ΜΥΥ501: Θεωρία Υπολογισμού

Ακόμη Μερικές Μηχανές Turing

Άσκηση 1

Κατασκευάστε μηχανή Turing η οποία απαριθμεί τη γλώσσα $L = \{\, 0^n \mid n \geq 0 \,\}$. Περιγράψτε τη λειτουργία της μηχανής έως την απαρίθμηση της συμβολοσειράς 00000.

Λύση

Η μηχανή Turing ξεκινά με κενή ταινία και την κεφαλή στο αριστερότερο κελί της και αρχικά απαριθμεί την κενή συμβολοσειρά κινώντας την κεφαλή αριστερά ώστε αυτή να παραμείνει στο αριστερότερο κελί της ταινίας (σύμφωνα με τη σύμβαση του βιβλίου του Sipser) και μπαίνοντας στην ειδική κατάσταση q_{output}. Στη συνέχεια, για να σχηματίσει τη συμβολοσειρά 0^{k+1} από τη συμβολοσειρά 0^k για οποιοδήποτε $k \geq 0$, αρκεί μόνον να προσθέσει ένα 0 στο τέλος. Συνεπώς, από την κατάσταση q_{output} (και προφανώς για κενό κελί) γράφει 0 στο κενό κελί, κινεί την κεφαλή στο αμέσως δεξιότερο κελί και παραμένει στην q_{output}.

Η αναλυτική περιγραφή της μηχανής Turing έχει ως εξής:

$$M = (Q,\, \Sigma,\, \Gamma,\, \delta,\, s,\, q_{\text{output}})$$

όπου $Q = \{s, q_{\text{output}}\}$
$\Sigma = \{0, 1\}$
$\Gamma = \{0, 1, \sqcup\}$
δ : όπως περιγράφεται παρακάτω.

q	σ	$\delta(q,\sigma)$	*Σχόλιο*
s	$\sqcup$	$(q_{\text{output}},\ \sqcup,\ \mathrm{A})$	απαρίθμηση της κενής συμβολοσειράς
q_{output}	$\sqcup$	$(q_{\text{output}},\ 0,\ \Delta)$	σχηματίζει το 0^{k+1} από το 0^k και απαριθμεί

Η λειτουργία της μηχανής έως την απαρίθμηση της συμβολοσειράς 00000 έχει ως εξής:

$$(s, \underline{\sqcup}) \vdash \boxed{(q_{\text{output}}, \underline{\sqcup}\sqcup)} \vdash \boxed{(q_{\text{output}}, 0\underline{\sqcup})} \vdash \boxed{(q_{\text{output}}, 00\underline{\sqcup})} \vdash \boxed{(q_{\text{output}}, 000\underline{\sqcup})}$$
$$\vdash \boxed{(q_{\text{output}}, 0000\underline{\sqcup})} \vdash \boxed{(q_{\text{output}}, 00000\underline{\sqcup})} \vdash \text{ κ.ο.κ.}$$

Άσκηση 2

Κατασκευάστε μηχανή Turing η οποία απαριθμεί τη γλώσσα L όλων των συμβολοσειρών από το αλφάβητο $\Sigma = \{0,\, 1\}$. Περιγράψτε τη λειτουργία της μηχανής έως την απαρίθμηση της συμβολοσειράς 001.

Λύση

Για να εξασφαλίσουμε ότι η μηχανή θα απαριθμήσει κάθε συμβολοσειρά από το αλφάβητο $0, 1$, θα φρονίσουμε να τις απαριθμήσει κατά αύξον μήκος και για συμβολοσειρές ιδίου μήκους κατά αύξουσα τιμή του αντίστοιχου δυαδικού αριθμού, δηλαδή με την ακόλουθη σειρα: e, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, κ.ο.κ.

