν



$$h_i = \sum_{i \rightarrow j} a_j$$



$$a_i = \sum_{j \rightarrow i} h_j$$

Χρήση στη αναζήτηση

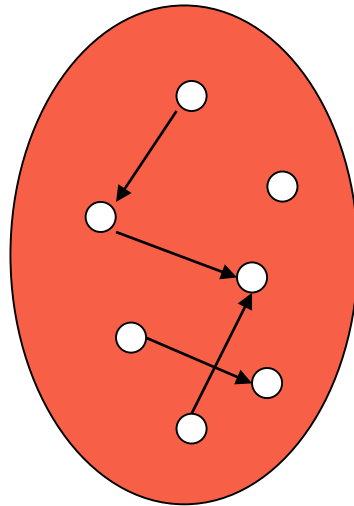
- Στην αρχική του μορφή, ο αλγόριθμος εφαρμόζεται σε *υποσύνολο του web (query dependent input)*
- 1. Βρες από το web ένα **σύνολο βάσης (base set)** από σελίδες που θα μπορούσαν να είναι καλά hubs ή authorities.
- 2. Χρησιμοποίησε αυτό το σύνολο για να υπολογίσεις τα scores και να βρεις ένα μικρό σύνολο από κορυφαίες hub και authority σελίδες (επαναληπτικός αλγόριθμος)

Σύνολο βάσης

- Δοθείσας μια ερώτησης (πχ **Macron**), χρησιμοποίησε ένα ευρετήριο κειμένου και ανέκτησε όλες τις σελίδες που περιέχουν τον όρο **Macron**.
 - Ας ονομάσουμε αυτό το σύνολο, **σύνολο ρίζα (root set)**
- Πρόσθεσε οποιαδήποτε σελίδα:
 - είτε δείχνει σε μια σελίδα στο σύνολο ρίζα,
 - είτε μια σελίδα στο σύνολο ρίζα δείχνει σε αυτήνΚαι τις μεταξύ τους συνδέσεις
- Ονομάζουμε το σύνολο που προκύπτει **σύνολο βάσης**

