4-44: Θεωρία Υπολογισμού

Λύσεις της 2ης Ομάδας Προτεινομένων Ασκήσεων

Άσκηση 1

Κατασκευάστε ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο το οποίο να αποδέχεται όλες τις συμβολοσειρές από το αλφάβητο $\{a, b\}$ που περιέχουν τρία συνεχόμενα a.

Λύση

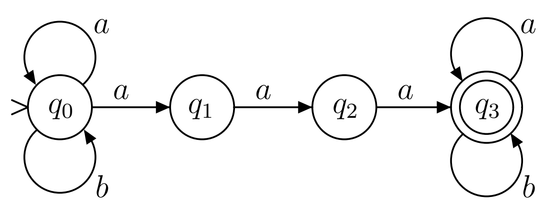
Καθώς το αυτόματο θα πρέπει να αποδέχεται όλες τις συμβολοσειρές που περιέχουν τρία συνεχόμενα a, τα οποία μπορεί να βρίσκονται στην αρχή, στη μέση, ή στο τέλος της συμβολοσειράς, μπορούμε να ξεκινήσουμε θεωρώντας το εξής μη ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο το οποίο αποδέχεται τις επιθυμητές συμβολοσειρές:

$$M \;=\; (\,\{q_0, q_1, q_2, q_3\},\, \{a, b\},\, \Delta,\, q_0,\, \{q_3\}\,),$$

όπου

$$\begin{aligned}\Delta = \{\, & (q_0, a, q_0),\, (q_0, a, q_1),\\ & (q_0, b, q_0),\, (q_1, a, q_2),\\ & (q_2, a, q_3),\, (q_3, a, q_3),\\ & (q_3, b, q_3)\,\}\end{aligned}$$

ή



Δεν είναι δύσκολο να δείξει κάποιος ότι κάθε αποδεκτή συμβολοσειρά περιέχει τρία συνεχόμενα a, και ότι κάθε συμβολοσειρά που περιέχει τρία συνεχόμενα a γίνεται αποδεκτή. Το αυτόματο M δεν είναι ντετερμινιστικό γιατί από την κατάσταση q_0 έχουμε δύο μεταβάσεις για το σύμβολο a ενώ επίσης από τις καταστάσεις q_1 και q_2 δεν υπάρχει μετάβαση για το σύμβολο b. Μπορούμε λοιπόν να προσπαθήσουμε να "διορθώσουμε" το αυτόματο ώστε να γίνει ντετερμινιστικό χωρίς να αλλάξουμε τη γλώσσα που αυτό αποδέχεται.

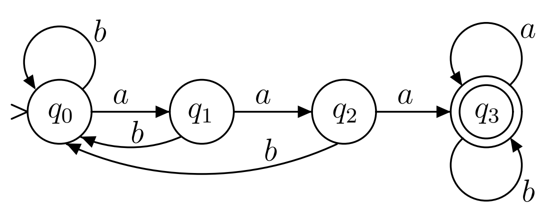
Μια λύση είναι να διαγράψουμε τη μετάβαση από την q_0 στην q_0 για το σύμβολο a, και να προσθέσουμε μεταβάσεις από τις q_1 και q_2 στην q_0 για το σύμβολο b, οπότε έχουμε:

$$M' \;=\; (\,\{q_0, q_1, q_2, q_3\},\, \{a, b\},\, \delta',\, q_0,\, \{q_3\}\,),$$

όπου δ' :

	a	b
q_0	q_1	q_0
q_1	q_2	q_0
q_2	q_3	q_0
q_3	q_3	q_3

ή



Και εδώ, κάθε αποδεκτή συμβολοσειρά περιέχει τρία συνεχόμενα a, και κάθε συμβολοσειρά που περιέχει τρία συνεχόμενα a γίνεται αποδεκτή. Μάλιστα, οι καταστάσεις του αυτόματου μπορούν να ερμηνευθούν ως εξής:

q_0: το μέρος της εισόδου που έχει διαβαστεί δεν τελειώνει σε a

q_1: το μέρος της εισόδου που έχει διαβαστεί τελειώνει σε a αλλά όχι σε aa
q_2: το μέρος της εισόδου που έχει διαβαστεί τελειώνει σε aa αλλά όχι σε aaa
q_3: το μέρος της εισόδου που έχει διαβαστεί περιέχει aaa

Σημείωση: Εάν εφαρμόσουμε στο μη ντετερμινιστικό αυτόματο M, που βρήκαμε αρχικά, τη γνωστή μεθοδολογία υπολογισμού ντετερμινιστικού αυτόματου ισοδύναμου προς δοθέν μη ντετερμινιστικό, καταλήγουμε στο εξής ντετερμινιστικό αυτόματο με 6 καταστάσεις:

$$M'' = (K'', \{a, b\}, \delta'', \{q_0\}, F''),$$

όπου

$$K'' = \Big\{ \{q_0\}, \{q_0, q_1\}, \{q_0, q_3\}, \{q_0, q_1, q_2\}, \{q_0, q_1, q_3\}, \{q_0, q_1, q_2, q_3\} \Big\}$$
$$F'' = \Big\{ \{q_0, q_3\}, \{q_0, q_1, q_3\}, \{q_0, q_1, q_2, q_3\} \Big\}$$

δ'' :

	a	b
$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0\}$
$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_0\}$
$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_3\}$
$\{q_0, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_3\}$	$\{q_0, q_3\}$
$\{q_0, q_1, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_3\}$

Άσκηση 2

Κατασκευάστε ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο το οποίο να αποδέχεται όλες τις συμβολοσειρές από το αλφάβητο $\{0, 1\}$ που ξεκινούν με 1 και είναι δυαδικές αναπαραστάσεις αριθμών πολλαπλασίων του 5.

