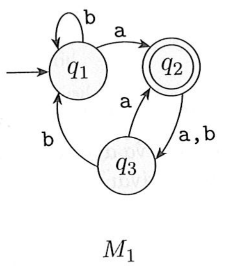
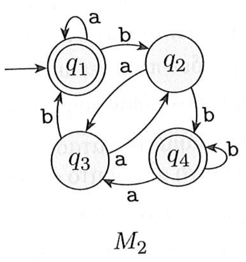
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

$^{\text{A}}$**1.1** Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζονται τα διαγράμματα καταστάσεων δυο αιτιοκρατικών αυτομάτων, M_1 και M_2. Απαντήστε τις ακόλουθες ερωτήσεις για καθεμία από τις μηχανές.





α′. Ποια είναι η εναρκτήρια κατάσταση;

β′. Ποιο είναι το σύνολο των καταστάσεων αποδοχής;

γ′. Ποια ακολουθία καταστάσεων διατρέχει η μηχανή για είσοδο aabb;

δ′. Αποδέχεται η μηχανή τη συμβολοσειρά aabb;

ε′. Αποδέχεται η μηχανή τη συμβολοσειρά ε;

$^{\wedge}$1.2 Ποια είναι η τυπική περιγραφή των μηχανών M_1 και M_2 της Άσκησης 1.1;

1.3 Η τυπική περιγραφή ενός DFA M είναι $(\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, \{\mathrm{u}, \mathrm{d}\}, \delta, q_3, \{q_3\})$, όπου δ η συνάρτηση που παρατίθεται στον παρακάτω πίνακα. Σχεδιάστε το διάγραμμα καταστάσεων του M.

	u	d
q_1	q_1	q_2
q_2	q_1	q_3
q_3	q_2	q_4
q_4	q_3	q_5
q_5	q_4	q_5

1.4 Καθεμία από τις παρακάτω γλώσσες αποτελεί την τομή δύο απλούστερων γλωσσών. Για κάθε σκέλος, κατασκευάστε δύο DFA που να αναγνωρίζουν τις απλούστερες αυτές γλώσσες. Στη συνέχεια, εφαρμόζοντας σε αυτά την κατασκευή που υποδεικνύεται στην Υποσημείωση 3 της σελίδας 53, σχεδιάστε το διάγραμμα καταστάσεων ενός DFA για την αρχική γλώσσα. Σε όλα τα σκέλη, $\Sigma = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}$.

α′. $\{w|$ η w έχει τουλάχιστον τρία a και τουλάχιστον δύο b$\}$

$^{\wedge}$β′. $\{w|$ η w έχει ακριβώς δύο a και τουλάχιστον δύο b$\}$

γ′. $\{w|$ η w έχει άρτιο πλήθος από a και ένα ή δύο b$\}$

$^{\wedge}$δ′. $\{w|$ η w έχει άρτιο πλήθος από a, καθένα από τα οποία ακολουθείται από τουλάχιστον ένα b$\}$

ε′. $\{w|$ η w αρχίζει από a και περιέχει το πολύ ένα b$\}$

ϛ′. $\{w|$ η w έχει περιττό πλήθος από a και τελειώνει σε b$\}$

ζ′. $\{w|$ η w έχει άρτιο μήκος και περιττό πλήθος από a$\}$

1.5 Καθεμία από τις παρακάτω γλώσσες αποτελεί το συμπλήρωμα μιας απλούστερης γλώσσας. Για κάθε σκέλος, κατασκευάστε ένα DFA για την απλούστερη αυτή γλώσσα. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας αυτό το DFA σχεδιάστε το διάγραμμα καταστάσεων ενός DFA για την αρχική γλώσσα. Σε όλα τα σκέλη, $\Sigma = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}$.

$^{\wedge}$α′. $\{w|$ η w δεν περιέχει την υποσυμβολοσειρά ab$\}$

$^{\wedge}$β′. $\{w|$ η w δεν περιέχει την υποσυμβολοσειρά baba$\}$

γ′. $\{w|$ η w δεν περιέχει καμία από τις υποσυμβολοσειρές ab και ba$\}$

δ′. $\{w|$ η w δεν ανήκει στην $\mathrm{a}^*\mathrm{b}^*\}$

ε′. $\{w|$ η w δεν ανήκει στην $(\mathrm{ab}^+)^*\}$

ϛ′. $\{w|$ η w δεν ανήκει στην $\mathrm{a}^* \cup \mathrm{b}^*\}$

ζ′. $\{w|$ η w δεν περιέχει ακριβώς δύο a$\}$

η′. $\{w|$ η w είναι διάφορη των συμβολοσειρών a και b$\}$

1.6 Σχεδιάστε διαγράμματα καταστάσεων για DFA που να αναγνωρίζουν τις παρακάτω γλώσσες. Το κοινό αλφάβητο όλων των γλωσσών είναι το $\{0, 1\}$.