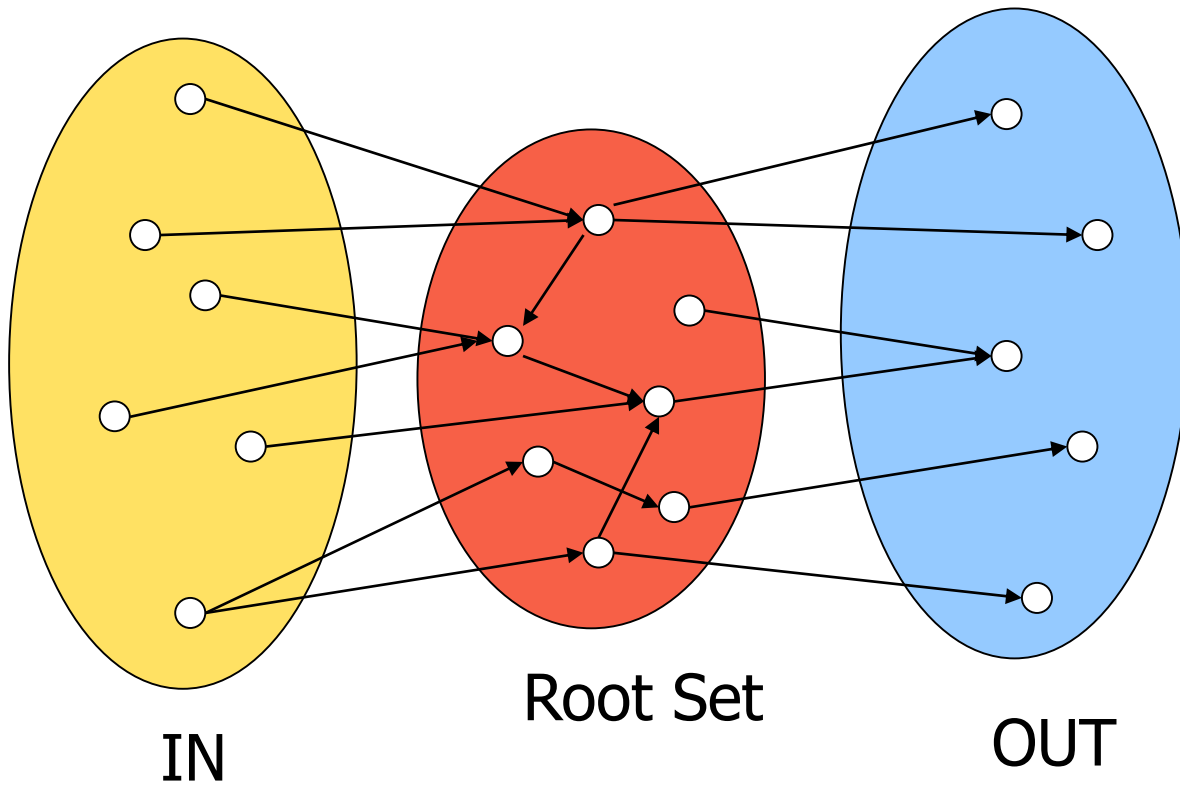
Σύνολο βάσης

Σύνολο ρίζα που προκύπτει από μια μηχανή αναζήτησης που χρησιμοποιεί μόνο το κείμενο