Λύση
Η λύση βασίζεται στις εξής δυο πολύ σημαντικές παρατηρήσεις:

- ▷ Σε κάθε στιγμή της λειτουργίας του, το αυτόματο θα πρέπει να υπολογίζει κάποια πληροφορία έτσι ώστε να μπορεί να διαπιστώνει εάν το μέρος w_i της εισόδου που έχει διαβάσει ως τότε έχει δεκαδική τιμή πολλάπλάσια του 5 ή όχι. Ωστόσο, δεν μπορεί να "θυμάται/καταχωρεί" τη δεκαδική τιμή του w_i, καθώς κάτι τέτοιο θα απαιτούσε ένα μη πεπερασμένο πλήθος καταστάσεων (μία κατάσταση για κάθε μία από τις πιθανές τιμές).
  Αποδεικνύεται ότι αρκεί το αυτόματο να "θυμάται" το υπόλοιπο της διαίρεσης της δεκαδικής τιμής του w_i με το 5.

- ▷ Το αυτόματο θα πρέπει να ενημερώνει την παραπάνω πληροφορία καθώς διαβάζει τα δυαδικά ψηφία της εισόδου. Η ενημέρωση αυτής της πληροφορίας βασίζεται στην ιδιότητα ότι

  $$\text{δεκαδική\_τιμή}(b_1 b_2 \dots b_i b_{i+1}) = 2 \cdot \text{δεκαδική\_τιμή}(b_1 b_2 \dots b_i) + b_{i+1}.$$

  Έτσι, εάν το υπόλοιπο της διαίρεσης της δεκαδικής τιμής του $b_1 b_2 \dots b_i$ με το 5 είναι r, τότε το υπόλοιπο της διαίρεσης της δεκαδικής τιμής του $b_1 b_2 \dots b_i b_{i+1}$ με το 5 είναι $(2 \cdot r + b_{i+1}) \bmod 5$.

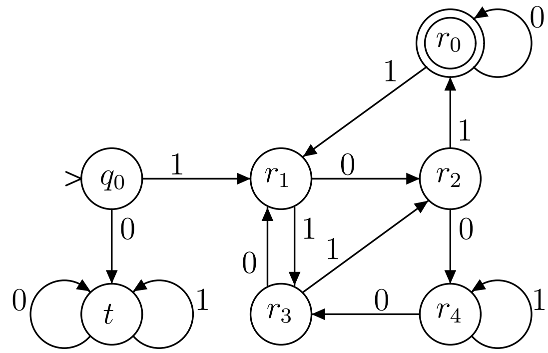
Με βάση τις παρατηρήσεις αυτές, έχουμε το ακόλουθο ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο: $M = (\{q_0, r_0, r_1, r_2, r_3, r_4, t\}, \{0,1\}, \delta, q_0, \{r_0\})$,

όπου

δ :

	0	1
q_0	t	r_1
r_0	r_0	r_1
r_1	r_2	r_3
r_2	r_4	r_0
r_3	r_1	r_2
r_4	r_3	r_4
t	t	t

ή



Οι καταστάσεις r_i $(i = 0,1,2,3,4)$ αντιστοιχούν στις περιπτώσεις όπου το υπόλοιπο της διαίρεσης με το 5 είναι ίσο με i αντίστοιχα, ενώ η κατάσταση t είναι κατάσταση αδιεξόδου, στην οποία μπαίνει (και παραμένει) το αυτόματο εάν η είσοδος ξεκινά με 0.

Άσκηση 3

Κατασκευάστε πεπερασμένο αυτόματο το οποίο να αποδέχεται όλες τις συμβολοσειρές από το αλφάβητο $\{a, b\}$ στις οποίες το 10ο σύμβολο από το τέλος είναι b.
Πως θα ήταν *σε γενικές γραμμές* το αντίστοιχο ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο;

Λύση

Η άσκηση αυτή είναι γενίκευση του αυτόματου που αποδέχεται όλες τις συμβολοσειρές από το αλφάβητο $\{a, b\}$ που τελειώνουν σε b, το οποίο είδαμε στη θεωρία. Για να εξασφαλίσουμε ότι οι αποδεκτές συμβολοσειρές έχουν το 10ο σύμβολό τους από το τέλος ίσο με b, φροντίζουμε από μια κατάσταση, έστω q, να υπάρχει μία μετάβαση για b που μας οδηγεί σε μια άλλη κατάσταση από την οποία με ακριβώς 9 μεταβάσεις (για a ή b) οδηγούμαστε στη (μοναδική) τελική κατάσταση του αυτόματου (από την οποία δεν υπάρχουν μεταβάσεις): οι 10 αυτές μεταβάσεις εκτελούνται για τα 10 τελευταία σύμβολα της εισόδου. Απομένει να φροντίσουμε να "καταναλώσουμε" όσα τυχόν σύμβολα προηγούνται των 10 τελευταίων συμβόλων: αρκεί να κάνουμε την q αρχική κατάσταση και να βάλουμε μεταβάσεις-βρόχους (από την q στον εαυτό της) τόσο για a όσο και για b. Έτσι, καταλήγουμε στο εξής (μη ντετερμινιστικό) αυτόματο:

$$M = (\{q_0, q_1, \ldots, q_9, q_{10}\}, \{a, b\}, \Delta, q_0, \{q_{10}\}),$$

όπου

$$\Delta = \Big\{ (q_0, a, q_0), (q_0, b, q_0), (q_0, b, q_1) \Big\} \cup \Big\{ (q_i, a, q_{i+1}), (q_i, b, q_{i+1}) \mid \forall\, i = 1, 2, \ldots, 9 \Big\}.$$

Το ισοδύναμο *ντετερμινιστικό* πεπερασμένο αυτόματο θα πρέπει να "θυμάται" τα τελευταία 10 σύμβολα που έχει διαβάσει έτσι ώστε να μπορεί να κάνει τις σωστές μεταβάσεις και να αποδεχθεί ή όχι τη συμβολοσειρά εισόδου. Δηλαδή, οι μεταβάσεις θα είναι της μορφής

$$\delta(\langle \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_5\sigma_6\sigma_7\sigma_8\sigma_9\sigma_{10}\rangle, \sigma) = \langle \sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_5\sigma_6\sigma_7\sigma_8\sigma_9\sigma_{10}\sigma\rangle$$