α′. $\{w|$ η w αρχίζει από 1 και τελειώνει σε 0$\}$

β′. $\{w|$ η w περιέχει τουλάχιστον τρία 1$\}$

γ′. $\{w|$ η w περιέχει την υποσυμβολοσειρά 0101$\}$

δ′. $\{w|$ η w έχει μήκος τουλάχιστον 3 και το τρίτο σύμβολό της είναι το 0$\}$
ε′. $\{w|$ η w αρχίζει από 0 και έχει περιττό μήκος, ή από 1 και έχει άρτιο μήκος$\}$
ς′. $\{w|$ η w δεν περιέχει την υποσυμβολοσειρά 110$\}$
ζ′. $\{w|$ το μήκος της w είναι μικρότερο ή ίσο του 5$\}$
η′. $\{w|$ η w είναι οποιαδήποτε συμβολοσειρά πλην των 11 και 111$\}$
θ′. $\{w|$ σε κάθε περιττή θέση της w υπάρχει ένα 1$\}$
ι′. $\{w|$ η w περιέχει τουλάχιστον δύο 0 και το πολύ ένα 1$\}$
ια′. $\{\varepsilon, 0\}$
ιβ′. $\{w|$ η w περιέχει άρτιο πλήθος από 0, ή ακριβώς δύο 1$\}$
ιγ′. το κενό σύνολο
ιδ′. όλες οι συμβολοσειρές εκτός από την κενή

1.7 Σχεδιάστε διαγράμματα καταστάσεων για DFA που να αναγνωρίζουν τις παρακάτω γλώσσες και να έχουν το αναφερόμενο πλήθος καταστάσεων. Το κοινό αλφάβητο όλων των γλωσσών είναι το $\{0, 1\}$.

^α′. $\{w|$ η w τελειώνει σε 00$\}$, με 3 καταστάσεις
β′. η γλώσσα της Άσκησης 1.6γ′, με 5 καταστάσεις
γ′. η γλώσσα της Άσκησης 1.6ιβ′, με 6 καταστάσεις
δ′. $\{0\}$, με 2 καταστάσεις
ε′. $0^*1^*0^+$, με 3 καταστάσεις
^ς′. $1^*(001^+)^*$, με 3 καταστάσεις
ζ′. $\{\varepsilon\}$, με 1 κατάσταση
η′. 0^*, με 1 κατάσταση

1.8 Χρησιμοποιώντας την κατασκευή από την απόδειξη του Θεωρήματος 1.22, σχεδιάστε το διάγραμμα καταστάσεων ενός NFA που να αναγνωρίζει την ένωση των γλωσσών από τις

α′. Ασκήσεις 1.6α′ και 1.6β′.
β′. Ασκήσεις 1.6γ′ και 1.6ς′.

1.9 Χρησιμοποιώντας την κατασκευή από την απόδειξη του Θεωρήματος 1.23, σχεδιάστε το διάγραμμα καταστάσεων ενός NFA που να αναγνωρίζει τη συναρμογή των γλωσσών από τις

α′. Ασκήσεις 1.6ζ′ και 1.6θ′.
β′. Ασκήσεις 1.6β′ και 1.6ιγ′.

1.10 Χρησιμοποιώντας την κατασκευή από την απόδειξη του Θεωρήματος 1.24, σχεδιάστε το διάγραμμα καταστάσεων ενός NFA που να αναγνωρίζει το άστρο της γλώσσας από την

α′. Άσκηση 1.6β′.
β′. Άσκηση 1.6ι′.
γ′. Άσκηση 1.6ιγ′.

^1.11 Αποδείξτε ότι κάθε NFA μπορεί να μετατραπεί σε ένα ισοδύναμο NFA με μία μόνο κατάσταση αποδοχής.

1.12 Έστω $D = \{w|$ η w περιέχει άρτιο πλήθος από a, περιττό πλήθος από b, και δεν περιέχει την υποσυμβολοσειρά ab$\}$. Συντάξτε μια κανονική έκφραση που να παράγει την D, και κατασκευάστε ένα DFA πέντε καταστάσεων που να την αναγνωρίζει. (Υπόδειξη: Περιγράψτε αρχικά τη γλώσσα με απλούστερο τρόπο.)

