4-44: Θεωρία Υπολογισμού

Λύσεις της 5ης Ομάδας Προτεινομένων Ασκήσεων

Άσκηση 1

(α) Κατασκευάστε μηχανή Turing η οποία αναγνωρίζει τη γλώσσα των συμβολοσειρών από το αλφάβητο $\{a, b\}$ οι οποίες περιέχουν την υποσυμβολοσειρά bba.

(β) Κατασκευάστε μηχανή Turing η οποία διαγιγνώσκει τη γλώσσα των συμβολοσειρών από το αλφάβητο $\{a, b\}$ οι οποίες δεν περιέχουν την υποσυμβολοσειρά bba.

Λύση
(α) Η μηχανή Turing διαβάζει τη συμβολοσειρά στην ταινία από αριστερά προς τα δεξιά και μπαίνει στην κατάσταση $q_{\text{αποδοχής}}$ μόνον εφόσον βρει bba (εάν συναντήσει b, μπαίνει στην κατάσταση q_1, εάν συναντήσει αμέσως μετά και πάλι b μπαίνει στην κατάσταση q_2, και εάν αμέσως μετά συναντήσει a μπαίνει στην κατάσταση $q_{\text{αποδοχής}}$).
Αναλυτικά, η πλήρης περιγραφή της μηχανής Turing είναι:

$M_{1(\alpha)} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, q_{\text{αποδοχής}}, q_{\text{απόρριψης}})$
όπου $Q = \{s, q_0, q_1, q_2, q_{\text{αποδοχής}}, q_{\text{απόρριψης}}\}$
$\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$
$\Gamma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \sqcup\}$ (Σημείωση: $\sqcup$= κενό τετράγωνο)
δ : όπως περιγράφεται στον Πίνακα 1.

q	σ	$\delta(q,\sigma)$			*Σχόλιο*
s	a	$(q_0,$	a,	$\Delta)$	προσπερνάει το a
s	b	$(q_1,$	b,	$\Delta)$	βρήκε b
s	$\sqcup$	$(q_{\text{απόρριψης}},$	$\sqcup$,	$\Delta)$	δεν αποδέχεται την κενή συμβολοσειρά
q_0	a	$(q_0,$	a,	$\Delta)$	προσπερνάει τυχόν a
q_0	b	$(q_1,$	b,	$\Delta)$	βρήκε b
q_0	$\sqcup$	$(q_0,$	$\sqcup$,	$\Delta)$	δεν υπάρχει bba: δουλεύει απ' άπειρον
q_1	a	$(q_0,$	a,	$\Delta)$	εάν βρει a, επιστρέφει στην q_0
q_1	b	$(q_2,$	b,	$\Delta)$	βρήκε bb
q_1	$\sqcup$	$(q_{\text{απόρριψης}},$	$\sqcup$,	$\Delta)$	δεν υπάρχει bba: απόρριψη
q_2	a	$(q_{\text{αποδοχής}},$	a,	$\Delta)$	εάν βρει a, αποδέχεται (βρέθηκε bba)
q_2	b	$(q_2,$	b,	$\Delta)$	εάν βρει b, παραμένει στην q_2
q_2	$\sqcup$	$(q_2,$	$\sqcup$,	$\Delta)$	δεν υπάρχει bba: δουλεύει επ' άπειρον

Πίνακας 1: Η συνάρτηση μετάβασης της μηχανής Turing για την Άσκηση 1(α).

(β) Η μηχανή Turing διαβάζει και πάλι τη συμβολοσειρά στην ταινία από αριστερά προς τα δεξιά και αποδέχεται μόνον εφόσον φτάσει στο δεξί άκρο και δεν έχει συναντήσει το bba. Αναλυτικά, η πλήρης περιγραφή της μηχανής Turing είναι:

$M_{1(\beta)} = (Q,\, \Sigma,\, \Gamma,\, \delta,\, s,\, q_{\text{αποδοχής}},\, q_{\text{απόρριψης}})$

όπου $Q = \{s, q_0, q_1, q_2, q_{\text{αποδοχής}}, q_{\text{απόρριψης}}\}$

$\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$

$\Gamma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \sqcup\}$

δ : όπως περιγράφεται στον Πίνακα 2.

q	σ	$\delta(q,\sigma)$	*Σχόλιο*
s	a	$(q_0,\ \mathsf{a},\ \Delta)$	προσπερνάει το a
s	b	$(q_1,\ \mathsf{b},\ \Delta)$	βρήκε b
s	$\sqcup$	$(q_{\text{αποδοχής}},\ \sqcup,\ \Delta)$	αποδέχεται την κενή συμβολοσειρά
q_0	a	$(q_0,\ \mathsf{a},\ \Delta)$	προσπερνάει τυχόν a
q_0	b	$(q_1,\ \mathsf{b},\ \Delta)$	βρήκε b
q_0	$\sqcup$	$(q_{\text{αποδοχής}},\ \sqcup,\ \Delta)$	δεν υπάρχει bba: αποδοχή
q_1	a	$(q_0,\ \mathsf{a},\ \Delta)$	εάν βρει a, επιστρέφει στην q_0
q_1	b	$(q_2,\ \mathsf{b},\ \Delta)$	βρήκε bb
q_1	$\sqcup$	$(q_{\text{αποδοχής}},\ \sqcup,\ \Delta)$	δεν υπάρχει bba: αποδοχή
q_2	a	$(q_{\text{απόρριψης}},\ \mathsf{a},\ \Delta)$	εάν βρει a, απορρίπτει (βρέθηκε bba)
q_2	b	$(q_2,\ \mathsf{b},\ \Delta)$	εάν βρει b, παραμένει στην q_2
q_2	$\sqcup$	$(q_{\text{αποδοχής}},\ \sqcup,\ \Delta)$	δεν υπάρχει bba: αποδοχή

Πίνακας 2: Η συνάρτηση μετάβασης της μηχανής Turing για την Άσκηση 1(β).

Άσκηση 2

(α) Κατασκευάστε μηχανή Turing η οποία μπαίνει σε ατέρμονα βρόχο για όλες τις συμβολοσειρές που τελειώνουν σε a και αποδέχεται όλες τις υπόλοιπες συμβολοσειρές (αλφάβητο $\{a, b\}$).

(β) Κατασκευάστε μηχανή Turing η οποία μπαίνει σε ατέρμονα βρόχο για τη συμβολοσειρά bab με την ταινία να έχει διαφορετικό περιεχόμενο σε κάθε επανάληψη του βρόχου, και απορρίπτει όλες τις υπόλοιπες συμβολοσειρές (αλφάβητο $\{a, b\}$).

Λύση

(α) Αρκεί να φροντίσουμε ώστε η μηχανή Turing να μετακινηθεί έως το τέλος της συμβολοσειράς εισόδου (κατάσταση q_1), να κινήσει την κεφαλή αριστερά ώστε να διαβάσει το τελευταίο σύμβολο της εισόδου και εφόσον βρει a, να μπει και πάλι στην κατάσταση q_1 και να κινήσει την κεφαλή προς τα δεξιά, εξασφαλίζοντας έτσι ότι η μηχανή θα δουλεύει απ' άπειρον κινώντας την κεφαλή κατά ένα τετράγωνο αριστερά, μετά κατά ένα τετράγωνο διεξιά, μετά πάλι κατά ένα τετράγωνο αριστερά, κ.ο.κ. Εάν στην ταινία βρεθεί η κενή συμβολοσειρά ή συμβολοσειρά που τελειώνει σε b, η μηχανή αποδέχεται. Αναλυτικά, έχουμε:

$M_{2(\alpha)} = (Q,\, \Sigma,\, \Gamma,\, \delta,\, s,\, q_{\text{αποδοχής}},\, q_{\text{απόρριψης}})$

όπου $Q = \{s, q_1, q_2, q_{\text{αποδοχής}}, q_{\text{απόρριψης}}\}$

$\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$

$\Gamma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \sqcup\}$

δ : όπως περιγράφεται στον Πίνακα 3.

q	σ	$\delta(q,\sigma)$	*Σχόλιο*
s	a	$(q_1,\ \mathsf{a},\ \Delta)$	
s	b	$(q_1,\ \mathsf{b},\ \Delta)$	
s	$\sqcup$	$(q_{\text{αποδοχής}},\ \sqcup,\ \Delta)$	κενή συμβολοσειρά: αποδοχή
q_1	a	$(q_1,\ \mathsf{a},\ \Delta)$	η μηχανή προσπερνά a...
q_1	b	$(q_1,\ \mathsf{b},\ \Delta)$	...προσπερνά b...
q_1	$\sqcup$	$(q_2,\ \sqcup,\ \mathrm{A})$	...έως ότου φθάσει στο πρώτο κενό τετράγωνο
q_2	a	$(q_1,\ \mathsf{a},\ \Delta)$	το τελευταίο σύμβολο είναι a: μπρος-πίσω
q_2	b	$(q_{\text{αποδοχής}},\ \mathsf{b},\ \Delta)$	το τελευταίο σύμβολο είναι b: αποδοχή

Πίνακας 3: Η συνάρτηση μετάβασης της μηχανής Turing για την Άσκηση 2(α).