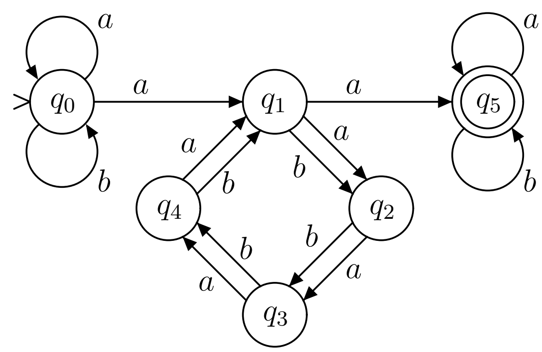
όπου $\sigma_i, \sigma \in \{a, b\}$ (π.χ., $\delta(\langle abaabaaaba\rangle, b) = \langle baabaaabab\rangle$). Από αυτό φαίνεται ότι ένα τέτοιο αυτόματο θα έχει *τουλάχιστον* 2^{10} καταστάσεις (μία για κάθε έναν από τους πιθανούς συνδυασμούς τιμών των 10 συμβόλων) ενώ τελικές θα είναι οι καταστάσεις που αντιστοιχούν σε συνδυασμούς με το πρώτο από τα 10 σύμβολα ίσο με b (δηλαδή, θα υπάρχουν συνολικά 2^9 τελικές καταστάσεις). (Αυτό το παράδειγμα δείχνει με τον πιο χαρακτηριστικό τρόπο πόσο απλούστερο μπορεί να είναι ένα μη ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο σε σχέση με το ισοδύναμο ντετερμινιστικό.)

Άσκηση 4

Κατασκευάστε πεπερασμένο αυτόματο το οποίο να αποδέχεται όλες τις συμβολοσειρές από το αλφάβητο $\{a, b\}$ που περιέχουν δύο a που χωρίζονται από μια υποσυμβολοσειρά μήκους $4i$ $(i \geq 0)$.

Λύση

Η καθοριστική παρατήρηση είναι ότι για να μπορεί να εξασφαλιστεί ότι το μήκος μιας υποσυμβολοσειράς είναι $4i$ $(i \geq 0)$, το διάγραμμα καταστάσεων του αυτόματου θα πρέπει να περιέχει έναν κύκλο 4 καταστάσεων, καθεμία από τις οποίες έχει μεταβάσεις για a και b προς την επόμενη κατάσταση στον κύκλο. Με βάση τον ορισμό της επιθυμητής γλώσσας, μπορούμε να κατασκευάσουμε το διάγραμμα καταστάσεων του διπλανού σχήματος.



Οι βρόχοι για a και b στις καταστάσεις q_0 και q_5 χρησιμεύουν για την "κατανάλωση" των συμβόλων της συμβολοσειράς πριν το πρώτο και μετά το δεύτερο από τα δύο a που χωρίζονται από την υποσυμβολοσειρά μήκους $4i$. Παρατηρήστε ότι το συγκεκριμένο αυτόματο αποδέχεται όλες τις συμβολοσειρές που έχουν δύο συνεχόμενα a, όπως θα έπρεπε.

Άσκηση 5

Κατασκευάστε ντετερμινιστικά πεπερασμένα αυτόματα ισοδύναμα με τα μη ντετερμινιστικά πεπερασμένα αυτόματα

(α) $M_1 = (\{p, q, r, s\},\ \{a, b\},\ \Delta_1,\ p,\ \{s\})$
όπου η σχέση μετάβασης Δ_1 είναι
$\Delta_1 = \{\, (p, a, p),\ (p, a, q),\ (p, b, p),\ (q, a, r),\ (q, b, r),\ (r, a, s),\ (s, a, s),\ (s, b, s) \,\}$.

(β) $M_2 = (\{p, q, r, s\},\ \{a, b\},\ \Delta_2,\ p,\ \{q, s\})$
όπου η σχέση μετάβασης Δ_2 είναι
$\Delta_2 = \{\, (p, a, q),\ (p, a, s),\ (p, b, q),\ (p, e, s),\ (q, b, q),$
$(r, a, q),\ (r, b, p),\ (s, a, r),\ (s, b, p),\ (s, b, r),\ (s, e, r) \,\}$.

Λύση

Εφαρμόζουμε τη μεθοδολογία που περιγράφεται στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.1 του συγγράμματος, όπου όμως αντί να θεωρήσουμε μια κατάσταση στο ντετερμινιστικό αυτόματο για κάθε υποσύνολο καταστάσεων του μη ντετερμινιστικού, ξεκινάμε από το σύνολο καταστάσεων $E(p)$ που αντιστοιχεί στην αρχική κατάσταση p του μη ντετερμινιστικού και θεωρούμε μόνο τις καταστάσεις που προκύπτουν (όπως στο Παράδειγμα 2.2.4).

(α) Το δοθέν μη ντετερμινιστικό αυτόματο δεν έχει μεταβάσεις για e και συνεπώς $E(p) = \{p\}$, $E(q) = \{q\}$, $E(r) = \{r\}$, $E(s) = \{s\}$. Το ντετερμινιστικό αυτόματο που προκύπτει είναι $M_1' = (K_1', \{a, b\}, \delta_1', \{p\}, F_1')$, όπου

δ_1' :

	a	b
$\{p\}$	$\{p, q\}$	$\{p\}$
$\{p, q\}$	$\{p, q, r\}$	$\{p, r\}$
$\{p, q, r\}$	$\{p, q, r, s\}$	$\{p, r\}$
$\{p, r\}$	$\{p, q, s\}$	$\{p\}$
$\{p, q, r, s\}$	$\{p, q, r, s\}$	$\{p, r, s\}$
$\{p, q, s\}$	$\{p, q, r, s\}$	$\{p, r, s\}$
$\{p, r, s\}$	$\{p, q, s\}$	$\{p, s\}$
$\{p, s\}$	$\{p, q, s\}$	$\{p, s\}$

και

$$K_1' = \Big\{ \{p\}, \{p,q\}, \{p,r\}, \{p,s\}, \{p,q,r\}, \{p,q,s\}, \{p,r,s\}, \{p,q,r,s\} \Big\},$$
$$F_1' = \Big\{ \{p,s\}, \{p,q,s\}, \{p,r,s\}, \{p,q,r,s\} \Big\}.$$

