Νόμοι Προτασιακής Λογικής

- Αντιμεταθετικότητα: $\phi\wedge\chi \equiv \chi\wedge\phi$ και $\phi\vee\chi \equiv \chi\vee\phi$
- Προσεταιριστικότητα: $\phi\wedge(\chi\wedge\psi) \equiv (\phi\wedge\chi)\wedge\psi$ και $\phi\vee(\chi\vee\psi) \equiv (\phi\vee\chi)\vee\psi$
- Επιμεριστικότητα: $\phi \wedge (\chi\vee\psi) \equiv (\phi\wedge\chi) \vee (\phi\wedge\psi)$ και $\phi \vee (\chi\wedge\psi) \equiv (\phi\vee\chi) \wedge (\phi\vee\psi)$
- Άρνηση Συνεπαγωγής: $\neg(\phi \rightarrow \chi) \equiv \phi \wedge \neg\chi$
- De Morgan: $\neg(\phi \vee \chi) \equiv \neg\phi \wedge \neg\chi$ και $\neg(\phi \wedge \chi) \equiv \neg\phi \vee \neg\chi$
- Διπλή Άρνηση: $\neg\neg\phi \equiv \phi$
- Αντιθετοαναστροφή: $\phi \rightarrow \chi \equiv \neg\chi \rightarrow \neg\phi$
- Εξαγωγή: $\phi\wedge\chi \rightarrow \psi \equiv \phi \rightarrow (\chi\rightarrow\psi)$
- Αποκλεισμός Τρίτου: $\{\ \} \models \neg\phi \vee \phi$
- Αντικαταστάσεις:
    1. $\phi \rightarrow \chi \equiv (\neg\phi \vee \chi)$
    2. $\phi \leftrightarrow \chi \equiv (\phi\rightarrow\chi) \wedge (\chi\rightarrow\phi) \equiv (\neg\phi \vee \chi) \wedge (\neg\chi \vee \phi)$
    3. $\phi \wedge \chi \equiv \neg(\neg\phi \vee \neg\chi)$
    4. $\phi \vee \chi \equiv \neg(\neg\phi \wedge \neg\chi)$
- Απορρόφηση: Για τύπους $\phi,\psi\in T(\Gamma_0)$, ισχύει ότι: ΑΝ $\phi \models \psi$ ΤΟΤΕ $\phi\wedge\psi \equiv \phi$ ΚΑΙ $\phi\vee\psi \equiv \psi$.
    - Ουδέτερο στοιχείο: $\boldsymbol{\tau} \wedge \phi \equiv \phi$ και $\boldsymbol{\alpha} \vee \phi \equiv \phi$ (**τ**=ταυτολογία, **α**=αντίφαση)
    - Ολικό φράγμα: $\boldsymbol{\tau} \vee \phi \equiv \boldsymbol{\tau}$ και $\boldsymbol{\alpha} \wedge \phi \equiv \boldsymbol{\alpha}$ (**τ**=ταυτολογία, **α**=αντίφαση)
    - $\boldsymbol{\alpha} \rightarrow \phi \equiv \boldsymbol{\tau}$ και $\boldsymbol{\tau} \rightarrow \phi \equiv \phi$ (**τ**=ταυτολογία, **α**=αντίφαση)
    - Μοναδιαία ποσότητα: $\phi \wedge \phi \equiv \phi$ και $\phi \vee \phi \equiv \phi$
    - Απορροφήσεις: $\phi \wedge (\phi \vee \chi) \equiv \phi$ και $\phi \vee (\phi \wedge \chi) \equiv \phi$

Προτασιακός Λογισμός

[ΑΣ1] $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

[ΑΣ2] $[\ \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)\ ] \rightarrow [\ (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)\ ]$

[ΑΣ3] $(\ \neg\alpha \rightarrow \neg\beta\ ) \rightarrow [\ (\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha\ ]$

[Modus Ponens (MP)] $\{\ \alpha\ ,\ \alpha \rightarrow \beta\ \} \models \beta$

[Modus Tollens (MT)] $\{\ \neg\beta\ ,\ \alpha \rightarrow \beta\ \} \models \neg\alpha$

Επιπρόσθετοι αποδεικτικοί κανόνες:

- Γενίκευση: $\{\ \phi\ \} \models \phi \vee \chi$
- Ειδίκευση: $\{\ \phi \wedge \chi\ \} \models \phi$
- Απαλοιφή: $\{\ \phi \vee \chi\ ,\ \neg\phi\ \} \models \chi$
- Διαχωρισμός Περιπτώσεων: $\{\ \phi \vee \chi\ ,\ \phi \rightarrow \psi\ ,\ \chi \rightarrow \psi\ \} \models \psi$

Τυπικά Θεωρήματα:

- Τ.Θ. Διπλής Άρνησης: $\vdash \neg\neg\phi \rightarrow \phi$ ΚΑΙ $\vdash \phi \rightarrow \neg\neg\phi$
- Τ.Θ. Μεταβατικότητας: $\vdash (\phi \rightarrow \psi) \rightarrow [\ (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\phi \rightarrow \chi)\ ]$
- Τ.Θ. Αντιθετοαναστροφής: $\vdash (\phi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \neg\phi)$

Θεώρημα της Απαγωγής: Για οποιοδήποτε πεπερασμένο σύνολο προτασιακών τύπων $T \subseteq T(\Gamma_0)$ και οποιουσδήποτε προτασιακούς τύπους $\phi,\psi \in T(\Gamma_0)$: ΑΝ $T \cup \{\phi\} \vdash \psi$ ΤΟΤΕ $T \vdash (\phi \rightarrow \psi)$

Θεώρημα της Αντιθετοαναστροφής: Για κάθε σύνολο προτασιακών τύπων $T \subseteq T(\Gamma_0)$ και οποιουσδήποτε προτασιακούς τύπους $\phi,\psi \in T(\Gamma_0)$, ισχύει ότι: $T \cup \{\phi\} \vdash \neg\psi$ αν και μόνο αν $T \cup \{\psi\} \vdash \neg\phi$.

Θεώρημα της Απαγωγής Σε Άτοπο: Για κάθε πεπερασμένο σύνολο προτασιακών τύπων T και οποιοδήποτε προτασιακό τύπο φ, ισχύει ότι: ΑΝ το $T \cup \{\phi\}$ είναι αντιφατικό ΤΟΤΕ $T \vdash \neg\phi$.

Θεώρημα Εγκυρότητας -- Πληρότητας: Για οποιοδήποτε σύνολο προτασιακών τύπων $T = \{\phi_1,\ldots,\phi_\kappa\}$, και οποιοδήποτε προτασιακό τύπο ψ, ισχύει ότι:

ΑΝ $T \vdash \psi$ ΤΟΤΕ $T \models \psi$ (θ. Εγκυρότητας)

ΑΝ $T \models \psi$ ΤΟΤΕ $T \vdash \psi$ (θ. Πληρότητας)

Άλγεβρες Boole

Έστω σύνολο B και με δυο διμελείς πράξεις + , • στο B, τέτοιες ώστε να ισχύει γι‘ αυτές η κλειστότητα ως προς το B (δηλ., $\forall\ \alpha,\beta \in B,\ \alpha \bullet \beta \in B$ και $\alpha + \beta \in B$). Τότε, το (B, +, •) ονομάζεται άλγεβρα Boole αν και μόνο αν ισχύουν τα εξής:

1. ΑΝΤΙΜΕΤΑΘΕΤΙΚΟΤΗΤΕΣ: $\forall\ \alpha,\beta \in B,\ \alpha \bullet \beta = \beta \bullet \alpha$ ΚΑΙ $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
2. ΠΡΟΣΕΤΑΙΡΙΣΤΙΚΟΤΗΤΕΣ: $\forall\ \alpha,\beta,\gamma \in B,\ (\alpha \bullet \beta) \bullet \gamma = \alpha \bullet (\beta \bullet \gamma)$ και $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$
3. ΕΠΙΜΕΡΙΣΤΙΚΟΤΗΤΕΣ: $\forall\ \alpha,\beta,\gamma \in B,\ \alpha \bullet (\beta+\gamma) = (\alpha\bullet\beta) + (\alpha\bullet\gamma)$ και $\alpha + (\beta\bullet\gamma) = (\alpha+\beta) \bullet (\alpha+\gamma)$
4. ΟΥΔΕΤΕΡΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ: $\exists$ (διακεκρ. στοιχεία) $\mathbf{0},\mathbf{1} \in B$ τ.ώ. $\forall\ \beta\in B,\ \mathbf{0} + \beta = \beta$ και $\mathbf{1} \bullet \beta = \beta$
5. ΚΑΝΟΝΕΣ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΟΣ: $\forall\ \beta \in B, \exists\ {\sim}\beta \in B$ τ.ώ. $\beta + {\sim}\beta = \mathbf{1}$ και $\beta \bullet {\sim}\beta = \mathbf{0}$