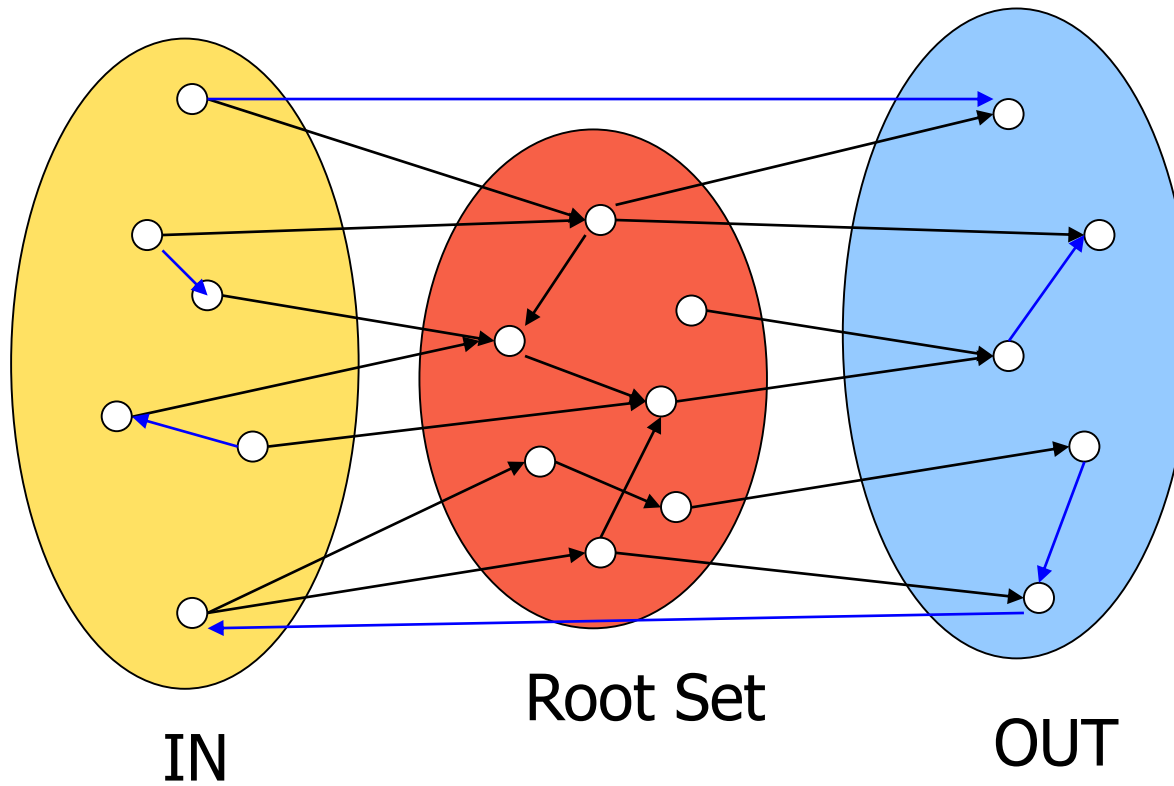


Root Set

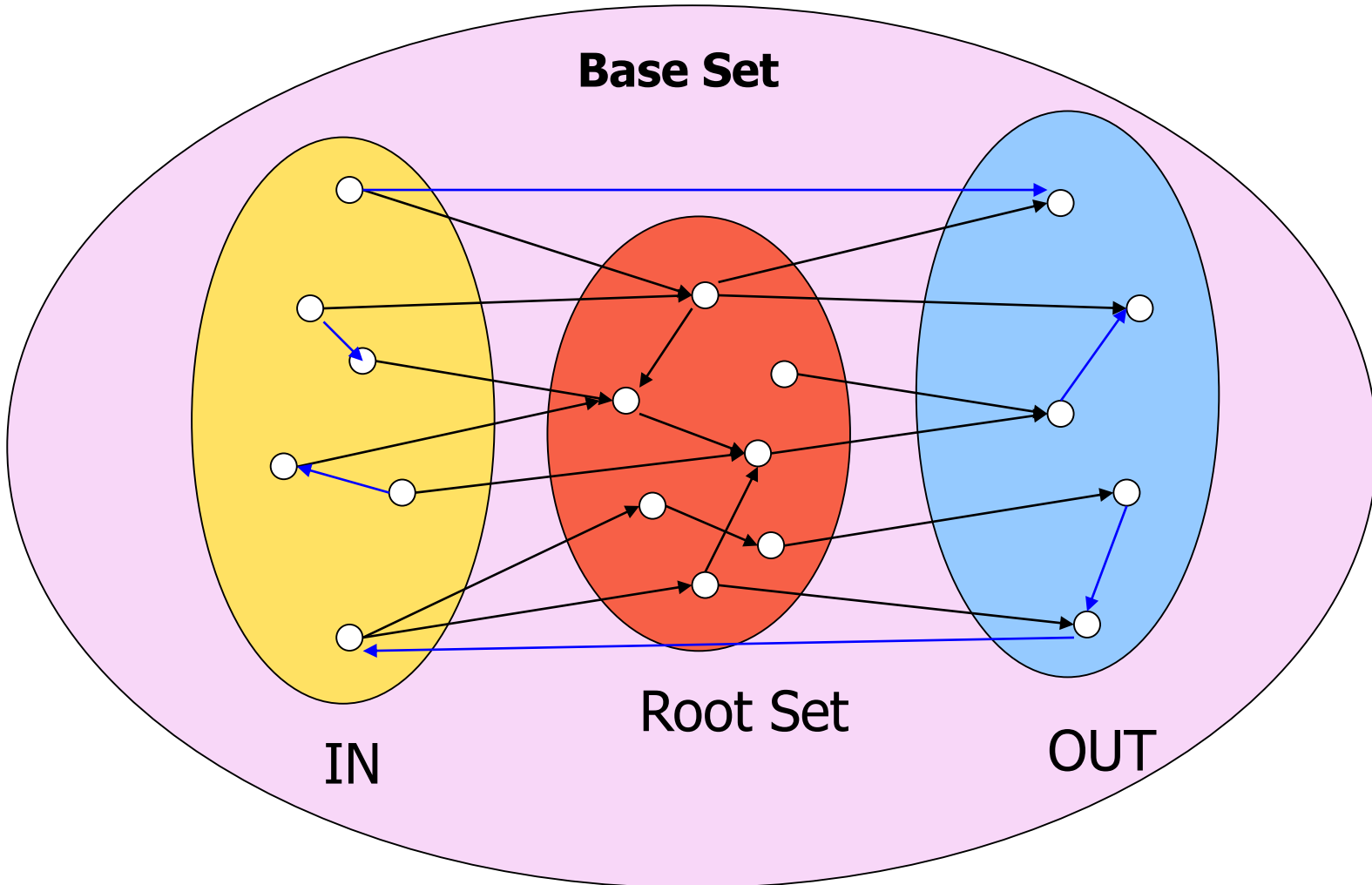
Σύνολο βάσης



Σύνολο βάσης



Σύνολο βάσης



Υπολογισμός

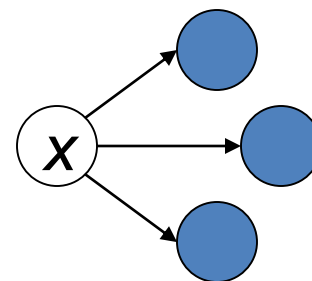
- Υπολόγισε για κάθε σελίδα x στο σύνολο βάσης ένα hub score $h(x)$ και ένα authority score $a(x)$.
 - Initialize: for all x , $h(x) \leftarrow 1$; $a(x) \leftarrow 1$;
 - Iteratively update all $h(x)$, $a(x)$;

Επαναληπτικός υπολογισμός

- Επανάλαβε τις παρακάτω ενημερώσεις για κάθε κόμβο x :