Έτσι, η μηχανή θα απαριθμήσει αρχικά την κενή συμβολοσειρά και αμέσως μετά τη συμβολοσειρά 0. Για να σχηματίσουμε όλες τις συμβολοσειρές με ίδιο μήκος με τη σειρά που αναφέρθηκε, αρκεί να ξεκινήσουμε από δεξιά και όσο βλέπουμε 1 να το αλλάζουμε σε 0 συνεχίζοντας προς τα αριστερά, ενώ μόλις δούμε 0 το αλλάζουμε σε 1 και τελειώσαμε. Η μηχανή Turing που περιγράφουμε κάνει το ίδιο με τη διαφορά ότι από τα δεξιά προς τα αριστερά, αλλάζει τα 1 σε X και κατόπιν από αριστερά προς τα δεξιά αλλάζει τα X σε 0. Με αυτόν τον τρόπο αναγνωρίζουμε την ειδική περίπτωση όπου μόλις έχει απαριθμηθεί μια συμβολοσειρά της μορφής 1^k $(k \geq 1)$, μετά από την οποία θα πρέπει να απαριθμηθεί η συμβολοσειρά 0^{k+1}. (Σημειώστε ότι αν απλώς αλλάζουμε τα 1 σε 0 από δεξιά προς τα αριστερά, τότε μετά την απαρίθμηση της συμβολοσειράς 1, απαριθμείται και πάλι η συμβολοσειρά 0, μετά πάλι η 1 και μετά πάλι η 0 κ.ο.κ.)

Η αναλυτική περιγραφή της μηχανής Turing έχει ως εξής:

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, q_{\text{output}})$

όπου $Q = \{s, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, q_{\text{output}}\}$

$\Sigma = \{0, 1\}$

$\Gamma = \{0, 1, \sqcup\}$

δ : όπως περιγράφεται παρακάτω.

q	σ	$\delta(q,\sigma)$	*Σχόλιο*
s	$\sqcup$	$(q_{\text{output}}, \sqcup, \text{A})$	απαρίθμηση της κενής συμβολοσειράς
q_{output}	$\sqcup$	$(p_1, \sqcup, \text{A})$	πηγαίνει αριστερά
p_1	0	$(q_{\text{output}}, 1, \Delta)$	αλλάζει το 0 στο τέλος σε 1 και απαριθμεί
p_1	1	$(p_2, \text{X}, \text{A})$	αλλάζει το 1 στο τέλος σε X και πάει αριστερά
p_1	$\sqcup$	$(q_{\text{output}}, 0, \Delta)$	μόλις απαριθμήθηκε η e, απαρίθμησε το 0
p_2	1	$(p_2, \text{X}, \text{A})$	όσο συναντά 1, το κάνει X και πάει αριστερά
p_2	0	$(p_3, 1, \Delta)$	βρήκε 0, το αλλάζει σε 1 και μεταβολή
p_2	X	$(p_5, 0, \Delta)$	μόλις απαριθμήθηκε η 1^k $(k \geq 1)$, σχημάτισε την 0^{k+1}
p_3	X	$(p_3, 0, \Delta)$	αλλάζει τα X σε 0 και συνεχίζει δεξιά
p_3	$\sqcup$	$(p_4, \sqcup, \Delta)$	πηγαίνει δεξιά και μετά πίσω για να βάλει...
p_4	$\sqcup$	$(q_{\text{output}}, \sqcup, \text{A})$	...την κεφαλή στη σωστή θέση και απαριθμεί
p_5	X	$(p_5, 0, \Delta)$	αλλάζει το X σε 0 και συνεχίζει δεξιά
p_5	$\sqcup$	$(q_{\text{output}}, 0, \Delta)$	γράφει ένα ακόμη 0 και απαριθμεί