Έστω (B, + , •) μια άλγεβρα Boole. Ισχύουν τα εξής:

1. ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΟΣ: $\forall\ \alpha,\beta \in B$, αν $\alpha+\beta = \mathbf{1}$ και $\alpha\bullet\beta = \mathbf{0}$ ΤΟΤΕ $\alpha = {\sim}\beta$.
2. ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ ΟΥΔΕΤΕΡΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ: $\forall\beta \in B$**,**
   ΑΝ $\forall\alpha\in B,\ \alpha + \beta = \alpha$ ΤΟΤΕ $\beta = \mathbf{0}$
   ΑΝ $\forall\alpha\in B,\ \alpha \bullet \beta = \alpha$ ΤΟΤΕ $\beta = \mathbf{1}$
3. ΔΙΠΛΟ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ: $\forall\beta\in B,\ {\sim}({\sim}\beta) = \beta$
4. ΑΥΤΟΔΥΝΑΜΙΑ: $\forall\beta\in B,\ \beta + \beta = \beta$ και $\beta \bullet \beta = \beta$
5. ΚΑΘΟΛΙΚΟ ΦΡΑΓΜΑ: $\forall\ \beta\in B,\ \mathbf{1} + \beta = \mathbf{1}$ και $\mathbf{0} \bullet \beta = \mathbf{0}$
6. DE MORGAN: $\forall\ \alpha,\beta \in B,\ {\sim}(\alpha+\beta) = {\sim}\alpha \bullet {\sim}\beta$ και ${\sim}(\alpha\bullet\beta) = {\sim}\alpha + {\sim}\beta$
7. ΑΠΟΡΡΟΦΗΤΙΚΟΤΗΤΑ: $\forall\ \alpha,\beta \in B,\ (\alpha + \beta) \bullet \alpha = \alpha$ και $(\alpha \bullet \beta) + \alpha = \alpha$
8. ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ ΟΥΔ. ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ: ${\sim}\mathbf{0} = \mathbf{1}$ και ${\sim}\mathbf{1} = \mathbf{0}$

Σύνολα

1. (α) $A\cup B = B\cup A$ (β) $A\cap B = B\cap A$
2. (α) $(A\cup B)\cup \Gamma = A\cup(B\cup \Gamma)$ (β) $(A\cap B)\cap \Gamma = A\cap(B\cap \Gamma)$

3. (α) $(A \cup B) \cap \Gamma = (A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma)$ (β) $(A \cap B) \cup \Gamma = (A \cup \Gamma) \cap (B \cup \Gamma)$
4. (α) $\varnothing \cup A = A$ (β) $\Omega \cap A = A$
5. (α) $A \cup A^c = \Omega$ (β) $A \cap A^c = \varnothing$
6. $(A^c)^c = A$
7. (α) $A \cup A = A$ (β) $A \cap A = A$
8. (α) $\Omega \cup A = \Omega$ (β) $\varnothing \cap A = \varnothing$
9. (α) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ (β) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
10. (α) $A \cup (A \cap B) = A$ (β) $A \cap (A \cup B) = A$
11. (α) $\Omega^c = \varnothing$ (β) $\varnothing^c = \Omega$
12. $A - B = A \cap B^c$
13. $A \oplus B = (A-B) \cup (B-A)$

Αρχή Εγκλεισμού – Αποκλεισμού: Για κάθε $\kappa \geq 2$ και για οποιαδήποτε σύνολα $A_1, A_2, \ldots, A_\kappa$ ισχύει ότι:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_\kappa| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_\kappa| - [\, |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \ldots + |A_{\kappa-1} \cap A_\kappa| \,]$$
$$+ \ldots + (-1)^{\lambda-1} * [\, |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{\lambda-1} \cap A_\lambda| + |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{\lambda-1} \cap A_{\lambda+1}| + \ldots \,]$$
$$+ \ldots + (-1)^{\kappa-1} * |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{\kappa-1} \cap A_\kappa|$$