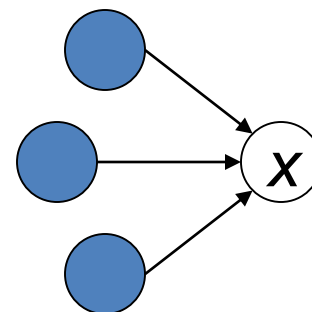
I operation

$$h(x) \leftarrow \sum_{x \mapsto y} a(y)$$



O operation

$$a(x) \leftarrow \sum_{y \mapsto x} h(y)$$

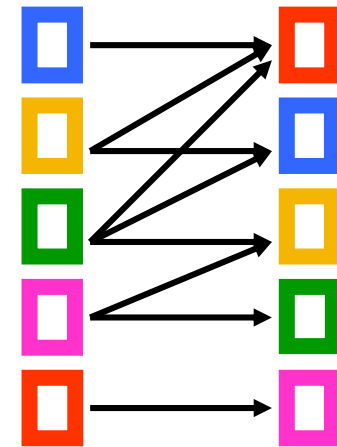
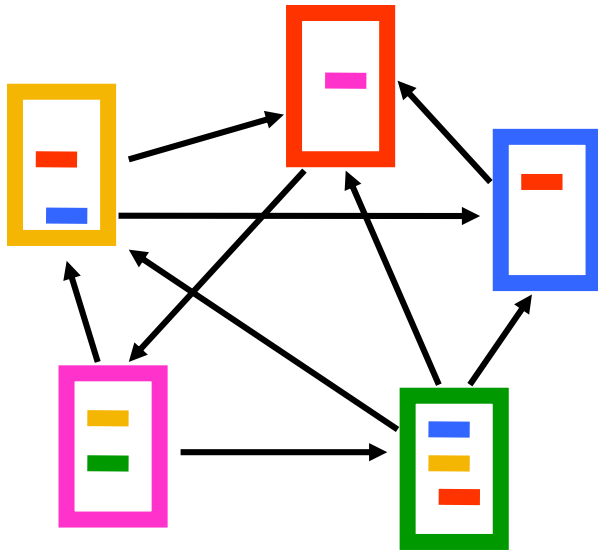


Normalize

Κανονικοποίηση

- Για να αποφύγουμε οι τιμές $h()$ and $a()$ να γίνουν πολύ μεγάλες τις κλιμακώνουμε (scale down) μετά από κάθε επανάληψη
- Πως;
 - Δεν έχει σημασία γιατί αυτό που πραγματικά μας ενδιαφέρει είναι οι σχετικές τιμές τους
 - Διαίρεσε όλα τα hub scores με το άθροισμα των hub scores και όλα τα authority scores με το άθροισμα των authority scores