1.13 Έστω F η γλώσσα των συμβολοσειρών από το {0,1} στις οποίες κανένα ζεύγος από 1 δεν χωρίζεται από περιττό πλήθος συμβόλων. Σχεδιάστε το διάγραμμα καταστάσεων ενός DFA με πέντε καταστάσεις που να αναγνωρίζει την F. (Υπόδειξη: Πιθανόν να σας διευκολύνει να κατασκευάσετε αρχικά ένα NFA τεσσάρων καταστάσεων για το συμπλήρωμα της F.)

1.14 α′. Δείξτε ότι, εάν ένα DFA M αναγνωρίζει μια γλώσσα B, τότε το DFA που προκύπτει από το M εάν οι καταστάσεις αποδοχής μετατραπούν σε καταστάσεις μη αποδοχής και αντιστρόφως αναγνωρίζει το συμπλήρωμα της B. Συμπεράνετε ότι η κλάση των κανονικών γλωσσών είναι κλειστή ως προς το συμπλήρωμα.

β′. Δείξτε μέσω ενός παραδείγματος ότι, εάν κάποιο NFA M αναγνωρίζει μια γλώσσα C, τότε το NFA που προκύπτει από το M εάν οι καταστάσεις αποδοχής μετατραπούν σε καταστάσεις μη αποδοχής και αντιστρόφως ενδέχεται να μην αναγνωρίζει το συμπλήρωμα της C. Είναι η κλάση των γλωσσών που αναγνωρίζονται από NFA κλειστή ως προς το συμπλήρωμα; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

1.15 Δείξτε με ένα αντιπαράδειγμα ότι η ακόλουθη κατασκευή δεν αποδεικνύει το Θεώρημα 1.24, δηλαδή την κλειστότητα της κλάσης των κανονικών γλωσσών ως προς την πράξη άστρο. Με άλλα λόγια, θα πρέπει να βρείτε ένα NFA N_1 τέτοιο ώστε το NFA N που προκύπτει από την κατασκευή να μην αναγνωρίζει την πράξη άστρο της γλώσσας του N_1.

Έστω A_1 μια κανονική γλώσσα και $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ ένα NFA που την αναγνωρίζει. Για να δείξουμε ότι η γλώσσα A_1^* είναι επίσης κανονική, κατασκευάζουμε ένα NFA $N = (Q_1, \Sigma, \delta, q_1, F)$ που να την αναγνωρίζει, ως εξής.

α′. Οι καταστάσεις του N είναι οι καταστάσεις του N_1.

β′. Η εναρκτήρια κατάσταση του N είναι η εναρκτήρια κατάσταση του N_1.

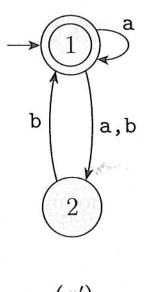
γ′. $F = F_1 \cup \{q_1\}$.
Οι καταστάσεις αποδοχής του N είναι οι παλιές καταστάσεις αποδοχής συν την εναρκτήρια κατάσταση.

δ′. Για κάθε $q \in Q_1$ και κάθε $a \in \Sigma_\varepsilon$, η συνάρτηση μεταβάσεων δ έχει ως εξής:

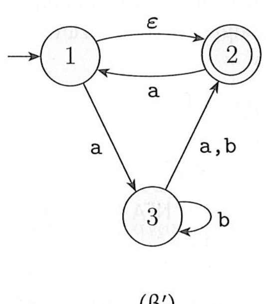
$$\delta(q,a) = \begin{cases} \delta_1(q,a) & \text{εάν } q \notin F_1 \text{ ή } a \neq \varepsilon \\ \delta_1(q,a) \cup \{q_1\} & \text{εάν } q \in F_1 \text{ και } a = \varepsilon. \end{cases}$$

(Υπόδειξη: Αναπαραστήστε αυτή την κατασκευή γραφικά, όπως στο Σχήμα 1.26.)

1.16 Χρησιμοποιώντας την κατασκευή από την απόδειξη του Θεωρήματος 1.19, μετατρέψτε τα παρακάτω NFA σε ισοδύναμα DFA.



(α′)



(β′)

1.17 α′. Παραθέστε ένα NFA που να αναγνωρίζει τη γλώσσα $(\texttt{01} \cup \texttt{001} \cup \texttt{010})^*$.

β′. Μετατρέψτε αυτό το NFA σε ισοδύναμο DFA. Παραθέστε μόνο το τμήμα του DFA που είναι προσπελάσιμο από την εναρκτήρια κατάσταση.

1.18 Συντάξτε κανονικές εκφράσεις που να παράγουν τις γλώσσες της Άσκησης 1.6.

1.19 Χρησιμοποιώντας τη διαδικασία από την απόδειξη του Λήμματος 1.29, μετατρέψτε τις παρακάτω κανονικές εκφράσεις σε NFA.