(β) Η μηχανή Turing διαβάζει τη συμβολοσειρά στην ταινία από αριστερά προς τα δεξιά και εάν διαπιστώσει ότι η συμβολοσειρά είναι η bab, μπαίνει στην κατάσταση q_4 και κινεί την κεφαλή δεξιά γράφοντας b στα κενά τετράγωνα που συναντά, ώστε στην ταινία να εμφανίζονται διαδοχικά οι συμβολοσειρές $babb$, $babbb$, $babbbb$, κ.ο.κ. Σε κάθε άλλη περίπτωση, η μηχανή απορρίπτει. Συγκεκριμένα, έχουμε:

$M_{2(\beta)} = (Q,\ \Sigma,\ \Gamma,\ \delta,\ s,\ q_{\text{αποδοχής}},\ q_{\text{απόρριψης}})$

όπου $Q = \{s, q_1, q_2, q_3, q_4, q_{\text{αποδοχής}}, q_{\text{απόρριψης}}\}$

$\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$

$\Gamma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \sqcup\}$

δ : όπως περιγράφεται στον Πίνακα 4.

q	σ	$\delta(q,\sigma)$	*Σχόλιο*
s	a	$(q_{\text{απόρριψης}},\ \mathsf{a},\ \Delta)$	
s	b	$(q_1,\ \mathsf{b},\ \Delta)$	βρήκε b
s	$\sqcup$	$(q_{\text{απόρριψης}},\ \sqcup,\ \Delta)$	
q_1	a	$(q_2,\ \mathsf{a},\ \Delta)$	βρήκε ba
q_1	b	$(q_{\text{απόρριψης}},\ \mathsf{b},\ \Delta)$	
q_1	$\sqcup$	$(q_{\text{απόρριψης}},\ \sqcup,\ \Delta)$	
q_2	a	$(q_{\text{απόρριψης}},\ \mathsf{a},\ \Delta)$	
q_2	b	$(q_3,\ \mathsf{b},\ \Delta)$	βρήκε bab
q_2	$\sqcup$	$(q_{\text{απόρριψης}},\ \sqcup,\ \Delta)$	
q_3	a	$(q_{\text{απόρριψης}},\ \mathsf{a},\ \Delta)$	
q_3	b	$(q_{\text{απόρριψης}},\ \mathsf{b},\ \Delta)$	
q_3	$\sqcup$	$(q_4,\ \mathsf{b},\ \Delta)$	τέλος συμβολοσειράς, γράφει b
q_4	$\sqcup$	$(q_4,\ \mathsf{b},\ \Delta)$	κίνηση προς τα δεξιά, γράφει b

Πίνακας 4: Η συνάρτηση μετάβασης της μηχανής Turing για την Άσκηση 2(β).

Άσκηση 3

Κατασκευάστε μηχανή Turing η οποία διαγιγνώσκει τη γλώσσα $\mathcal{L}(aa^*bb^*baa^*)$ των συμβολοσειρών που περιγράφονται από την κανονική έκφραση $aa^*bb^*baa^*$.

Λύση

Η μηχανή Turing διαβάζει τη συμβολοσειρά στην ταινία από αριστερά προς τα δεξιά και εάν βρει ότι υπάρχει τουλάχιστον 1 a στην αρχή, τουλάχιστον 2 b στη μέση, και τουλάχιστον 1 a στο τέλος αποδέχεται. Σε κάθε άλλη περίπτωση, απορρίπτει. Η μηχανή Turing είναι:

$$
\begin{aligned}
& M_3 = (Q,\, \Sigma,\, \Gamma,\, \delta,\, s,\, q_{\text{αποδοχής}},\, q_{\text{απόρριψης}}) \\
\text{όπου}\quad & Q = \{s, q_1, q_2, q_3, q_4, q_{\text{αποδοχής}}, q_{\text{απόρριψης}}\} \\
& \Sigma\ = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\} \\
& \Gamma\ = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \sqcup\} \\
& \delta\ :\ \text{όπως περιγράφεται στον Πίνακα 5.}
\end{aligned}
$$

q	σ	$\delta(q,\sigma)$			*Σχόλιο*
s	a	$(q_1,$	a,	$\Delta)$	ένα a
s	b	$(q_{\text{απόρριψης}},$	b,	$\Delta)$	το 1ο σύμβολο είναι b: απόρριψη
s	$\sqcup$	$(q_{\text{απόρριψης}},$	$\sqcup$,	$\Delta)$	κενή συμβολοσειρά: απόρριψη
q_1	a	$(q_1,$	a,	$\Delta)$	...ενδεχομένως, επιπλέον a
q_1	b	$(q_2,$	b,	$\Delta)$	ένα b
q_1	$\sqcup$	$(q_{\text{απόρριψης}},$	$\sqcup$,	$\Delta)$	τέλος συμβολοσειράς: απόρριψη
q_2	a	$(q_{\text{απόρριψης}},$	a,	$\Delta)$	μόνον ένα b: απόρριψη
q_2	b	$(q_3,$	b,	$\Delta)$	άλλο ένα b
q_2	$\sqcup$	$(q_{\text{απόρριψης}},$	$\sqcup$,	$\Delta)$	τέλος συμβολοσειράς: απόρριψη
q_3	b	$(q_3,$	b,	$\Delta)$	...ενδεχομένως, επιπλέον b
q_3	a	$(q_4,$	a,	$\Delta)$	ένα a
q_3	$\sqcup$	$(q_{\text{απόρριψης}},$	$\sqcup$,	$\Delta)$	τέλος συμβολοσειράς: απόρριψη
q_4	a	$(q_4,$	a,	$\Delta)$	...ενδεχομένως, επιπλέον a
q_4	b	$(q_{\text{απόρριψης}},$	b,	$\Delta)$	και άλλα b: απόρριψη
q_4	$\sqcup$	$(q_{\text{αποδοχής}},$	$\sqcup$,	$\Delta)$	τέλος συμβολοσειράς: αποδοχή

Πίνακας 5: Η συνάρτηση μετάβασης της μηχανής Turing για την Άσκηση 3.

Άσκηση 4

Κατασκευάστε μηχανή Turing η οποία αναγνωρίζει τη γλώσσα

$$L = \{\, w \in \{0,1\}^* \mid \text{η συμβολοσειρά } w \text{ περιέχει ίσο πλήθος από 0 και 1} \,\}.$$

Λύση

Η μηχανή Turing διαβάζει ατ σύμβολα ένα-ένα από τα αριστερά προς τα δεξιά: Για κάθε 0 που διαβάζει, το σβήνει και βρίσκει (εάν υπάρχει) το αριστερότερο 1 το οποίο και σβήνει. Όμοια, για κάθε 1 που διαβάζει, το σβήνει και βρίσκει (εάν υπάρχει) το αριστερότερο 0 το οποίο και σβήνει.