Παράδειγμα

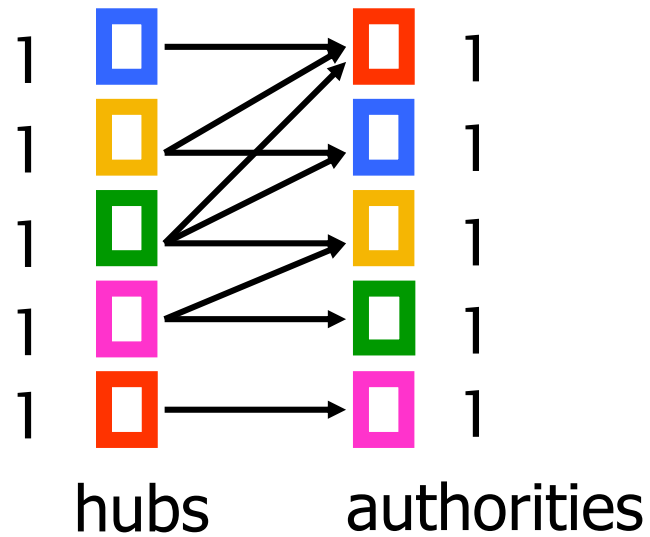


hubs

authorities

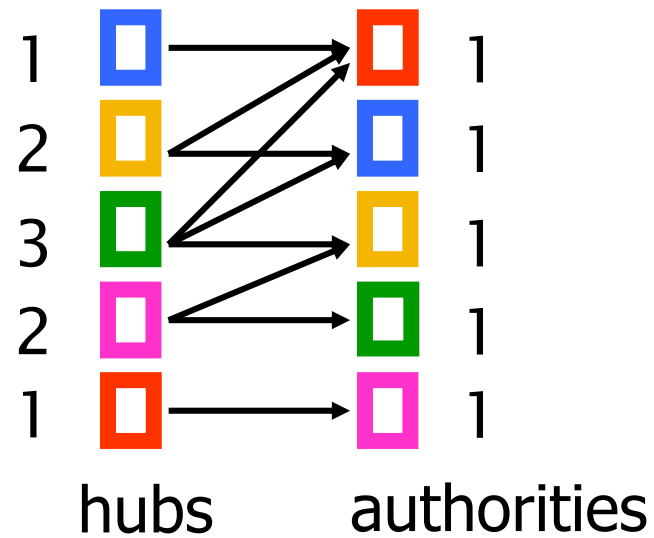
Παράδειγμα

Initialize



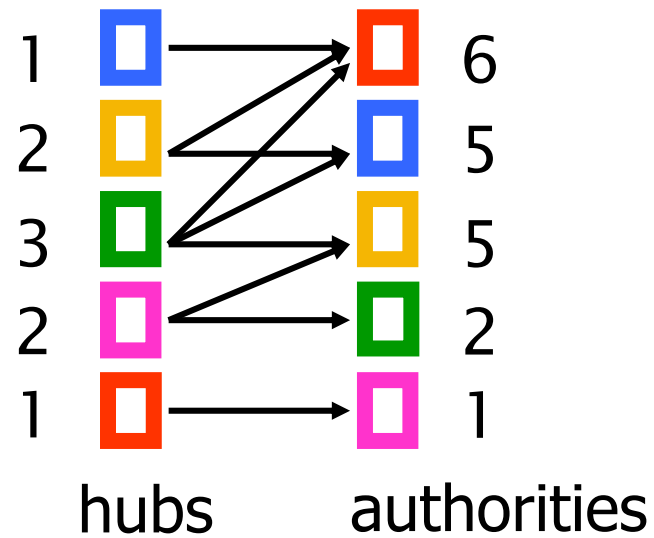
Παράδειγμα

Step 1: O operation



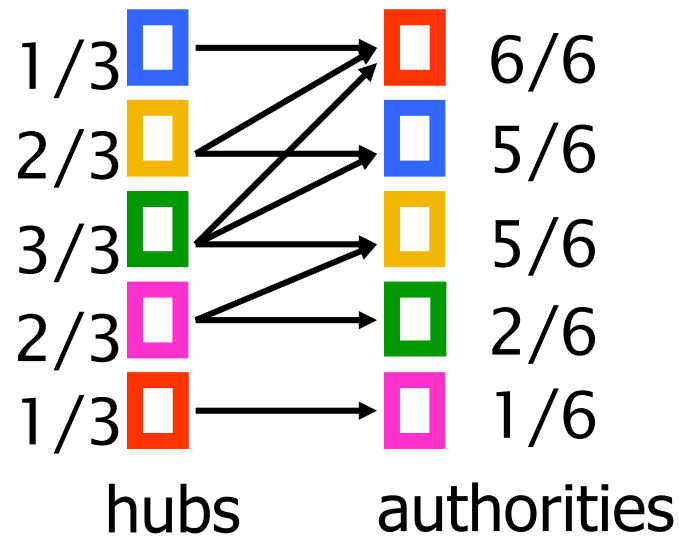
Παράδειγμα

Step 1: I operation



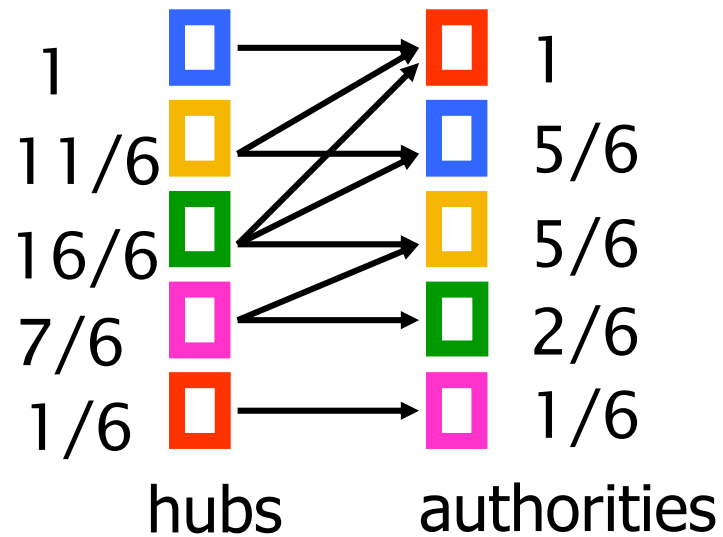
Παράδειγμα

Step 1: Normalization (Max norm)