Η λειτουργία της μηχανής έως την απαρίθμηση της συμβολοσειράς 001 έχει ως εξής:

$$(s, \underline{\sqcup}) \vdash \boxed{(q_{\text{output}}, \underline{\sqcup})}$$
$$\vdash (p_1, \underline{\sqcup}) \vdash \boxed{(q_{\text{output}}, 0\underline{\sqcup})}$$
$$\vdash (p_1, \underline{0}\sqcup) \vdash \boxed{(q_{\text{output}}, 1\underline{\sqcup})}$$
$$\vdash (p_1, \underline{1}\sqcup) \vdash (p_2, \underline{\text{X}}\sqcup) \vdash (p_5, 0\underline{\sqcup}) \vdash \boxed{(q_{\text{output}}, 00\underline{\sqcup})}$$
$$\vdash (p_1, 0\underline{0}\sqcup) \vdash \boxed{(q_{\text{output}}, 01\underline{\sqcup})}$$
$$\vdash (p_1, 0\underline{1}\sqcup) \vdash (p_2, \underline{0}\text{X}\sqcup) \vdash (p_3, 1\underline{\text{X}}\sqcup) \vdash (p_3, 10\underline{\sqcup}) \vdash (p_4, 10\sqcup\underline{\sqcup}) \vdash \boxed{(q_{\text{output}}, 10\underline{\sqcup}\sqcup)}$$
$$\vdash (p_1, 1\underline{0}\sqcup\sqcup) \vdash \boxed{(q_{\text{output}}, 11\underline{\sqcup}\sqcup)}$$
$$\vdash (p_1, 1\underline{1}\sqcup\sqcup) \vdash (p_2, \underline{1}\text{X}\sqcup\sqcup) \vdash (p_2, \underline{\text{X}}\text{X}\sqcup\sqcup) \vdash (p_5, 0\underline{\text{X}}\sqcup) \vdash (p_5, 00\underline{\sqcup}\sqcup) \vdash \boxed{(q_{\text{output}}, 000\underline{\sqcup})}$$

$\vdash (p_1, 00\underline{0}\sqcup) \vdash \boxed{(q_{\text{output}}, 001\underline{\sqcup})}$

$\vdash$ κ.ο.κ.

Άσκηση 3

Κατασκευάστε μηχανή Turing η οποία διαγιγνώσκει τη γλώσσα

$$L = \{\, w \in \{a, b\}^* \mid \text{το προ-τελευταίο σύμβολο της } w \text{ είναι } b \,\}.$$

Περιγράψτε τον υπολογισμό για είσοδο $aaab$ και $abba$.

Λύση

Ένας Τρόπος Επίλυσης με Αιτιοκρατική Μηχανή Turing.

Βασική Ιδέα: η μηχανή Turing φθάνει στο δεξί άκρο της συμβολοσειράς, κάνει μεταβολή, προσπερνάει ένα σύμβολο (=το τελευταίο) και αποδέχεται αν και μόνον αν πριν από αυτό υπάρχει b.

Η λειτουργία της μηχανής Turing δίδεται στον παρακάτω πίνακα, όπου η s είναι η αρχική κατάσταση:

q	σ	$\delta(q,\sigma)$	*Σχόλιο*
s	a	$\{(s,\ \mathsf{a},\ \Delta)\}$	προσπερνά a και συνεχίζει δεξιά
s	b	$\{(s,\ \mathsf{b},\ \Delta)\}$	προσπερνά b και συνεχίζει δεξιά
s	$\sqcup$	$\{(q_1,\ \sqcup,\ \mathrm{A})\}$	κάνει μεταβολή στο δεξί άκρο της συμβολοσειράς
q_1	a	$\{(q_2,\ \sqcup,\ \mathrm{A})\}$	σβήνει το τελευταίο σύμβολο, συνεχιζει αριστερά
q_1	b	$\{(q_2,\ \sqcup,\ \mathrm{A})\}$	σβήνει το τελευταίο σύμβολο, συνεχιζει αριστερά
q_1	$\sqcup$	$\{(q_{\text{απόρριψης}},\ \sqcup,\ \Delta)\}$	Απόρριψη (*είσοδος = κενή συμβολοσειρά*)
q_2	a	$\{(q_{\text{απόρριψης}},\ \mathsf{a},\ \Delta)\}$	Απόρριψη (*προ-τελευταίο σύμβολο* = a)
q_2	b	$\{(q_{\text{αποδοχής}},\ \mathsf{b},\ \Delta)\}$	Αποδοχή (*προ-τελευταίο σύμβολο* = b)
q_2	$\sqcup$	$\{(q_{\text{απόρριψης}},\ \sqcup,\ \Delta)\}$	Απόρριψη (*μήκος εισόδου* = 1)