Η πλήρης περιγραφή της μηχανής Turing είναι:

$$
\begin{aligned}
& M_4 = (Q,\, \Sigma,\, \Gamma,\, \delta,\, s,\, q_{\text{αποδοχής}},\, q_{\text{απόρριψης}}) \\
\text{όπου}\quad & Q = \{s, q_1, q_2, p_0, p_1, q_{\text{αποδοχής}}, q_{\text{απόρριψης}}\} \\
& \Sigma\ = \{0, 1\} \\
& \Gamma\ = \{0, 1, \sqcup, \mathsf{X}, \$\} \\
& \delta\ :\ \text{όπως περιγράφεται στον Πίνακα 6.}
\end{aligned}
$$

q	σ	$\delta(q,\sigma)$			*Σχόλιο*
s	$\sqcup$	$(q_{\text{αποδοχής}},$	$\sqcup,$	$\Delta)$	αποδοχή της κενής συμβολοσειράς
s	0	$(p_0,$	\$,	$\Delta)$	εάν βρει 0, το σβήνει με \$ και μπαίνει στην p_0
s	1	$(p_1,$	\$,	$\Delta)$	εάν βρει 1, το σβήνει με \$ και μπαίνει στην p_1
p_0	0	$(p_0,$	0,	$\Delta)$	στην p_0, κινούμαστε δεξιά, προσπερνώντας 0...
p_0	X	$(p_0,$	X,	$\Delta)$	...και X...
p_0	1	$(q_1,$	X,	$\text{A})$	...έως το αριστερότερο 1 (γίνεται X)
p_0	$\sqcup$	$(q_{\text{απόρριψης}},$	$\sqcup,$	$\Delta)$	εάν δεν βρεθεί 1: απόρριψη
p_1	1	$(p_1,$	1,	$\Delta)$	στην p_1, κινούμαστε δεξιά, προσπερνώντας 1...
p_1	X	$(p_1,$	X,	$\Delta)$	...και X...
p_1	0	$(q_1,$	X,	$\text{A})$	...έως το αριστερότερο 0 (γίνεται X)
p_1	$\sqcup$	$(q_{\text{απόρριψης}},$	$\sqcup,$	$\Delta)$	εάν δεν βρεθεί 0: απόρριψη
q_1	0	$(q_1,$	0,	$\text{A})$	κινούμαστε προς τα αριστερά, προσπερνώντας 0...
q_1	1	$(q_1,$	1,	$\text{A})$	...1...
q_1	X	$(q_1,$	X,	$\text{A})$	...και X...
q_1	\$	$(q_2,$	\$,	$\Delta)$	έως την αρχή της συμβολοσειράς
q_2	X	$(q_2,$	X,	$\Delta)$	κινούμαστε δεξιά, προσπερνώντας X
q_2	0	$(p_0,$	X,	$\Delta)$	εάν βρει 0, το σβήνει με X και μπαίνει στην p_0
q_2	1	$(p_1,$	X,	$\Delta)$	εάν βρει 1, το σβήνει με X και μπαίνει στην p_1
q_2	$\sqcup$	$(q_{\text{αποδοχής}},$	$\sqcup,$	$\Delta)$	εάν δεν βρεθεί ούτε 0 ούτε 1: αποδοχή

Πίνακας 6: Η συνάρτηση μετάβασης της μηχανής Turing για την Άσκηση 4.

Άσκηση 5

Κατασκευάστε μηχανή Turing η οποία αναγνωρίζει τη γλώσσα $L = \{\, 0^n 1^n 0^n \mid n \geq 0 \,\}$. Περιγράψτε τον υπολογισμό της μηχανής σας για είσοδο 001100 και 00100.

Λύση

Το γενικό πλάνο λειτουργίας της μηχανής Turing θα είναι το εξής:

- ▷ εάν η είσοδος είναι η κενή συμβολοσειρά τότε η μηχανή μπαίνει στην κατάσταση $q_{\text{αποδοχής}}$ (αποδεχεται την e)
- ▷ εάν η είσοδος δεν είναι η κενή συμβολοσειρά, τότε η μηχανή:
  1. Διαβάζει το αριστερότερο σύμβολο.
  2. Εάν το σύμβολο δεν είναι 0, τότε η μηχανή μπαίνει στην $q_{\text{απόρριψης}}$.
  3. Εάν είναι 0, το σβήνει (γράφοντας X),
  4. μπαίνει στην κατάσταση q_1 και κινείται δεξιά έως το πρώτο 1 που συναντά,
  5. σβήνει το 1 (γράφοντας Y),
  6. μπαίνει στην κατάσταση q_2 και κινείται δεξιά έως το πρώτο 0 που συναντά,
  7. σβήνει το 0 (γράφοντας Z),
  8. μπαίνει στην κατάσταση q_3 και κινείται αριστερά έως το πρώτο X που συναντά,
  9. κάνει μεταβολή στο X και εάν συναντήσει 0, ξαναξεκινά στο Βήμα 3.
  10. Εάν συναντήσει Y, ελέγχει ότι δεξιότερα υπάρχουν Y ακολουθούμενα από Z.

Αξίζει να σημειωθεί ότι στο Βήμα 4 η κεφαλή της μηχανής αναμένει να συναντήσει και "προσπερνά" 0 και Y (τα Y έχουν προκύψει από τη διαγραφή κάποιων 1) και στο Βήμα 6

q	σ	$\delta(q,\sigma)$	*Σχόλιο*
s	0	$(q_1, \mathsf{X}, \Delta)$	σβήνει το αριστερότερο 0 γράφοντας X
s	⊔	$(q_{\text{αποδοχής}}, \sqcup, \Delta)$	αποδέχεται την κενή συμβολοσειρά
q_1	0	$(q_1, 0, \Delta)$	κινεί την κεφαλή δεξιά προσπερνώντας 0 και...
q_1	Y	$(q_1, \mathsf{Y}, \Delta)$	... Y έως ότου...
q_1	1	$(q_2, \mathsf{Y}, \Delta)$	... συναντήσει 1 το οποίο σβήνει γράφοντας Y
q_2	1	$(q_2, 1, \Delta)$	κινεί την κεφαλή δεξιά προσπερνώντας 1 και...
q_2	Z	$(q_2, \mathsf{Z}, \Delta)$	... Z έως ότου...
q_2	0	$(q_3, \mathsf{Z}, \mathrm{A})$	... συναντήσει 0 το οποίο σβήνει γράφοντας Z
q_3	0	$(q_3, 0, \mathrm{A})$	κινεί την κεφαλή αριστερά προσπερνώντας 0, ...
q_3	1	$(q_3, 1, \mathrm{A})$	... 1, ...
q_3	Y	$(q_3, \mathsf{Y}, \mathrm{A})$	... Y και...
q_3	Z	$(q_3, \mathsf{Z}, \mathrm{A})$	... Z έως ότου...
q_3	X	$(q_4, \mathsf{X}, \Delta)$	... συναντήσει X, οπότε κάνει μεταβολή
q_4	0	$(q_1, \mathsf{X}, \Delta)$	μπαίνει στην κατάσταση q_1 για νέα επανάληψη
q_4	Y	$(q_5, \mathsf{Y}, \Delta)$	εξαντλήθηκαν τα 0^n στην αρχή της συμβολοσειράς
q_5	Y	$(q_5, \mathsf{Y}, \Delta)$	στην q_5, προσπερνάει μόνον Y...
q_5	Z	$(q_6, \mathsf{Z}, \Delta)$	... κι όταν συναντήσει Z μπαίνει στην q_6, όπου...
q_6	Z	$(q_6, \mathsf{Z}, \Delta)$	... προσπερνάει μόνον Z και εάν υπάρχουν...
q_6	⊔	$(q_{\text{αποδοχής}}, \sqcup, \Delta)$	... μόνον Z που ακολουθούν Y: αποδοχή

Πίνακας 7: Η συνάρτηση μετάβασης της μηχανής Turing για την Άσκηση 5 (οι μεταβάσεις που δεν αναγράφονται οδηγούν στην κατάσταση $q_{\text{απόρριψης}}$).

αναμένει να συναντήσει και "προσπερνά" 1 και Z (τα Z έχουν προκύψει από τη διαγραφή κάποιων 0). Εάν η κεφαλή συναντήσει κάποιο άλλο σύμβολο, η μηχανή μπαίνει στην κατάσταση $q_{\text{απόρριψης}}$.

Η αναλυτική περιγραφή των μεταβάσεων της μηχανής Turing δίδεται στον Πίνακα 7, όπου θεωρούμε ότι η αρχική κατάσταση της μηχανής είναι η s.