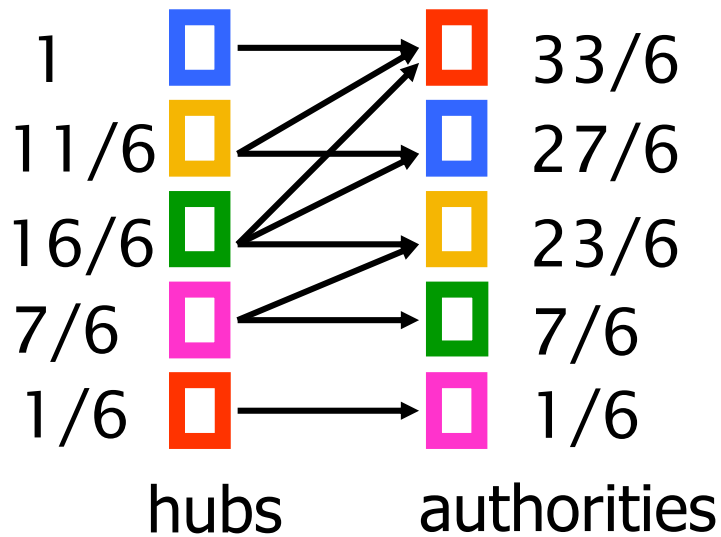
Παράδειγμα

Step 2: 0 step



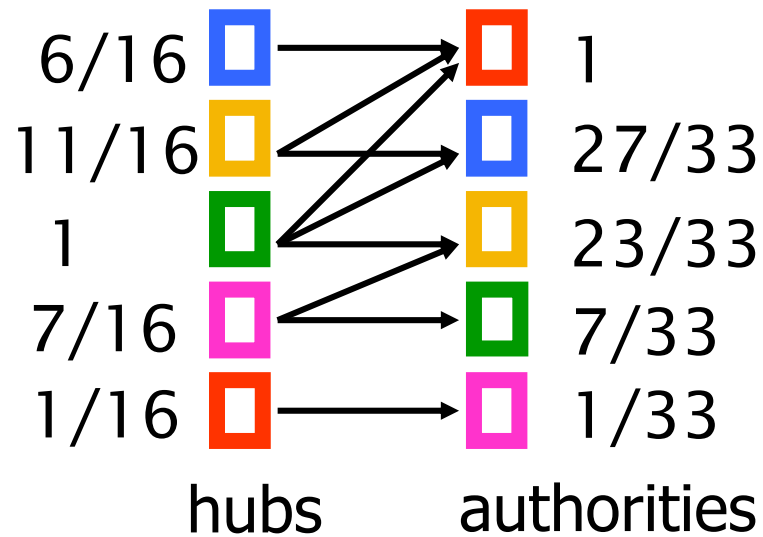
Παράδειγμα

Step 2: 1 step



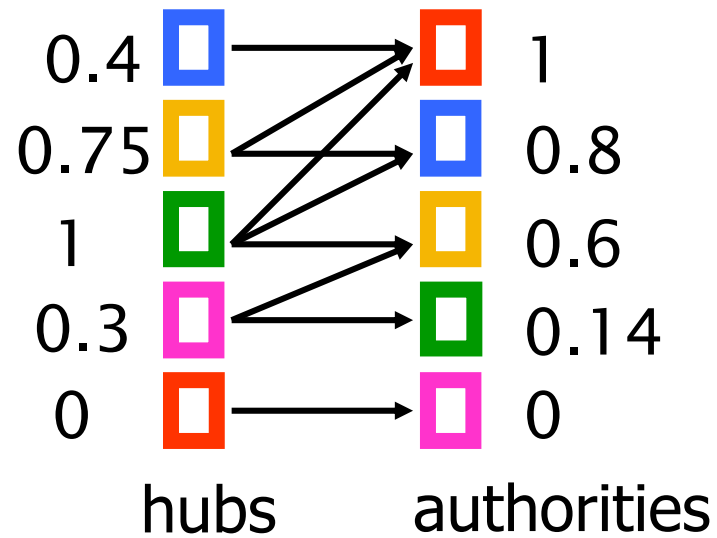
Παράδειγμα

Step 2: Normalization



Παράδειγμα

Convergence



Σύγκλιση

- Οι σχετικές τιμές συγκλίνουν μετά από λίγες επαναλήψεις
- Στην πράξη, μετά από ~ 5 επαναλήψεις οι τιμές σχεδόν σταθεροποιούνται