(β) Αρχίζουμε υπολογίζοντας τα σύνολα $E(\ )$ για καθεμία από τις καταστάσεις του δοθέντος αυτόματου. Συγκεκριμένα, έχουμε:

$$E(p) = \{p, r, s\},$$
$$E(q) = \{q\},$$
$$E(r) = \{r\},$$
$$E(s) = \{r, s\}.$$

Το ντετερμινιστικό αυτόματο που προκύπτει είναι $M_2' = (K_2', \{a, b\}, \delta_2', \{p, r, s\}, F_2')$, όπου

δ_2' :

	a	b
$\{p, r, s\}$	$\{q, r, s\}$	$\{p, q, r, s\}$
$\{q, r, s\}$	$\{q, r\}$	$\{p, q, r, s\}$
$\{p, q, r, s\}$	$\{q, r, s\}$	$\{p, q, r, s\}$
$\{q, r\}$	$\{q\}$	$\{p, q, r, s\}$
$\{q\}$	$\emptyset$	$\{q\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

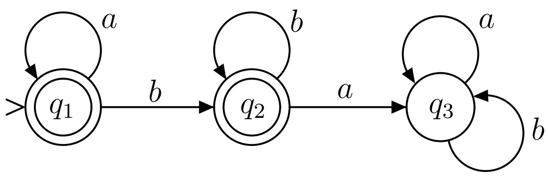
και

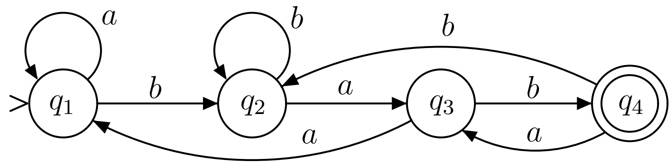
$$K_2' = \Big\{ \{q\}, \{q,r\}, \{p,r,s\}, \{q,r,s\}, \{p,q,r,s\}, \emptyset \Big\},$$
$$F_2' = \Big\{ \{q\}, \{q,r\}, \{p,r,s\}, \{q,r,s\}, \{p,q,r,s\} \Big\}.$$

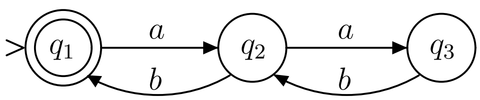
(Από το ντετερμινιστικό αυτόματο μπορούμε να δούμε ότι τα αυτόματα M_2 και M_2' αποδέχονται όλες τις συμβολοσειρές από a και b οι οποίες δεν περιέχουν a δεξιότερα από aaa. Δηλαδή, τα M_2 και M_2' αποδέχονται τις συμβολοσειρές $babaaabbb$, $babaabaaabbbb$, αλλά όχι τις $babaaaabbb$, $babaabaaabbbba$, $aaaabaabbb$.)

Άσκηση 6

Περιγράψτε τη γλώσσα που αποδέχεται καθένα από τα τρία πεπερασμένα αυτόματα που δίνονται παρακάτω (αλφάβητο $\Sigma = \{a, b\}$).

(α) 

(β) 

(γ) 

Λύση

Η γλώσσα που αποδέχεται ένα αυτόματο είναι το σύνολο των συμβολοσειρών που ορίζουν διαδρομές στο διάγραμμα καταστάσεων από την αρχική σε κάποια τελική κατάσταση του αυτόματου. Επίσης, είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι, εάν το αυτόματο είναι ντετερμινιστικό (όπως συμβαίνει στις περιπτώσεις (α) και (β) της Άσκησης), τότε για κάθε συμβολοσειρά υπάρχει ακριβώς μία διαδρομή στο διάγραμμα καταστάσεων με αφετηρία την αρχική κατάσταση.

(α) Από το διάγραμμα καταστάσεων γίνεται φανερό ότι οι συμβολοσειρές που ορίζουν διαδρομές από την αρχική κατάσταση q_1 στην q_1 είναι συμβολοσειρές που αποτελούνται από μηδέν, ένα, ή περισσότερα a. Αντίστοιχα, οι συμβολοσειρές που ορίζουν διαδρομές από την q_1 στην q_2 είναι συμβολοσειρές που αποτελούνται από a ακολουθούμενα από ένα ή περισσότερα b. Άρα, η γλώσσα του αυτόματου είναι

$$L_{(\alpha)} \;=\; \Big\{ w \mid w \in \{a,b\}^* \;\text{ και }\; \text{όλα τα } a \text{ στην } w \text{ βρίσκονται πριν από όλα τα } b \Big\}.$$

Επειδή το δοθέν αυτόματο είναι ντετερμινιστικό, η γλώσσα που αυτό αποδέχεται είναι επίσης το σύνολο των συμβολοσειρών από a και b εκτός από αυτές που ορίζουν διαδρομές από την αρχική κατάσταση q_1 στις *μη τελικές* καταστάσεις του αυτόματου. Συνεπώς αρκεί να βρούμε ποιες συμβολοσειρές ορίζουν διαδρομές από την q_1 στην q_3. Παρατηρούμε ότι η q_3 είναι κατάσταση αδιεξόδου στην οποία εισέρχεται το αυτόματο εάν συναντήσει το σύμβολο a όταν βρίσκεται στην q_2, ενώ επίσης για να βρεθεί το αυτόματο στην q_2 ακολουθεί μετάβαση για b είτε από την q_1 είτε από την q_2. Από τα παραπάνω φαίνεται ότι κάθε συμβολοσειρά που ορίζει διαδρομή από την q_1 στην q_3 θα πρέπει να περιέχει το ba. Μπορούμε να δείξουμε και το αντίθετο, δηλαδή, ότι για κάθε συμβολοσειρά που περιέχει το ba το αυτόματο μεταβαίνει από την q_1 στην q_3: πράγματι, για μια τέτοια συμβολοσειρά, το αυτόματο για το αριστερότερο b εισέρχεται στην κατάσταση q_2, για τα b που ενδεχομένως ακολουθούν παραμένει στην q_2, ενώ για το πρώτο a που θα συναντήσει στη συνέχεια εισέρχεται στην q_3 όπου και παραμένει οποιαδήποτε σύμβολα και αν ακολουθήσουν (σημειώστε ότι μια συμβολοσειρά που περιέχει ba περιέχει ένα a δεξιότερα από το αριστερότερο b). Από τα παραπάνω καταλήγουμε σε έναν διαφορετικό αλλά ισοδύναμο ορισμό της γλώσσας $L_{(\alpha)}$:

$$L_{(\alpha)} = \Big\{ w \mid w \in \{a,b\}^* \;\; \text{και} \;\; \text{η συμβολοσειρά } w \text{ δεν περιέχει το } ba \Big\}.$$