Η πλήρης περιγραφή της μηχανής Turing είναι:

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, q_{\text{αποδοχής}}, q_{\text{απόρριψης}})$$

όπου
$$
\begin{aligned}
Q &= \{s, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_{\text{αποδοχής}}, q_{\text{απόρριψης}}\} \\
\Sigma &= \{0, 1\} \\
\Gamma &= \{0, 1, \sqcup, \mathsf{X}, \mathsf{Y}, \mathsf{Z}\} \\
\delta &: \text{όπως περιγράφεται στον Πίνακα 7.}
\end{aligned}
$$

Η λειτουργία της μηχανής για είσοδο 001100 έχει ως εξής:

$$
\begin{aligned}
(s, \underline{0}01100) &\vdash (q_1, \mathsf{X}\underline{0}1100) \vdash (q_1, \mathsf{X}0\underline{1}100) \vdash (q_2, \mathsf{X0Y}\underline{1}00) \vdash (q_2, \mathsf{X0Y1}\underline{0}0) \\
&\vdash (q_3, \mathsf{X0Y}\underline{1}\mathsf{Z}0) \vdash (q_3, \mathsf{X0}\underline{\mathsf{Y}}\mathsf{1Z0}) \vdash (q_3, \mathsf{X}\underline{0}\mathsf{Y1Z0}) \vdash (q_3, \underline{\mathsf{X}}\mathsf{0Y1Z0}) \\
&\vdash (q_4, \mathsf{X}\underline{0}\mathsf{Y1Z0}) \vdash (q_1, \mathsf{XX}\underline{\mathsf{Y}}\mathsf{1Z0}) \vdash (q_1, \mathsf{XXY}\underline{1}\mathsf{Z0}) \vdash (q_2, \mathsf{XXYY}\underline{\mathsf{Z}}0) \\
&\vdash (q_2, \mathsf{XXYYZ}\underline{0}) \vdash (q_3, \mathsf{XXYY}\underline{\mathsf{Z}}\mathsf{Z}) \vdash (q_3, \mathsf{XXY}\underline{\mathsf{Y}}\mathsf{ZZ}) \vdash (q_3, \mathsf{XX}\underline{\mathsf{Y}}\mathsf{YZZ}) \\
&\vdash (q_3, \mathsf{X}\underline{\mathsf{X}}\mathsf{YYZZ}) \vdash (q_4, \mathsf{XX}\underline{\mathsf{Y}}\mathsf{YZZ}) \vdash (q_5, \mathsf{XXY}\underline{\mathsf{Y}}\mathsf{ZZ}) \vdash (q_5, \mathsf{XXYY}\underline{\mathsf{Z}}\mathsf{Z}) \\
&\vdash (q_6, \mathsf{XXYYZ}\underline{\mathsf{Z}}) \vdash (q_6, \mathsf{XXYYZZ}\underline{\sqcup}) \vdash \boxed{(q_{\text{αποδοχής}}, \mathsf{XXYYZZ}\sqcup\underline{\sqcup})}
\end{aligned}
$$

Η λειτουργία της μηχανής για είσοδο 00100 έχει ως εξής:

$$
\begin{aligned}
(s, \underline{0}0100) &\vdash (q_1, \mathsf{X}\underline{0}0100) \vdash (q_1, \mathsf{X}0\underline{1}00) \vdash (q_2, \mathsf{X0Y}\underline{0}0) \vdash (q_3, \mathsf{X0}\underline{\mathsf{Y}}\mathsf{Z0}) \\
&\vdash (q_3, \mathsf{X}\underline{0}\mathsf{YZ0}) \vdash (q_3, \underline{\mathsf{X}}\mathsf{0YZ0}) \vdash (q_4, \mathsf{X}\underline{0}\mathsf{YZ0}) \vdash (q_1, \mathsf{XX}\underline{\mathsf{Y}}\mathsf{Z0}) \\
&\vdash (q_1, \mathsf{XXY}\underline{\mathsf{Z}}0) \vdash \boxed{\text{απόρριψη}}
\end{aligned}
$$

Παρατήρηση

Δεν είναι καλό να χρησιμοποιείται το ίδιο σύμβολο για τη διαγραφή των 0 και 1. (Εάν χρησιμοποιηθεί το ίδιο σύμβολο, π.χ., το X, υπάρχει κίνδυνος να γίνουν αποδεκτές συμβολοσειρές, όπως η 010100, που δεν ανήκουν στη δοθείσα γλώσσα L.)

Άσκηση 6

Κατασκευάστε μηχανή Turing η οποία απαριθμεί τη γλώσσα $L = \{\, 0^n 1^n \mid n \geq 0 \,\}$. Περιγράψτε την παραγωγή της συμβολοσειράς 0000011111.

Λύση

Η μηχανή Turing ξεκινά με κενή ταινία, κινεί την κεφαλή στο αμέσως δεξιότερο τετράγωνο και αμέσως μετά στο αμέσως αριστερότερο τετράγωνο (ώστε να επανέλθει στο πρώτο τετράγωνο της ταινίας) και μπαίνει στην ειδική κατάσταση q_{output} (απαριθμώντας έτσι την κενή συμβολοσειρά), κατόπιν γράφει 01 και μπαίνει πάλι στην q_{output} (απαριθμώντας έτσι τη συμβολοσειρά 01), και από εκεί και στο εξής, όταν έχει γράψει $0^k 1^k$ και βρίσκεται στην q_{output}, αλλάζει το αριστερότερο 1 σε 0, οπότε προκύπτει η συμβολοσειρά $0^{k+1}1^{k-1}$, προσθέτει δύο 1 στο τέλος και μπαίνει στην q_{output} (απαριθμώντας έτσι την $0^{k+1}1^{k+1}$), κ.ο.κ.

Η αναλυτική περιγραφή της μηχανής Turing έχει ως εξής:

$M = (Q,\, \Sigma,\, \Gamma,\, \delta,\, s,\, q_{\text{output}})$

όπου $Q = \{s, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, q_{\text{output}}\}$

$\Sigma = \{0, 1\}$

$\Gamma = \{0, 1, \sqcup\}$

δ : όπως περιγράφεται παρακάτω.

q	σ	$\delta(q,\sigma)$			*Σχόλιο*
s	$\sqcup$	$(p_1,$	$\sqcup,$	$\Delta)$	
p_1	$\sqcup$	$(q_{\text{output}},$	$\sqcup,$	$\text{A})$	απαριθμεί την κενή συμβολοσειρά
q_{output}	$\sqcup$	$(p_2,$	$\sqcup,$	$\text{A})$	
p_2	$\sqcup$	$(p_3,$	0,	$\Delta)$	η ταινία είναι κενή: γράφει 0...
p_3	$\sqcup$	$(q_{\text{output}},$	1,	$\Delta)$	... και 1: απαριθμεί τη συμβολοσειρά 01
p_2	1	$(p_4,$	1,	$\text{A})$	η ταινία περιέχει $0^k 1^k$, $k > 0$
p_4	1	$(p_4,$	1,	$\text{A})$	κινεί την κεφαλή αριστερά προσπερνώντας 1...
p_4	0	$(p_5,$	0,	$\Delta)$	... έως το πρώτο 0 που συναντά
p_5	1	$(p_6,$	0,	$\Delta)$	αλλάζει το αριστερότερο 1 σε 0
p_6	1	$(p_6,$	1,	$\Delta)$	κινεί την κεφαλή δεξιά προσπερνώντας 1 έως ότου...
p_6	$\sqcup$	$(p_7,$	1,	$\Delta)$	... συναντήσει $\sqcup$, οπότε γράφει 1 και μπαίνει στην p_7
p_7	$\sqcup$	$(q_{\text{output}},$	1,	$\Delta)$	γράφει άλλο ένα 1 και μπαίνει στην q_{output}, οπότε...
					... απαριθμεί τις συμβολοσειρές $0^n 1^n$, $n \geq 2$.

Σημειώνεται ότι η κατάσταση p_7 δεν είναι αναγκαία. Θα μπορούσαμε να είχαμε ορίσει $\delta(p_6, \sqcup) = (p_3, 1, \Delta)$.