Προσοχή: είναι πολύ σημαντικό να σβήσετε το τελευταίο σύμβολο της συμβολοσειράς καθώς θα το προσπερνάτε προς τα αριστερά. Αν το αφήσετε ως έχει, τότε

$$(s, \underline{\mathsf{b}}) \vdash (s, \mathsf{b}\underline{\sqcup}) \vdash (q_1, \underline{\mathsf{b}}\sqcup) \vdash (q_2, \underline{\mathsf{b}}\sqcup) \vdash (q_{\text{αποδοχής}}, \mathsf{b}\underline{\sqcup})$$

και η μηχανή Turing αποδέχεται και τη συμβολοσειρά b, η οποία όμως δεν ανήκει στη γλώσσα της άσκησης (θυμηθείτε ότι στο μοντέλο μηχανής Turing του βιβλίου του Sipser, η κεφαλή παραμένει στο αριστερότερο κελί της ταινίας αν γίνει προσπάθεια να κινηθεί από αυτό προς τα αριστερά).

Η πλήρης περιγραφή της μηχανής Turing είναι:

$M = (Q,\ \Sigma,\ \Gamma,\ \delta,\ s,\ q_{\text{αποδοχής}},\ q_{\text{απόρριψης}})$

όπου $Q = \{s, q_1, q_2, q_{\text{αποδοχής}}, q_{\text{απόρριψης}}\}$

$\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$

$\Gamma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \sqcup\}$

δ : όπως περιγράφηκε παραπάνω.

Η λειτουργία της μηχανής για εισόδους aab και abb έχει ως εξής:

$(s, \underline{\mathsf{a}}\mathsf{ab}) \vdash (s, \mathsf{a}\underline{\mathsf{a}}\mathsf{b}) \vdash (s, \mathsf{aa}\underline{\mathsf{b}}) \vdash (s, \mathsf{aab}\underline{\sqcup}) \vdash (q_1, \mathsf{aa}\underline{\mathsf{b}}\sqcup) \vdash (q_2, \mathsf{a}\underline{\mathsf{a}}\sqcup\sqcup)$

$\vdash (q_{\text{απόρριψης}}, \mathsf{aa}\underline{\sqcup}\sqcup)$ $\boxed{\text{απόρριψη}}$

$$(s, \underline{\mathsf{a}}\mathsf{bb}) \vdash (s, \mathsf{a}\underline{\mathsf{b}}\mathsf{b}) \vdash (s, \mathsf{ab}\underline{\mathsf{b}}) \vdash (s, \mathsf{abb}\underline{\sqcup}) \vdash (q_1, \mathsf{ab}\underline{\mathsf{b}}\sqcup) \vdash (q_2, \mathsf{a}\underline{\mathsf{b}}\sqcup\sqcup)$$
$$\vdash (q_{\text{αποδοχής}}, \mathsf{ab}\underline{\sqcup}\sqcup) \ \boxed{\text{αποδοχή}}$$

Ένας Τρόπος Επίλυσης με Μη Αιτιοκρατική Μηχανή Turing.
Βασική Ιδέα: η μηχανή Turing προσδιορίζει με "μη αιτιοκρατικό" τρόπο το προ-τελευταίο σύμβολο της συμβολοσειράς που είναι b και επιβεβαιώνει ότι απομένει 1 σύμβολο έως το τέλος της συμβολοσειράς (αλλάζει κατάσταση για να προσπεράσει το τελευταίο σύμβολο και ξανα-αλλάζει κατάσταση για να επιβεβαιώσει ότι ακολουθεί $\sqcup$).