(β) Και στην περίπτωση αυτή το αυτόματο είναι ντετερμινιστικό. Από το διάγραμμα καταστάσεων παρατηρούμε ότι για να μπει το αυτόματο στη (μοναδική) τελική κατάσταση q_4 θα πρέπει να ακολουθήσει μετάβαση για b από την q_3, στην οποία μπαίνει ακολουθώντας μετάβαση για a από την q_2 ή την q_4, στις οποίες μπαίνει ακολουθώντας μεταβάσεις για b. Άρα, κάθε συμβολοσειρά που ορίζει διαδρομή από την αρχική κατάσταση q_1 στην τελική q_4 θα πρέπει να τελειώνει σε bab. Μπορούμε να δείξουμε και το αντίθετο, δηλαδή, ότι κάθε συμβολοσειρά που τελειώνει σε bab οδηγεί από την q_1 στην q_4. Έστω $xbab$ μια τέτοια συμβολοσειρά, όπου $x \in \{a,b\}^*$ είναι το πρόθεμα της συμβολοσειράς που προκύπτει εάν από τη συμβολοσειρά αφαιρέσουμε την κατάληξη bab (το x μπορεί να είναι η κενή συμβολοσειρά e ή οποιαδήποτε συμβολοσειρά από a και/ή b). Τότε, εάν το αυτόματο ξεκινήσει από την αρχική κατάσταση q_1 για το πρόθεμα x θα καταλήξει σε κάποια από τις τέσσερις καταστάσεις q_1, q_2, q_3, q_4. Καθώς, για την υποσυμβολοσειρά bab, όταν το αυτόματο ξεκινήσει από οποιαδήποτε από αυτές τις καταστάσεις καταλήγει στην q_4 (για παράδειγμα, από την q_3 με b παμε στην q_4, από εκεί με a επιστρέφουμε στην q_3, και από εκεί με b καταλήγουμε στην q_4), συμπεραίνουμε ότι κάθε συμβολοσειρά που τελειώνει σε bab οδηγεί από την q_1 στην q_4. Συνεπώς,

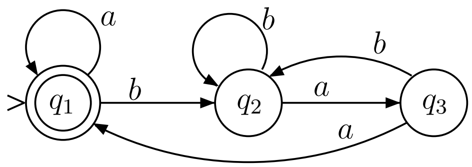
$$L_{(\beta)} = \Big\{ w \mid w \in \{a,b\}^* \;\; \text{και} \;\; \text{η συμβολοσειρά } w \text{ τελειώνει σε } bab \Big\}.$$

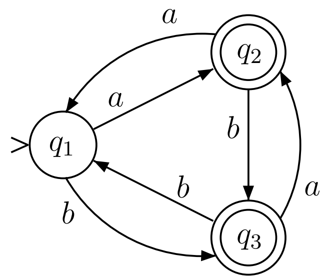
(γ) Σε αυτήν την περίπτωση, το αυτόματο είναι μη ντετερμινιστικό (ένα ισοδύναμο ντετερμινιστικό αυτόματο προκύπτει εάν προσθέσουμε μία κατάσταση αδιεξόδου t και βάλουμε μεταβάσεις από την q_1 και την q_3 στην t για b και a αντίστοιχα). Με βάση το διάγραμμα καταστάσεων και το γεγονός ότι τελική κατάσταση είναι η q_1 συμπεραίνουμε ότι οι αποδεκτές συμβολοσειρές έχουν ίσο πλήθος από a και b. Επιπρόσθετα, η μετάβαση από την q_1 για b στην κατάσταση αδιεξόδου t συνεπάγεται ότι συμβολοσειρές στις οποίες κάποιο πρόθεμα περιέχει περισσότερα b από a δεν γίνονται αποδεκτές. Αντίστοιχα, η μετάβαση από την q_3 για a στην t συνεπάγεται ότι συμβολοσειρές στις οποίες κάποιο πρόθεμα περιέχει πλήθος a κατά τουλάχιστον 3 μεγαλύτερο από το πλήθος των b δεν γίνονται αποδεκτές. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} L_{(\gamma)} = \Big\{ w \mid w \in \{a,b\}^* \;\; & \text{και} \\ & (\text{πλήθος } a \text{ στην } w) = (\text{πλήθος } b \text{ στην } w) \quad \text{και} \\ & \text{σε κάθε πρόθεμα } x \text{ της } w: \\ & \quad (\text{πλήθος } b \text{ στην } x) \leq (\text{πλήθος } a \text{ στην } x) \leq (\text{πλήθος } b \text{ στην } x) + 2 \Big\}. \end{aligned}$$

Άσκηση 7

Κατασκευάστε κανονικές εκφράσεις για τις γλώσσες που γίνονται αποδεκτές από καθένα από τα αυτόματα με τα εξής διαγράμματα καταστάσεων:

(α) 

(β) 

Λύση

Ονομάζουμε τις καταστάσεις των αυτομάτων q_1, q_2 και q_3, και εφαρμόζουμε τις μεθόδους που περιγράφονται στην Παράγραφο 2.3 του συγγράμματος (με $r_{i,j}(k)$ συμβολίζουμε την κανονική έκφραση για τις συμβολοσειρές του συνόλου $R(i,j,k)$). Οι απλοποιημένες μορφές των κανονικών εκφράσεων που δίνουμε παρακάτω έχουν προκύψει με εφαρμογή των εξής ταυτοτήτων που ισχύουν για οποιαδήποτε κανονική έκφραση r:

$$(\emptyset^* \cup r)^* = r^* \qquad r\emptyset = \emptyset r = \emptyset \qquad r \cup \emptyset = \emptyset \cup r = r$$
$$(\emptyset^* \cup r)\, r^* = r^*\, (\emptyset^* \cup r) = r^* \qquad (rr)^*\, (\emptyset^* \cup r) = (\emptyset^* \cup r)\, (rr)^* = r^*$$