Η παραγωγή της συμβολοσειράς 0000011111 έχει ως εξής:

$(s, \underline{\sqcup}) \vdash (p_1, \sqcup\underline{\sqcup}) \vdash \boxed{(q_{\text{output}}, \underline{\sqcup}\sqcup)}$

$\vdash (p_2, \underline{\sqcup}\sqcup) \vdash (p_3, 0\underline{\sqcup}) \vdash \boxed{(q_{\text{output}}, 01\underline{\sqcup})}$

$\vdash (p_2, \mathsf{0\underline{1}}\sqcup) \vdash (p_4, \mathsf{\underline{0}1}\sqcup) \vdash (p_5, \mathsf{0\underline{1}}\sqcup) \vdash (p_6, \mathsf{00}\underline{\sqcup}) \vdash (p_7, \mathsf{001}\underline{\sqcup}) \vdash \boxed{(q_{\text{output}}, \mathsf{0011}\underline{\sqcup})}$
$\vdash (p_2, \mathsf{001\underline{1}}\sqcup) \vdash (p_4, \mathsf{00\underline{1}1}\sqcup) \vdash (p_4, \mathsf{0\underline{0}11}\sqcup) \vdash (p_5, \mathsf{00\underline{1}1}\sqcup) \vdash (p_6, \mathsf{000\underline{1}}\sqcup)$
$\vdash (p_6, \mathsf{0001}\underline{\sqcup}) \vdash (p_7, \mathsf{00011}\underline{\sqcup}) \vdash \boxed{(q_{\text{output}}, \mathsf{000111}\underline{\sqcup})}$
$\vdash$ κ.ο.κ.

Άσκηση 7

Κατασκευάστε μηχανή Turing η οποία διαγιγνώσκει τη γλώσσα $L = \{\, ww \mid w \in \{a, b\}^* \,\}$. Περιγράψτε τον υπολογισμό για είσοδο $abab$ και $abba$.

Λύση
Βασική Ιδέα: η μηχανή Turing προσδιορίζει με "μη ντετερμινιστικό" τρόπο το μέσον της συμβολοσειράς εισόδου και κατόπιν ταιριάζει τα δύο μισά.

Η λειτουργία της μηχανής Turing δίδεται στον παρακάτω πίνακα, όπου η s είναι η αρχική κατάσταση (μεταβάσεις που δεν αναγράφονται οδηγούν σε απόρριψη):

q	σ	$\delta(q,\sigma)$	*Σχόλιο*
s	a	$\{(q_a,\ \mathsf{X},\ \Delta)\}$	διαβάζει το πρώτο σύμβολο, το σβήνει με X
s	b	$\{(q_b,\ \mathsf{X},\ \Delta)\}$	... και αποθηκεύει την πληροφορία σε q_a ή q_b
s	$\sqcup$	$\{(q_{\text{αποδοχής}},\ \sqcup,\ \Delta)\}$	αποδέχεται την κενή συμβολοσειρά
q_a	a	$\{(q_a,\ \mathsf{a},\ \Delta),\ (q_1,\ \mathsf{Y},\ \mathrm{A})\}$	κινεί την κεφαλή δεξιά προσπερνώντας a, b
q_a	b	$\{(q_a,\ \mathsf{b},\ \Delta)\}$	... μέχρι να βρει το a στην αρχή του 2ου μισού
q_b	a	$\{(q_b,\ \mathsf{a},\ \Delta)\}$	κινεί την κεφαλή δεξιά προσπερνώντας a, b
q_b	b	$\{(q_b,\ \mathsf{b},\ \Delta),\ (q_1,\ \mathsf{Y},\ \mathrm{A})\}$	... μέχρι να βρει το b στην αρχή του 2ου μισού
q_1	a	$\{(q_1,\ \mathsf{a},\ \mathrm{A})\}$	κινεί την κεφαλή αριστερά προσπερνώντας a
q_1	b	$\{(q_1,\ \mathsf{b},\ \mathrm{A})\}$	... και b μέχρι να βρει X και μπαίνει
q_1	X	$\{(r_1,\ \mathsf{X},\ \Delta)\}$	... στην r_1: ξαναρχίζει η διαδικασία ταιριάσματος
r_1	a	$\{(r_a,\ \mathsf{X},\ \Delta)\}$	διαβάζει το σύμβολο, το σβήνει με X
r_1	b	$\{(r_b,\ \mathsf{X},\ \Delta)\}$	... και αποθηκεύει την πληροφορία σε r_a ή r_b
r_1	Y	$\{(\ t,\ \mathsf{Y},\ \Delta)\}$	ολοκληρώθηκε το ταίριασμα του 1ου μισού
r_a	a	$\{(r_a,\ \mathsf{a},\ \Delta)\}$	κινεί την κεφαλή δεξιά προσπερνώντας a
r_a	b	$\{(r_a,\ \mathsf{b},\ \Delta)\}$	... και b
r_a	Y	$\{(r_A,\ \mathsf{Y},\ \Delta)\}$	... μέχρι να βρει Y
r_A	Y	$\{(r_A,\ \mathsf{Y},\ \Delta)\}$	προσπερνάει Y μέχρι να βρει κάποιο άλλο σύμβολο
r_A	a	$\{(r_2,\ \mathsf{Y},\ \mathrm{A})\}$	... που πρέπει να είναι a για να ταιριάζει
r_b	a	$\{(r_b,\ \mathsf{a},\ \Delta)\}$	κινεί την κεφαλή δεξιά προσπερνώντας a
r_b	b	$\{(r_b,\ \mathsf{b},\ \Delta)\}$	... και b
r_b	Y	$\{(r_B,\ \mathsf{Y},\ \Delta)\}$	... μέχρι να βρει Y
r_B	Y	$\{(r_B,\ \mathsf{Y},\ \Delta)\}$	προσπερνάει Y μέχρι να βρει κάποιο άλλο σύμβολο
r_B	b	$\{(r_2,\ \mathsf{Y},\ \mathrm{A})\}$	... που πρέπει να είναι b για να ταιριάζει
r_2	Y	$\{(r_2,\ \mathsf{Y},\ \mathrm{A})\}$	κινεί την κεφαλή αριστερά προσπερνώντας Y,
r_2	a	$\{(r_2,\ \mathsf{a},\ \mathrm{A})\}$	... a και
r_2	b	$\{(r_2,\ \mathsf{b},\ \mathrm{A})\}$	... b μέχρι να βρει
r_2	X	$\{(r_1,\ \mathsf{X},\ \Delta)\}$	... X: στην r_1 ξαναρχίζει η διαδικασία ταιριάσματος
t	Y	$\{(\ t,\ \mathsf{Y},\ \Delta)\}$	προσπερνάει Y και εάν υπάρχουν μόνον Y,
t	$\sqcup$	$\{(q_{\text{αποδοχής}},\ \sqcup,\ \Delta)\}$	... τότε η συμβολοσειρά $\in L$: αποδοχή

Παρατηρήστε ότι οι μεταβάσεις για τις καταστάσεις q_b, q_B, r_b και r_B είναι “αντίστοιχες” προς αυτές των καταστάσεων q_a, q_A, r_a και r_A αντιστοίχως.

Η πλήρης περιγραφή της μηχανής Turing είναι:

$$
\begin{array}{ll}
& M = (Q,\ \Sigma,\ \Gamma,\ \delta,\ s,\ q_{\text{αποδοχής}},\ q_{\text{απόρριψης}}) \\
\text{όπου} & Q = \{s, q_1, q_a, q_b, r_1, r_2, r_a, r_b, r_A, r_B, t, q_{\text{αποδοχής}}, q_{\text{απόρριψης}}\} \\
& \Sigma\ = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\} \\
& \Gamma\ = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \sqcup, \mathsf{X}, \mathsf{Y}\} \\
& \delta\ \ :\ \text{όπως περιγράφηκε παραπάνω.}
\end{array}
$$