Αρχή Περιστερώνα: Για οποιαδήποτε πεπερασμένα σύνολα A, B και συνάρτηση $F : A \rightarrow B$, υπάρχουν τουλάχιστον $\rho = \lceil |A| / |B| \rceil$ διαφορετικά στοιχεία του A που έχουν την ίδια εικόνα στο B.

<u>Διμελείς Σχέσεις – Συναρτήσεις</u>

Έστω σύνολο A και διμελής σχέση $\Pi \subseteq A x A$. Η σχέση Π είναι :

- Ανακλαστική: για κάθε $\alpha \in A$, $(\alpha,\alpha) \in \Pi$
- Αντιανακλαστική: για κάθε $\alpha \in A$, $(\alpha,\alpha) \notin \Pi$
- Συμμετρική: για κάθε $(\alpha,\beta) \in \Pi$, $(\beta,\alpha) \in \Pi$
- Αντισυμμετρική: για κάθε $(\alpha,\beta) \in \Pi$ με $\alpha \neq \beta$, $(\beta,\alpha) \notin \Pi$
- Μεταβατική: για κάθε $\alpha,\beta,\gamma \in A$, $(\alpha,\beta) \in \Pi \wedge (\beta,\gamma) \in \Pi \rightarrow (\alpha,\gamma) \in \Pi$

Έστω διμελής σχέση $\Pi \subseteq A \times A$. Για κάθε ορισμό γειτονιών $\{ \Gamma_A(\beta) : \beta \in A \}$, ένα στοιχείο $\alpha \in A$ είναι:

- τοπικό (ολικό, αν $\Gamma_A(\alpha) = A$) Μεγιστικό Στοιχείο: $\neg \exists \beta \in A[\, \beta \in \Gamma_A(\alpha) \wedge \alpha \neq \beta \wedge (\alpha,\beta) \in \Pi \,]$
- τοπικό (ολικό, αν ΓΑ(α) = Α) Μέγιστο Στοιχείο: $\forall \beta \in A[\, \beta \in \Gamma_A(\alpha) \wedge \alpha \neq \beta \rightarrow (\beta,\alpha) \in \Pi \,]$
- τοπικό (ολικό, αν ΓΑ(α) = Α) Ελαχιστικό Στοιχείο: $\neg \exists \beta \in A[\, \beta \in \Gamma_A(\alpha) \wedge \alpha \neq \beta \wedge (\beta,\alpha) \in \Pi \,]$
- τοπικό (ολικό αν ΓΑ(α) = Α) Ελάχιστο Στοιχείο: $\forall \beta \in A[\, \beta \in \Gamma_A(\alpha) \wedge \alpha \neq \beta \rightarrow (\alpha,\beta) \in \Pi \,]$

Για μερικά διατεταγμένο σύνολο (Α,Π) και $B \subseteq A$:

- το $\gamma \in A$ είναι άνω φράγμα του B**,** ανν: $\forall \beta \in B[\, (\beta,\gamma) \in \Pi \,]$.
- το $\gamma \in A$ είναι ελαχιστικό άνω φράγμα του B**,** ανν:

  $\forall \beta \in B\, [\, (\beta,\gamma) \in \Pi \,] \wedge \forall \delta \in A\, \{\, \delta \neq \gamma \wedge (\delta,\gamma) \in \Pi \rightarrow$ δ όχι άνω φράγμα του B $\}$
- το $\gamma \in A$ είναι ελάχιστο άνω φράγμα του B**,** ανν:

  $\forall \beta \in B\, [\, (\beta,\gamma) \in \Pi \,] \wedge \forall \delta \in A\, \{\, \forall \beta \in B[\, (\beta,\delta) \in \Pi \,] \rightarrow (\gamma,\delta) \in \Pi \,\}$

Αντίστοιχοι ορισμοί για κάτω φράγμα, μεγιστικό κάτω φράγμα, και μέγιστο κάτω φράγμα του B.