(α) Για να εργαστούμε με τα σύνολα $R(i,j,k)$, καταστρώνουμε τον εξής πίνακα:

	$k=0$	$k=1$
$r_{1,1}(k)$	$\emptyset^* \cup \mathrm{a}$	$(\emptyset^* \cup \mathrm{a}) \cup (\emptyset^* \cup \mathrm{a})(\emptyset^* \cup \mathrm{a})^*(\emptyset^* \cup \mathrm{a}) = (\emptyset^* \cup \mathrm{a}) \cup (\emptyset^* \cup \mathrm{a})\mathrm{a}^*(\emptyset^* \cup \mathrm{a}) = \mathrm{a}^*$
$r_{1,2}(k)$	b	$\mathrm{b} \cup (\emptyset^* \cup \mathrm{a})(\emptyset^* \cup \mathrm{a})^* \mathrm{b} = \mathrm{b} \cup (\emptyset^* \cup \mathrm{a})\mathrm{a}^* \mathrm{b} = \mathrm{a}^*\mathrm{b}$
$r_{1,3}(k)$	$\emptyset$	$\emptyset \cup (\emptyset^* \cup \mathrm{a})(\emptyset^* \cup \mathrm{a})^* \emptyset = \emptyset \cup (\emptyset^* \cup \mathrm{a})\mathrm{a}^* \emptyset = \emptyset$
$r_{2,1}(k)$	$\emptyset$	$\emptyset \cup \emptyset (\emptyset^* \cup \mathrm{a})^*(\emptyset^* \cup \mathrm{a}) = \emptyset \cup \emptyset \mathrm{a}^*(\emptyset^* \cup \mathrm{a}) = \emptyset$
$r_{2,2}(k)$	$\emptyset^* \cup \mathrm{b}$	$(\emptyset^* \cup \mathrm{b}) \cup \emptyset (\emptyset^* \cup \mathrm{a})^* \mathrm{b} = (\emptyset^* \cup \mathrm{b}) \cup \emptyset \mathrm{a}^* \mathrm{b} = \emptyset^* \cup \mathrm{b}$
$r_{2,3}(k)$	a	$\mathrm{a} \cup \emptyset (\emptyset^* \cup \mathrm{a})^* \emptyset = \mathrm{a} \cup \emptyset \mathrm{a}^* \emptyset = \mathrm{a}$
$r_{3,1}(k)$	a	$\mathrm{a} \cup \mathrm{a} (\emptyset^* \cup \mathrm{a})^*(\emptyset^* \cup \mathrm{a}) = \mathrm{a} \cup \mathrm{a} \mathrm{a}^*(\emptyset^* \cup \mathrm{a}) = \mathrm{a}^*\mathrm{a}$
$r_{3,2}(k)$	b	$\mathrm{b} \cup \mathrm{a} (\emptyset^* \cup \mathrm{a})^* \mathrm{b} = \mathrm{b} \cup \mathrm{a} \mathrm{a}^* \mathrm{b} = \mathrm{a}^*\mathrm{b}$
$r_{3,3}(k)$	$\emptyset^*$	$\emptyset^* \cup \mathrm{a} (\emptyset^* \cup \mathrm{a})^* \emptyset = \emptyset^* \cup \mathrm{a} \mathrm{a}^* \emptyset = \emptyset^*$

Καθώς το αυτόματο έχει για αρχική κατάσταση την q_1 και για μοναδική τελική κατάσταση επίσης την q_1, η κανονική έκφραση για τη γλώσσα που αποδέχεται το αυτόματο είναι η

$$r_{1,1}(3) \;=\; r_{1,1}(2) \;\cup\; r_{1,3}(2)\left(r_{3,3}(2)\right)^* r_{3,1}(2).$$

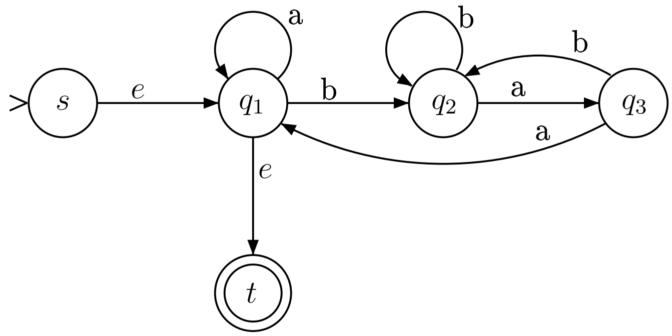
Συνεπώς, για $k=2$, αρκεί να υπολογίσουμε μόνο τις εκφράσεις $r_{1,1}(2)$, $r_{1,3}(2)$, $r_{3,1}(2)$ και $r_{3,3}(2)$. Με βάση τη στήλη του πίνακα για $k=1$ έχουμε:

$$r_{1,1}(2) = r_{1,1}(1) \cup r_{1,2}(1)(r_{2,2}(1))^* r_{2,1}(1) = \mathrm{a}^* \cup \mathrm{a}^*\mathrm{b}(\emptyset^* \cup \mathrm{b})^*\emptyset = \mathrm{a}^*$$
$$r_{1,3}(2) = r_{1,3}(1) \cup r_{1,2}(1)(r_{2,2}(1))^* r_{2,3}(1) = \emptyset \cup \mathrm{a}^*\mathrm{b}(\emptyset^* \cup \mathrm{b})^*\mathrm{a} = \mathrm{a}^*\mathrm{b}\mathrm{b}^*\mathrm{a}$$
$$r_{3,1}(2) = r_{3,1}(1) \cup r_{3,2}(1)(r_{2,2}(1))^* r_{2,1}(1) = \mathrm{a}^*\mathrm{a} \cup \mathrm{a}^*\mathrm{b}(\emptyset^* \cup \mathrm{b})^*\emptyset = \mathrm{a}^*\mathrm{a}$$
$$r_{3,3}(2) = r_{3,3}(1) \cup r_{3,2}(1)(r_{2,2}(1))^* r_{2,3}(1) = \emptyset^* \cup \mathrm{a}^*\mathrm{b}(\emptyset^* \cup \mathrm{b})^*\mathrm{a} = \emptyset^* \cup \mathrm{a}^*\mathrm{b}\mathrm{b}^*\mathrm{a}$$