Η λειτουργία της μηχανής για εισόδους $abab$ και $abba$ έχει ως εξής:

$$
\begin{array}{l}
(s, \underline{\mathsf{a}}\mathsf{bab}) \vdash (q_a, \mathsf{X}\underline{\mathsf{b}}\mathsf{ab}) \vdash (q_a, \mathsf{Xb}\underline{\mathsf{a}}\mathsf{b}) \\
\quad \vdash \left\{ \begin{array}{llll}
(q_a, \mathsf{Xba}\underline{\mathsf{b}}) & \vdash (q_a, \mathsf{Xbab}\underline{\sqcup}) & \boxed{\text{απόρριψη}} & \\
(q_1, \mathsf{X}\underline{\mathsf{b}}\mathsf{Yb}) & \vdash (q_1, \underline{\mathsf{X}}\mathsf{bYb}) & \vdash (r_1, \mathsf{X}\underline{\mathsf{b}}\mathsf{Yb}) & \vdash (r_b, \mathsf{XX}\underline{\mathsf{Y}}\mathsf{b})
\end{array} \right. \\
\qquad\qquad\qquad \vdash (r_B, \mathsf{XXY}\underline{\mathsf{b}}) \quad \vdash (r_2, \mathsf{XX}\underline{\mathsf{Y}}\mathsf{Y}) \quad \vdash (r_2, \mathsf{X}\underline{\mathsf{X}}\mathsf{YY}) \\
\qquad\qquad\qquad \vdash (r_1, \mathsf{XX}\underline{\mathsf{Y}}\mathsf{Y}) \quad \vdash (t,\ \mathsf{XXY}\underline{\mathsf{Y}}) \quad \vdash (t,\ \mathsf{XXYY}\underline{\sqcup}) \\
\qquad\qquad\qquad \vdash \boxed{(q_{\text{αποδοχής}}, \mathsf{XXYY}\sqcup\underline{\sqcup})}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
(s, \underline{\mathsf{a}}\mathsf{bba}) \vdash (q_a, \mathsf{X}\underline{\mathsf{b}}\mathsf{ba}) \vdash (q_a, \mathsf{Xb}\underline{\mathsf{b}}\mathsf{a}) \vdash (q_a, \mathsf{Xbb}\underline{\mathsf{a}}) \\
\quad \vdash \left\{ \begin{array}{llll}
(q_a, \mathsf{Xbba}\underline{\sqcup}) & \boxed{\text{απόρριψη}} & & \\
(q_1, \mathsf{Xb}\underline{\mathsf{b}}\mathsf{Y}) & \vdash (q_1, \mathsf{X}\underline{\mathsf{b}}\mathsf{bY}) & \vdash (q_1, \underline{\mathsf{X}}\mathsf{bbY}) & \vdash (r_1, \mathsf{X}\underline{\mathsf{b}}\mathsf{bY})
\end{array} \right. \\
\qquad\qquad\qquad \vdash (r_b, \mathsf{XX}\underline{\mathsf{b}}\mathsf{Y}) \quad \vdash (r_b, \mathsf{XXb}\underline{\mathsf{Y}}) \quad \vdash (r_B, \mathsf{XXbY}\underline{\sqcup}) \ \boxed{\text{απόρριψη}}
\end{array}
$$

Άσκηση 8

Κατασκευάστε μηχανή Turing (αλφάβητο εισόδου $\{a, b\}$) η οποία μετακινεί τη συμβολοσειρά εισόδου (εφόσον δεν είναι η κενή συμβολοσειρά e) κατά ένα τετράγωνο δεξιά και αποδέχεται.

Λύση

Η μηχανή Turing μεταφέρει ένα ένα τα σύμβολα της εισόδου ένα τετράγωνο πιο δεξιά: κάθε φορά, διαβάζει το τρέχον σύμβολο, γράφει X επάνω του, μπαίνει στην κατάσταση q_a ή q_b εάν το σύμβολο που διαβάστηκε είναι a ή b αντίστοιχα (ώστε να το θυμάται), και μετακινεί την κεφαλή ένα τετράγωνο δεξιότερα και γράφει (στο X που υπάρχει εκεί) το σύμβολο που διάβασε. Για λόγους συμβατότητας, η μηχανή γράφει X και στο κενό τετράγωνο αμέσως δεξιότερα από την εισόδο. Αναλυτικά, οι μεταβάσεις της μηχανής Turing δίδονται στον Πίνακα 8, όπου s είναι η αρχική κατάσταση της μηχανής.

Η πλήρης περιγραφή της μηχανής Turing είναι:

$$
\begin{array}{ll}
& M = (Q,\ \Sigma,\ \Gamma,\ \delta,\ s,\ q_{\text{αποδοχής}},\ q_{\text{απόρριψης}}) \\
\text{όπου} & Q = \{s, q_1, q_2, q_3, q_a, q_b, q_{\text{αποδοχής}}, q_{\text{απόρριψης}}\} \\
& \Sigma\ = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\} \\
& \Gamma\ = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \sqcup, \mathsf{X}, \mathsf{A}, \mathsf{B}\} \\
& \delta\ \ :\ \text{όπως περιγράφεται στον Πίνακα 8.}
\end{array}
$$

Ενδεικτικά, η λειτουργία της μηχανής για είσοδο aba έχει ως εξής:

$$
\begin{array}{l}
(s, \underline{\mathsf{a}}\mathsf{ba}\sqcup) \vdash (q_1, \mathsf{A}\underline{\mathsf{b}}\mathsf{a}\sqcup) \vdash (q_1, \mathsf{Ab}\underline{\mathsf{a}}\sqcup) \vdash (q_1, \mathsf{Aba}\underline{\sqcup}) \vdash (q_2, \mathsf{Ab}\underline{\mathsf{a}}\mathsf{X}) \vdash (q_a, \mathsf{AbX}\underline{\mathsf{X}}) \\
\qquad \vdash (q_3, \mathsf{Ab}\underline{\mathsf{X}}\mathsf{a}) \vdash (q_2, \mathsf{A}\underline{\mathsf{b}}\mathsf{Xa}) \vdash (q_b, \mathsf{AX}\underline{\mathsf{X}}\mathsf{a}) \vdash (q_3, \mathsf{A}\underline{\mathsf{X}}\mathsf{ba}) \vdash (q_2, \underline{\mathsf{A}}\mathsf{Xba}) \\
\qquad \vdash (q_a, \sqcup\underline{\mathsf{X}}\mathsf{ba}) \vdash (q_3, \underline{\sqcup}\mathsf{aba}) \vdash \boxed{(q_{\text{αποδοχής}}, \sqcup\underline{\mathsf{a}}\mathsf{ba})}
\end{array}
$$

q	σ	$\delta(q,\sigma)$			*Σχόλιο*
s	a	$(q_1,$	A,	$\Delta)$	σημειώνει το 1ο σύμβολο: a $\rightarrow$ A
s	b	$(q_1,$	B,	$\Delta)$	σημειώνει το 1ο σύμβολο: b $\rightarrow$ B
s	$\sqcup$	$(q_{\text{αποδοχής}},$	$\sqcup$,	$\Delta)$	κενή συμβολοσειρά: αποδοχή
q_1	a	$(q_1,$	a,	$\Delta)$	κίνηση προς τα δεξιά, προσπερνά a
q_1	b	$(q_1,$	b,	$\Delta)$	...προσπερνά b
q_1	$\sqcup$	$(q_2,$	X,	$\mathrm{A})$	τέλος συμβολοσειράς, γράφει X
q_2	a	$(q_a,$	X,	$\Delta)$	διαβάζει το σύμβολο, το σβήνει με X και...
q_2	b	$(q_b,$	X,	$\Delta)$	... μπαίνει στην κατάλληλη κατάσταση q_a ή q_b
q_2	A	$(q_a,$	$\sqcup$,	$\Delta)$	το 1ο σύμβολο, το σβήνει με $\sqcup$ και...
q_2	B	$(q_b,$	$\sqcup$,	$\Delta)$	... μπαίνει στην κατάλληλη κατάσταση q_a ή q_b
q_a	X	$(q_3,$	a,	$\mathrm{A})$	γράφει a, μπαίνει στην q_3 και πηγαίνει αριστερά
q_b	X	$(q_3,$	b,	$\mathrm{A})$	γράφει b, μπαίνει στην q_3 και πηγαίνει αριστερά
q_3	X	$(q_2,$	X,	$\mathrm{A})$	μπαίνει στην q_2 για μετακίνηση επόμενου συμβόλου
q_3	$\sqcup$	$(q_{\text{αποδοχής}},$	$\sqcup$,	$\Delta)$	ολοκληρώθηκε η μετακίνηση της εισόδου

Πίνακας 8: Η συνάρτηση μετάβασης της μηχανής Turing για την Άσκηση 8.