Η λειτουργία της μηχανής Turing δίδεται στον παρακάτω πίνακα, όπου η s είναι η αρχική κατάσταση:

q	σ	$\delta'(q,\sigma)$	*Σχόλιο*
s	a	$\{(s,\ \mathsf{a},\ \Delta)\}$	προσπερνά a και συνεχίζει δεξιά
s	b	$\{(s,\ \mathsf{b},\ \Delta),\ (r_1,\ \mathsf{b},\ \Delta)\}$	προσπερνά b ή "βρήκε" προ-τελευταίο σύμβολο
s	$\sqcup$	$\{(q_{\text{απόρριψης}},\ \sqcup,\ \Delta)\}$	απορρίπτει συμβολοσειρές χωρίς b, κ.λπ.
r_1	a	$\{(r_2,\ \mathsf{a},\ \Delta)\}$	προσπερνά επόμενο σύμβολο, συνεχίζει δεξιά
r_1	b	$\{(r_2,\ \mathsf{b},\ \Delta)\}$	προσπερνά επόμενο σύμβολο, συνεχίζει δεξιά
r_1	$\sqcup$	$\{(q_{\text{απόρριψης}},\ \sqcup,\ \Delta)\}$	Απόρριψη (*το* b *ήταν τελευταίο*)
r_2	a	$\{(q_{\text{απόρριψης}},\ \mathsf{a},\ \Delta)\}$	Απόρριψη (*υπάρχουν* ≥ 2 *σύμβολα μετά το* b)
r_2	b	$\{(q_{\text{απόρριψης}},\ \mathsf{b},\ \Delta)\}$	Απόρριψη (*υπάρχουν* ≥ 2 *σύμβολα μετά το* b)
r_2	$\sqcup$	$\{(q_{\text{αποδοχής}},\ \sqcup,\ \Delta)\}$	Αποδοχή (*προ-τελευταίο σύμβολο* $= \mathsf{b}$)

Η πλήρης περιγραφή της μηχανής Turing είναι:

$M' = (Q',\ \Sigma,\ \Gamma,\ \delta',\ s,\ q_{\text{αποδοχής}},\ q_{\text{απόρριψης}})$
όπου $Q' = \{s, r_1, r_2, q_{\text{αποδοχής}}, q_{\text{απόρριψης}}\}$
$\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$
$\Gamma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \sqcup\}$
δ' : όπως περιγράφηκε παραπάνω.

Η λειτουργία της μηχανής για εισόδους aab και abb έχει ως εξής:

$$(s, \underline{\mathsf{a}}\mathsf{ab}) \vdash (s, \mathsf{a}\underline{\mathsf{a}}\mathsf{b}) \vdash (s, \mathsf{aa}\underline{\mathsf{b}}) \vdash \begin{cases} (s, \mathsf{aab}\underline{\sqcup}) & \vdash (q_{\text{απόρριψης}}, \mathsf{aab}\sqcup\underline{\sqcup}) \ \boxed{\text{απόρριψη}} \\ (r_1, \mathsf{aab}\underline{\sqcup}) & \vdash (q_{\text{απόρριψης}}, \mathsf{aab}\sqcup\underline{\sqcup}) \ \boxed{\text{απόρριψη}} \end{cases}$$

$$(s, \underline{\mathsf{a}}\mathsf{bb}) \vdash (s, \mathsf{a}\underline{\mathsf{b}}\mathsf{b}) \vdash \begin{cases} (s, \mathsf{ab}\underline{\mathsf{b}}) & \vdash \begin{cases} (s, \mathsf{abb}\underline{\sqcup}) \vdash (q_{\text{απόρριψης}}, \mathsf{abb}\sqcup\underline{\sqcup}) \ \boxed{\text{απόρριψη}} \\ (r_1, \mathsf{abb}\underline{\sqcup}) \vdash (q_{\text{απόρριψης}}, \mathsf{abb}\sqcup\underline{\sqcup}) \ \boxed{\text{απόρριψη}} \end{cases} \\ (r_1, \mathsf{ab}\underline{\mathsf{b}}) & \vdash (r_2, \mathsf{abb}\underline{\sqcup}) \vdash (q_{\text{αποδοχής}}, \mathsf{abb}\sqcup\underline{\sqcup}) \ \boxed{\text{αποδοχή}} \end{cases}$$