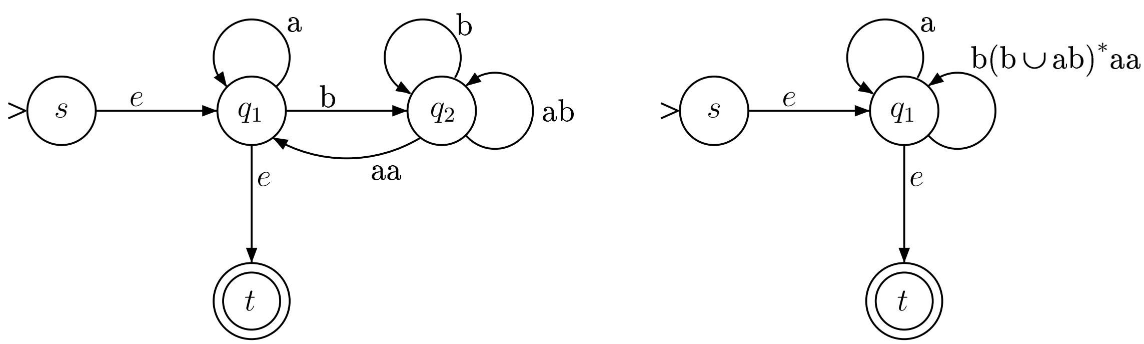
Συνεπώς, η ζητούμενη κανονική έκφραση είναι

$$r_{1,1}(3) \;=\; \mathrm{a}^* \cup \mathrm{a}^*\mathrm{b}\mathrm{b}^*\mathrm{a}\,(\varnothing^* \cup \mathrm{a}^*\mathrm{b}\mathrm{b}^*\mathrm{a})^*\,\mathrm{a}^*\mathrm{a} \;=\; \mathrm{a}^* \cup \mathrm{a}^*\mathrm{b}\mathrm{b}^*\mathrm{a}\,(\mathrm{a}^*\mathrm{b}\mathrm{b}^*\mathrm{a})^*\,\mathrm{a}^*\mathrm{a}.$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να εξαγάγουμε την κανονική έκφραση με "απλοποίηση" του διαγράμματος καταστάσεων του δοθέντος αυτομάτου. Συγκεκριμένα, πρώτα φροντίζουμε ώστε να υπάρχει μία μόνο τελική κατάσταση καθώς και να μην υπάρχουν μεταβάσεις ούτε προς την αρχική κατάσταση ούτε από την τελική κατάσταση. Τότε, το αυτόματο που προκύπτει είναι:



Κατόπιν, διαγράφοντας τις καταστάσεις q_3 και q_2 κατά σειράν, έχουμε:



οπότε μια κανονική έκφραση για τη γλώσσα που δέχεται το αυτόματο είναι

$$r_{(\alpha)} \;=\; (\mathrm{a} \cup \mathrm{b}(\mathrm{b}\cup\mathrm{ab})^*\mathrm{aa})^*.$$

(β) Και πάλι, για να εργαστούμε με τα σύνολα $R(i,j,k)$, καταστρώνουμε τον εξής πίνακα:

	$k=0$	$k=1$	$k=2$
$r_{1,1}(k)$	$\varnothing^*$	$\varnothing^* \cup \varnothing^*(\varnothing^*)^*\varnothing^* = \varnothing^*$	$\varnothing^* \cup \mathrm{a}\,(\mathrm{aa})^*\,\mathrm{a} = (\mathrm{aa})^*$
$r_{1,2}(k)$	a	$\mathrm{a} \cup \varnothing^*(\varnothing^*)^*\mathrm{a} = \mathrm{a}$	$\mathrm{a} \cup \mathrm{a}\,(\mathrm{aa})^*(\varnothing^* \cup \mathrm{aa}) = \mathrm{a}\,(\mathrm{aa})^*$
$r_{1,3}(k)$	b	$\mathrm{b} \cup \varnothing^*(\varnothing^*)^*\mathrm{b} = \mathrm{b}$	$\mathrm{b} \cup \mathrm{a}\,(\mathrm{aa})^*\,(\mathrm{b}\cup\mathrm{ab}) = \mathrm{a}^*\,\mathrm{b}$
$r_{2,1}(k)$	a	$\mathrm{a} \cup \mathrm{a}\,(\varnothing^*)^*\varnothing^* = \mathrm{a}$	$\mathrm{a} \cup (\varnothing^* \cup \mathrm{aa})(\mathrm{aa})^*\,\mathrm{a} = (\mathrm{aa})^*\,\mathrm{a}$
$r_{2,2}(k)$	$\varnothing^*$	$\varnothing^* \cup \mathrm{a}\,(\varnothing^*)^*\mathrm{a} = \varnothing^* \cup \mathrm{aa}$	$(\varnothing^* \cup \mathrm{aa}) \cup (\varnothing^* \cup \mathrm{aa})(\mathrm{aa})^*(\varnothing^* \cup \mathrm{aa}) = (\mathrm{aa})^*$
$r_{2,3}(k)$	b	$\mathrm{b} \cup \mathrm{a}\,(\varnothing^*)^*\mathrm{b} = \mathrm{b}\cup\mathrm{ab}$	$(\mathrm{b}\cup\mathrm{ab}) \cup (\varnothing^* \cup \mathrm{aa})(\mathrm{aa})^*\,(\mathrm{b}\cup\mathrm{ab}) = \mathrm{a}^*\,\mathrm{b}$
$r_{3,1}(k)$	b	$\mathrm{b} \cup \mathrm{b}\,(\varnothing^*)^*\varnothing^* = \mathrm{b}$	$\mathrm{b} \cup (\mathrm{a}\cup\mathrm{ba})\,(\mathrm{aa})^*\,\mathrm{a} = (\mathrm{aa}\cup\mathrm{b})\,(\mathrm{aa})^*$
$r_{3,2}(k)$	a	$\mathrm{a} \cup \mathrm{b}\,(\varnothing^*)^*\mathrm{a} = \mathrm{a}\cup\mathrm{ba}$	$(\mathrm{a}\cup\mathrm{ba}) \cup (\mathrm{a}\cup\mathrm{ba})\,(\mathrm{aa})^*(\varnothing^* \cup \mathrm{aa}) = (\mathrm{a}\cup\mathrm{ba})\,(\mathrm{aa})^*$
$r_{3,3}(k)$	$\varnothing^*$	$\varnothing^* \cup \mathrm{b}\,(\varnothing^*)^*\mathrm{b} = \varnothing^* \cup \mathrm{bb}$	$(\varnothing^* \cup \mathrm{bb}) \cup (\mathrm{a}\cup\mathrm{ba})\,(\mathrm{aa})^*\,(\mathrm{b}\cup\mathrm{ab}) = \varnothing^* \cup (\mathrm{a}\cup\mathrm{b})\,\mathrm{a}^*\,\mathrm{b}$