Άσκηση 9

Αποδείξτε ότι η κλάση των αναγνωρίσιμων γλωσσών δεν είναι κλειστή ως προς το συμπλήρωμα ενώ είναι κλειστή ως προς την ένωση και την τομή.

Λύση

Εάν οι αναγνωρίσιμες γλώσσες ήταν κλειστές ως προς το συμπλήρωμα, τότε το συμπλήρωμα κάθε αναγνωρίσιμης γλώσσας θα ήταν επίσης αναγνωρίσιμη γλώσσα. Αλλά τότε κάθε αναγνωρίσιμη γλώσσα θα ήταν και διαγνώσιμη, κάτι που ερχεται σε αντίφαση με το γεγονός ότι η γλώσσα ΑΠΟΔΟΧΗ/TM είναι αναγνωρίσιμη αλλά όχι διαγνώσιμη (παράγραφος 4.2 των φωτοτυπιών).

Αντίθετα, οι αναγνωρίσιμες γλώσσες είναι κλειστές ως προς την ένωση. Έστω L_1 και L_2 δύο αναγνωρίσιμες γλώσσες, και έστω M_1 και M_2 μηχανές Turing που αναγνωρίζουν τις L_1 και L_2 αντίστοιχα. Θα δείξουμε ότι η γλώσσα $L_1 \cup L_2$ είναι επίσης αναγνωρίσιμη περιγράφοντας μια μηχανή Turing M που την αναγνωρίζει: η μηχανή M έχει δύο ταινίες, γράφει την είσοδο και στις δύο ταινίες, και προσομοιώνει **παράλληλα** την M_1 στη μία ταινία και την M_2 στη δεύτερη. Εάν κάποια από τις M_1 και M_2 αποδεχθεί, τότε και η M αποδέχεται ενώ εάν και οι δύο απορρίψουν τότε η M απορρίπτει. Σημειώστε ότι εάν καμία από τις M_1 και M_2 δεν σταματήσει, τότε η M δεν σταματά. Συνεπώς η M αναγνωρίζει τη γλώσσα $L_1 \cup L_2$.

Επίσης, οι αναγνωρίσιμες γλώσσες είναι κλειστές ως προς την τομή. Έστω L_1 και L_2 δύο αναγνωρίσιμες γλώσσες, και έστω M_1 και M_2 μηχανές Turing που αναγνωρίζουν τις L_1 και L_2 αντίστοιχα. Θα δείξουμε ότι η γλώσσα $L_1 \cap L_2$ είναι επίσης αναγνωρίσιμη περιγράφοντας μια μηχανή Turing M που την αναγνωρίζει: η μηχανή M έχει δύο ταινίες, αντιγράφει την είσοδο στη δεύτερη ταινία, και προσομοιώνει την M_1 στην πρώτη ταινία. Εάν η M_1 απορρίψει, τότε κι η M απορρίπτει, ενώ εάν η M αποδεχθεί, τότε η M προσομοιώνει την M_2 στη δεύτερη ταινία και αποδέχεται εφόσον η M_2 αποδεχθεί και απορρίπτει εφόσον η M_2 απορρίψει. Σημειώστε ότι εάν κάποια από τις M_1 και M_2 δεν σταματήσει, τότε η M δεν σταματά. Δηλαδή, η M αναγνωρίζει τη γλώσσα $L_1 \cap L_2$.

Άσκηση 10

Δείξτε ότι κάθε πεπερασμένο σύνολο είναι διαγνώσιμο.

Λύση

Έστω L ένα δοθέν πεπερασμένο σύνολο συμβολοσειρών. Γνωρίζουμε ότι κάθε πεπερασμένο σύνολο συμβολοσειρών είναι μια κανονική γλώσσα, και άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι έχουμε ένα αιτιοκρατικό πεπερασμένο αυτόματο A που αποδέχεται τη γλώσσα L. Τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε μια αιτιοκρατική μηχανή Turing M που διαγιγνώσκει την L ως εξής:

- ▷ η M ξεκινά σε μια κατάσταση ανάλογη προς την αρχική κατάσταση του αυτόματου A και προσομοιώνει τη λειτουργία του A για τη συγκεκριμένη είσοδο,

- ▷ εάν όταν φθαουμε στο 1ο κενό τετράγωνο (δηλαδή, αμλεσως μετά το τέλος της συμβολοσειράς) το αυτόματο (και η μηχανή) βρίσκεται σε τελική κατάσταση τότε η μηχανή αποδέχεται, ενώ εάν βρίσκεται σε μη τελική κατάσταση τότε η μηχανή απορρίπτει.

Πιο συγκεκριμένα, έστω $A = (K, \Sigma, \delta_A, q_0, F)$, όπου $K = \{q_0, q_1, \ldots, q_k\}$.
Τότε η μηχανή Turing M είναι:

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, q_{\text{αποδοχής}}, q_{\text{απόρριψης}})$$

$$\begin{array}{llll} \text{όπου} & Q = & K \cup \{q_{\text{αποδοχής}}, q_{\text{απόρριψης}}\} & \\ & \Gamma = & \Sigma \cup \{\sqcup\} & \\ & s = & q_0 & \\ & \delta : & \delta(q_i, \sigma) = (\delta_A(q_i, \sigma),\ \sigma, \Delta) & \forall\, q_i \in K \text{ και } \forall\, \sigma \in \Sigma \quad (1) \\ & & \delta(q_i, \sqcup) = (q_{\text{αποδοχής}}, \sqcup, \Delta) & \forall\, q_i \in F \quad (2) \\ & & \delta(q_i, \sqcup) = (q_{\text{απόρριψης}}, \sqcup, \Delta) & \forall\, q_i \in K - F \quad (3) \end{array}$$

Σημειώσεις

(1): "προσομοίωση του αυτόματου A"
(2): "αποδεκτή συμβολοσειρά"
(3): "μη αποδεκτή συμβολοσειρά"

Εναλλακτικά, η άσκηση μπορεί να επιλυθεί δείχνοντας με επαγωγή στον πληθάριθμο του πεπερασμένου συνόλου ότι αυτό είναι διαγνώσιμο. Η απόδειξη χρησιμοποιεί την ιδιότητα της κλειστότητας των διαγνώσιμων γλωσσών ως προς την ένωση.

Άσκηση 11

Ποια από τα παρακάτω προβλήματα σχετικά με μηχανές Turing είναι επιλύσιμα και ποια όχι; Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

α) Δοσμένης μιας ΜΤ M, μιας κατάστασης q και μιας συμβολοσειράς w, φθάνει ποτέ η M στην κατάσταση q εάν ξεκινήσει από την αρχική κατάσταση με είσοδο w;

β) Δοσμένης μιας ΜΤ M και μιας κατάστασης q, υπάρχει φάση $(p, u\underline{a}v)$ η οποία οδηγεί σε μια φάση όπου η M είναι σε κατάσταση q και όπου $p \neq q$;

γ) Δοσμένης μιας ΜΤ M, γράφει ποτέ η M ένα μη κενό σύμβολο όταν ξεκινήσει με άδεια ταινία;

δ) Δοσμένης μιας ΜΤ M, είναι η γλώσσα που αποδέχεται η M πεπερασμένη;

Λύση

(α) Το πρόβλημα είναι μη επιλύσιμο. Ας υποθέσουμε ότι υπήρχε μηχανή Turing N_α για την επίλυση του προβλήματος. Τότε, όμως, εάν δίδαμε ως είσοδο στην N_α μια μηχανή M, την κατάσταση αποδοχής $q_{\text{αποδοχής}}$ και μια συμβολοσειρά w, θα μπορούσαμε να διαγνώσουμε τη γλώσσα Αποδοχη/ΤΜ. Αυτό όμως είναι άτοπο, καθώς η γλώσσα Αποδοχη/ΤΜ δεν είναι διαγνώσιμη.