Japan Elementary Schools

Hubs

- schools
- LINK Page-13
- “ú-{|ŠwZ
- a%o,, □ŠwZfz[f fy[fW
- 100 Schools Home Pages (English)
- K-12 from Japan 10/...rnet and Education)
- http://www...iglobe.ne.jp/~IKESAN
- ,l,f,j □ŠwZ,U”N,P’g•”Œê
- ÒŠ—’-—§ÒŠ—“Œ □ŠwZ
- Koulutus ja oppilaitokset
- TOYODA HOMEPAGE
- Education
- Cay's Homepage(Japanese)
- -y“i □ŠwZ,l fz[f fy[fW
- UNIVERSITY
- %oJ—³ □ŠwZ DRAGON97-TOP
- Â%o a □ŠwZ,T”N,P’g fz[f fy[fW
- ¶µ°é¼ÁÁ© ¥á¥È¥â¼¼ ¥á¥È¥â¼¼

Authorities

- The American School in Japan
- The Link Page
- %o a es—§^ä“c □ŠwZfz[f fy[fW
- Kids' Space
- ^Àes—§^Àé¼¼•” □ŠwZ
- <{éx³ç’âŠw•@ □ŠwZ
- KEIMEI GAKUEN Home Page (Japanese)
- Shiranuma Home Page
- fuzoku-es.fukui-u.ac.jp
- welcome to Miasa E&J school
- □“p i Œ§E%o j • l s—§’†i¼¼ □ŠwZ,l fy
- http://www...p/~m_maru/index.html
- fukui haruyama-es HomePage
- Torisu primary school
- goo
- Yakumo Elementary,Hokkaido,Japan
- FUZOKU Home Page
- Kamishibun Elementary School...

Παρατηρήσεις

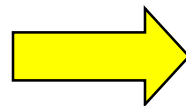
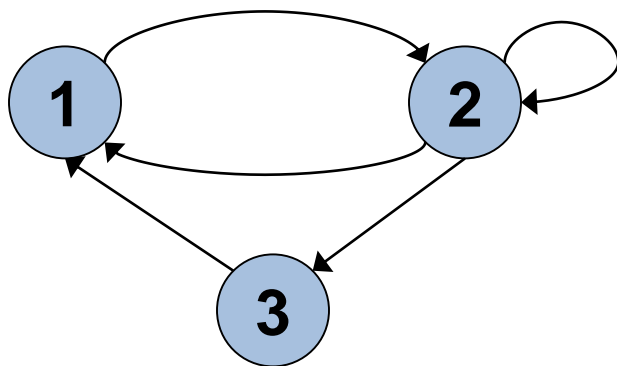
- Συγκεντρώθηκαν καλές σελίδες ανεξάρτητα από τη γλώσσα του περιεχομένου της σελίδας
- Η χρήση της ανάλυσης συνδέσμων γίνεται μετά τη δημιουργία του συνόλου βάσης
 - ο υπολογισμός των score εξαρτάται από το ερώτημα και γίνεται μετά την ανάκτηση με βάση το περιεχόμενο (σημαντική χρονική επιβάρυνση)

Θέματα

- Topic Drift
 - Σελίδες εκτός θέματος (off-topic) μπορεί να οδηγήσουν στο να επιστραφούν εκτός θέματος authorities
 - Π.χ., οι γειτονικοί κόμβοι μπορεί να αναφέρονται σε κάποιο “super topic”
- Mutually Reinforcing Affiliates
 - Συνεργαζόμενες σελίδες μπορεί να αυξήσουν τα σκορ τους

Διανυσματική αναπαράσταση

- $n \times n$ πίνακας γειτνίασης **A**:
 - Για το σύνολο βάση
 - $A_{ij} = 1$ αν η σελίδα page i δείχνει στο j , αλλιώς $= 0$.



	1	2	3
1	0	1	0
2	1	1	1
3	1	0	0

Διανύσματα Hub/Authority

- Τα hub σκορ $h()$ και authority σκορ $a()$ ως n -διάστατα διανύσματα
- Οι επαναληπτικοί υπολογισμοί:

$$h(x) \leftarrow \sum_{x \mapsto y} a(y) \quad h_i = \sum_j A_{ij} \cdot a_j$$

$$a(x) \leftarrow \sum_{y \mapsto x} h(y)$$

$$h = A a$$

$$a = A^T h, \quad A^T \text{ transpose (ανάστροφος)}$$

Διανυσματική αναπαράσταση

$$h = A a.$$

$$a = A^T h.$$

Αντικατάσταση:

$$h = A A^T h$$

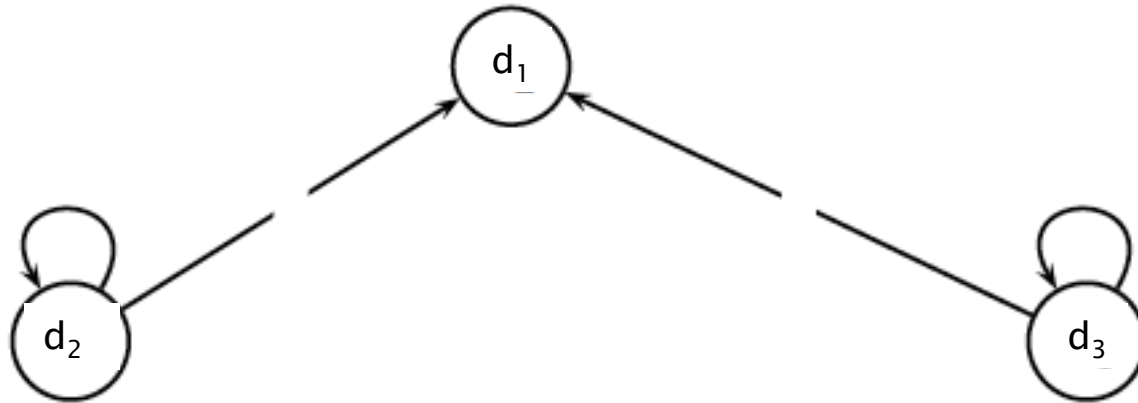
$$a = A^T A a.$$

- h ιδιοδιάνυσμα του AA^T
- a ιδιοδιάνυσμα του $A^T A$
- Ο αλγόριθμος ανήκει στις *power iteration* μεθόδους υπολογισμού ιδιοδιανυσμάτων
- Συγκλίνει

PageRank vs HITS

- Θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε το HITS σε όλο το web και το PageRank σε θεματικό υποσύνολο
- Στο web,
 - Ένα καλό hub είναι συνήθως και ένα καλό authority
 - Οι διαφορές στο rank με PageRank και HITS μικρές

Άσκηση

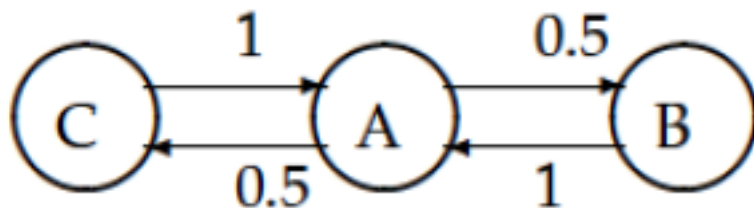


PageRank
HITS

Άσκηση 21.19

If all the hub and authority scores are initialized to 1, what is the hub/authority score of a node after one iteration?

Άσκηση 21.5



Πίνακα μετάβασης για Markov αλυσίδες

PageRank (*)

Power iteration

Jumps με $\alpha = 0.8$

HITS

(*) επειδή ο πίνακας είναι περιοδικός, δε συγκλίνει

Άσκηση 21.7

A user of a browser can, in addition to clicking a hyperlink on the page x she is currently browsing, use the *back button* to go back to the page from which she arrived at x . *Can such a use of back buttons be modelled as a Markov chain?* How would we model repeated invocations of the back button?

- **Exercise 21.11** Verify that the pagerank of the data in the following transition matrix (from book and lectures)

	d_0	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6
d_0	0.02	0.02	0.88	0.02	0.02	0.02	0.02
d_1	0.02	0.45	0.45	0.02	0.02	0.02	0.02
d_2	0.31	0.02	0.31	0.31	0.02	0.02	0.02
d_3	0.02	0.02	0.02	0.45	0.45	0.02	0.02
d_4	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.88
d_5	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.45	0.45
d_6	0.02	0.02	0.02	0.31	0.31	0.02	0.31

is indeed

$$\vec{x} = (0.05 \ 0.04 \ 0.11 \ 0.25 \ 0.21 \ 0.04 \ 0.31)$$

ΤΕΛΟΣ 21^{ου} Κεφαλαίου

Ερωτήσεις?

Χρησιμοποιήθηκε κάποιο υλικό από:

- ✓ *Pandu Nayak and Prabhakar Raghavan, CS276:Information Retrieval and Web Search (Stanford)*
- ✓ *Hinrich Schütze and Christina Lioma, Stuttgart IIR class*
- ✓ *Τις αντίστοιχες διαλέξεις του μεταπτυχιακού μαθήματος «Κοινωνικά Δίκτυα και Μέσα»*