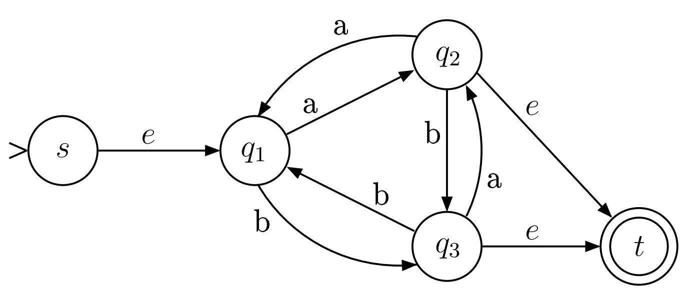
Η κανονική έκφραση για τη γλώσσα που αποδέχεται το αυτόματο (αρχική κατάσταση η q_1, τελικές καταστάσεις οι q_2 και q_3) είναι η

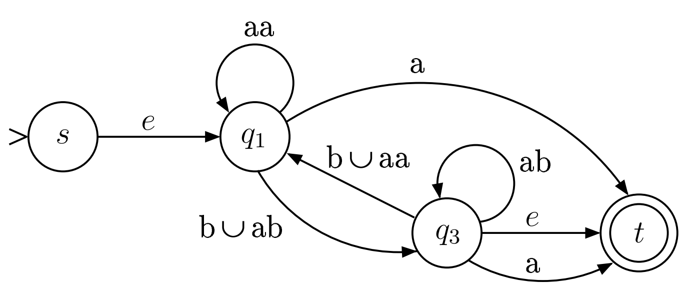
$$
\begin{aligned}
r_{(\beta)} &= r_{1,2}(3) \cup r_{1,3}(3) \\
&= \Big[r_{1,2}(2) \ \cup \ r_{1,3}(2) \left(r_{3,3}(2)\right)^* r_{3,2}(2)\Big] \ \cup \ \Big[r_{1,3}(2) \ \cup \ r_{1,3}(2) \left(r_{3,3}(2)\right)^* r_{3,3}(2)\Big] \\
&= \Big[r_{1,2}(2) \ \cup \ r_{1,3}(2) \left(r_{3,3}(2)\right)^* r_{3,2}(2)\Big] \ \cup \ \Big[r_{1,3}(2) \left(r_{3,3}(2)\right)^*\Big] \\
&= r_{1,2}(2) \ \cup \ r_{1,3}(2) \left(r_{3,3}(2)\right)^* \left(r_{3,2}(2) \ \cup \ \varnothing^*\right)
\end{aligned}
$$

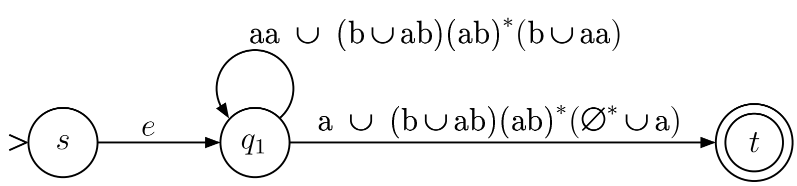
οπότε αρκεί να αντικαταστήσουμε σε αυτή τη σχέση τις εκφράσεις που βρήκαμε για τις $r_{1,2}(2)$, $r_{1,3}(2)$, $r_{3,2}(2)$ και $r_{3,3}(2)$:

$$
\begin{aligned}
r_{(\beta)} &= \mathrm{a}\,(\mathrm{aa})^* \ \cup \ \mathrm{a}^*\,\mathrm{b}\left(\varnothing^* \cup (\mathrm{a}\cup\mathrm{b})\,\mathrm{a}^*\,\mathrm{b}\right)^* \left((\mathrm{a}\cup\mathrm{ba})\,(\mathrm{aa})^* \cup \varnothing^*\right) \\
&= \mathrm{a}\,(\mathrm{aa})^* \ \cup \ \mathrm{a}^*\,\mathrm{b}\left((\mathrm{a}\cup\mathrm{b})\,\mathrm{a}^*\,\mathrm{b}\right)^* \left((\mathrm{a}\cup\mathrm{ba})\,(\mathrm{aa})^* \cup \varnothing^*\right)
\end{aligned}
$$

Και σε αυτήν την περίπτωση επίσης, εναλλακτικά, μπορούμε να εξαγάγουμε την κανονική έκφραση με “απλοποίηση” του διαγράμματος καταστάσεων του δοθέντος αυτομάτου. Αφού φροντίσουμε ώστε να υπάρχει μία μόνο τελική κατάσταση καθώς και να μην υπάρχουν μεταβάσεις ούτε προς την αρχική κατάσταση ούτε από την τελική κατάσταση, διαγράφουμε κατά σειράν τις καταστάσεις q_2 και q_3:







από όπου καταλήγουμε στην κανονική έκφραση

$$
r_{(\beta)} = \left(\mathrm{aa}\cup(\mathrm{b}\cup\mathrm{ab})(\mathrm{ab})^*(\mathrm{b}\cup\mathrm{aa})\right)^*\left(\mathrm{a}\cup(\mathrm{b}\cup\mathrm{ab})(\mathrm{ab})^*(\varnothing^*\cup\mathrm{a})\right).
$$