(β) Το πρόβλημα είναι επιλύσιμο. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι εάν κάποια φάση (p, w) της M με $p \neq q$ δίνει (μετά από μία ή περισσότερες μεταβάσεις) κάποια φάση (q, w'), τότε στην ακολουθία φάσεων κατά τη λειτουργία της μηχανής M από την (p, w) στην (q, w') θα υπάρχουν δύο διαδοχικές φάσεις (p', z) και (q, z') όπου $(p', z) \vdash (q, z')$ και $p' \neq q$. Με άλλα λόγια, η μηχανή M θα πρέπει να έχει κάποια μετάβαση $\delta(p', \sigma) = \{\ldots, (q, \sigma', \mathrm{A}/\Delta), \ldots\}$. Αντίθετα, εάν δεν υπάρχει κατάσταση $p' \neq q$ και σύμβολο σ τέτοιο ώστε η $\delta(p', \sigma)$ να περιέχει μια τριάδα της μορφής $(q, \sigma', \mathrm{A}/\Delta)$, τότε δεν μπορεί κάποια φάση (p, w) με $p \neq q$ να οδηγήσει σε μια φάση (q, w').

Άρα αρκεί να ελεγξουμε όλες τις μεταβάσεις της μηχανής M για καταστάσεις $p' \neq q$. Εάν κάποια τέτοια κατάσταση για κάποιο σύμβολο δίνει τριάδα $(q, \sigma', \mathrm{A}/\Delta)$ τότε η απάντηση στο πρόβλημα για την M είναι "Ναι" (αποδοχή). Σε αντίθετη περίπτωση, η απάντηση στο πρόβλημα για την M είναι "Όχι" (απόρριψη).

Προσοχή: Τα παραπάνω ισχύουν θεωρώντας ότι η φάση $(p, u\underline{a}v)$ δεν είναι απαραίτητο να προκύπτει κατά τη λειτουργία της μηχανής Turing M για κάποια είσοδο. Εάν αντίθετα τεθεί η απαίτηση η φάση $(p, u\underline{a}v)$ να προκύπτει κατά τη λειτουργία της μηχανής Turing M για κάποια είσοδο, τότε το δοθέν πρόβλημα είναι μη επιλύσιμο. Παρατηρήστε ότι η απαίτηση συνεπάγεται ότι η μηχανή M μπαίνει στην κατάσταση q (για κάποια είσοδο). Άρα, εάν θέσουμε $q = q_{\text{αποδοχής}}$, τότε θα μπορούμε να διαγνώσουμε εάν δοθείσα μηχανή Turing T μπαίνει στην κατάσταση αποδοχής, ή ισοδύναμα εάν αποδέχεται κάποια συμβολοσειρά, και συνεπώς να διαγνώσουμε τη γλώσσα Κενοτητα/ΤΜ, η οποία είναι μη διαγνώσιμη.

(γ) Το πρόβλημα είναι επιλύσιμο. Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι όσο η δοθείσα μηχανή Turing M δεν γράφει κάποιο μη κενό σύμβολο, η ταινία θα παραμένει κενή, και άρα η εκάστοτε φάση καθορίζεται μόνον από την τρέχουσα κατάσταση της M. Με βάση αυτήν την παρατήρηση, μπορούμε να δείξουμε ότι εάν η μηχανή M γράφει κάποιο μη κενό σύμβολο όταν ξεκινήσει με άδεια ταινία, τότε υπάρχει υπολογισμός κατά τον οποίο η M ξεκινώντας από την εναρκτήρια φάση $(s, \sqcup)$ γράφει κάποιο μη κενό σύμβολο σε το πολύ $|Q|$ μεταβάσεις, όπου s η αρχική κατάσταση της M και Q το σύνολο καταστάσεών της.

Η απόδειξη βασίζεται σε εις άτοπον απαγωγή. Ας υποθέσουμε ότι η μηχανή M τελικά γράφει κάποιο μη κενό σύμβολο και ας θεωρήσουμε ότι η συντομότερη ακολουθία φάσεων ξεκινώντας από την εναρκτήρια φάση μέχρι τη φάση όπου γράφεται κάποιο μη κενό σύμβολο περιλαμβάνει τουλάχιστον $|Q| + 1$ μεταβάσεις. Τότε, αυτή η ακολουθία περιλαμβάνει τουλάχιστον $|Q|+2$ φάσεις από τις οποίες οι $|Q|+1$ πρώτες χαρακτηρίζονται από μία κατάσταση της M και κενή ταινία. Αλλά τότε τουλάχιστον δύο από αυτές τις φάσεις θα είναι ίδιες, οπότε εάν αγνοήσουμε όλες τις φάσεις από την πρώτη εμφάνιση της "διπλής" φάσης μέχρι τη δεύτερη εμφάνισή της, θα προκύψει ακολουθία φάσεων που ξεκινά από την εναρκτήρια φάση μέχρι κάποια φάση όπου γράφεται ένα μη κενό σύμβολο η οποία είναι συντομότερη από την πιο σύντομη που θεωρήσαμε. Άτοπο.

Έτσι, αρκεί να ελέγξουμε όλες τους πιθανούς υπολογισμούς της δοθείσας μηχανής Turing M ξεκινώντας από την εναρκτήρια φάση και για $|Q|$ μεταβάσεις εφόσον η μηχανή δεν σταματήσει (εάν η M είναι αιτιοκρατική τότε υπάρχει μόνον ένας τέτοιος υπολογισμός). Εάν η μηχανή γράψει κάποιο μη κενό σύμβολο κατά τη διάρκεια κάποιου από αυτούς τους υπολογισμούς τότε έχουμε αποδοχή, αλλιώς έχουμε απόρριψη.

(δ) Το πρόβλημα είναι μη επιλύσιμο. Ας υποθέσουμε ότι υπήρχε μηχανή Turing N_δ για την επίλυση του προβλήματος. Θα δείξουμε ότι χρησιμοποιώντας τη μηχανή N_δ θα μπορούσαμε να διαγνώσουμε τη γλώσσα Αποδοχη/TM (για την οποία γνωρίζουμε ότι δεν είναι διαγνώσιμη).

Κατασκευάζουμε μηχανή Turing T η οποία λειτουργεί ως εξής:

- ▷ για είσοδο την περιγραφή $\langle M, w\rangle$ μηχανής Turing M και συμβολοσειράς w
  - ○ υπολογίζει και γράφει στην ταινία της την περιγραφή $\langle M'_w\rangle$ της μηχανής Turing M'_w η οποία
    σβήνει τη συμβολοσειρά εισόδου από την ταινία της,
    γράφει τη συμβολοσειρά w και
    προσομοιώνει τη μηχανή M (είσοδος η συμβολοσειρά w)
  - ○ προσομοιώνει τη μηχανή N_δ (είσοδος $\langle M'_w\rangle$)
  - ○ αποδέχεται εάν η N_δ απορρίψει και απορρίπτει εάν η N_δ αποδεχθεί.
- ▷ για είσοδο που δεν είναι η περιγραφή κάποιας μηχανής Turing, η T απορρίπτει.

Παρατηρήστε ότι η μηχανή Turing T σταματά για όλες τις εισόδους και αποδέχεται ή απορρίπτει: μάλιστα, αποδέχεται μόνον εάν η είσοδος είναι η περιγραφή κάποιας μηχανής Turing και εφόσον η N_δ απορρίψει. Επίσης, παρατηρήστε ότι εάν η M αποδέχεται τη συμβολοσειρά w τότε η μηχανή Turing M'_w αποδέχεται όλες τις συμβολοσειρές εισόδου (δηλ., $L(M'_w) = \Sigma^*$), ενώ εάν η M δεν αποδέχεται την w τότε η M'_w δεν αποδέχεται καμία είσοδο (δηλ., $L(M'_w) = \emptyset$). Με άλλα λόγια, η $L(M'_w)$ είναι πεπερασμένη εάν και μόνον εάν η M δεν αποδέχεται τη συμβολοσειρά w.

Τότε, η μηχανή Turing T Διαγιγνώσκει τη γλώσσα Αποδοχη/TM: όπως αναφέρθηκε, η μηχανή T σταματά για κάθε είσοδο και αποδέχεται ή απορρίπτει, ενώ

$$\begin{aligned}
\text{η } T \text{ αποδέχεται } \langle M, w\rangle \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{η } N_\delta \text{ απορρίπτει } \langle M'_w\rangle \\
&\Longleftrightarrow \quad \text{η } L(M'_w) \text{ δεν είναι πεπερασμένη} \\
&\Longleftrightarrow \quad \text{η } M \text{ αποδέχεται την } w.
\end{aligned}$$