α′. $(\texttt{0} \cup \texttt{1})^*\texttt{000}(\texttt{0} \cup \texttt{1})^*$

β′. $(((\texttt{00})^*(\texttt{11})) \cup \texttt{01})^*$

γ′. $\emptyset^*$

1.20 Χρησιμοποιώντας τη διαδικασία από την απόδειξη του Θεωρήματος 1.28, μετατρέψτε τις παρακάτω κανονικές εκφράσεις σε NFA. Σε όλα τα σκέλη, $\Sigma = \{\texttt{a}, \texttt{b}\}$.

α′. $\texttt{a}(\texttt{abb})^* \cup \texttt{b}$

β′. $\texttt{a}^+ \cup (\texttt{ab})^+$

γ′. $(\texttt{a} \cup \texttt{b}^+)\texttt{a}^+\texttt{b}^+$

1.21 Για καθεμία από τις παρακάτω γλώσσες, παραθέστε δύο συμβολοσειρές που να ανήκουν και δύο συμβολοσειρές που να *μην* ανήκουν σε αυτήν -συνολικά, τέσσερεις συμβολοσειρές ανά γλώσσα. Υποθέστε ότι το κοινό αλφάβητο όλων των γλωσσών είναι το $\Sigma = \{\texttt{a}, \texttt{b}\}$.

α′. $\texttt{a}^*\texttt{b}^*$

β′. $\texttt{a}(\texttt{ba})^*\texttt{b}$

γ′. $\texttt{a}^* \cup \texttt{b}^*$

δ′. $(\texttt{aaa})^*$

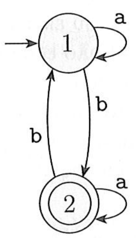
ε′. $\Sigma^*\texttt{a}\Sigma^*\texttt{b}\Sigma^*\texttt{a}\Sigma^*$

ς′. $\texttt{aba} \cup \texttt{bab}$

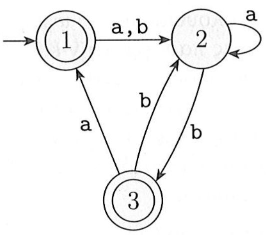
ζ′. $(\varepsilon \cup \texttt{a})\texttt{b}$

η′. $(\texttt{a} \cup \texttt{ba} \cup \texttt{bb})\Sigma^*$

1.22 Χρησιμοποιώντας τη διαδικασία από την απόδειξη του Λήμματος 1.32, μετατρέψτε τα παρακάτω πεπερασμένα αυτόματα σε κανονικές εκφράσεις.



(α′)



(β′)

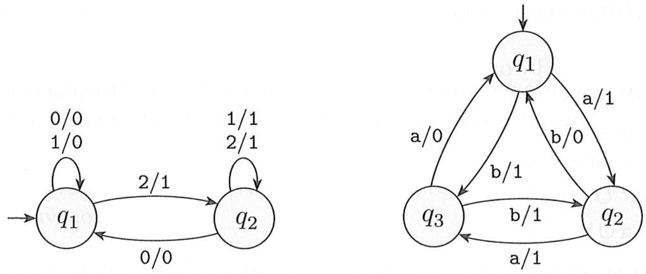
1.23 Σε ορισμένες γλώσσες προγραμματισμού, τα σχόλια τοποθετούνται ανάμεσα σε οριοθέτες, όπως οι `/#` και `#/`. Έστω C η γλώσσα που περιλαμβάνει όλες τις έγκυρα οριοθετημένες συμβολοσειρές-σχόλια. Κάθε μέλος της C θα πρέπει να ξεκινά με τα σύμβολα `/#` και να τελειώνει με τα σύμβολα `#/`, χωρίς να παρεμβάλλεται πουθενά στο ενδιάμεσο το σύμπλεγμα `#/`. Χάριν απλότητας, υποθέτουμε ότι το αλφάβητο της C είναι το $\Sigma = \{\texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{/}, \texttt{\#}\}$.

α′. Παραθέστε ένα DFA που να αναγνωρίζει τη C.

β′. Παραθέστε μια κανονική έκφραση που να παράγει τη C.

^{A}1.24 Έστω B οποιαδήποτε γλώσσα από το αλφάβητο Σ. Αποδείξτε ότι $B = B^{+}$ εάν και μόνο εάν $BB \subseteq B$.

1.25 Ένας ***μετατροπέας πεπερασμένων καταστάσεων*** (finite state transducer, για συντομία FST) είναι ένα είδος αιτιοκρατικού πεπερασμένου αυτομάτου που παράγει ως έξοδο όχι απλώς *αποδοχή* ή *απόρριψη*, αλλά μια ολόκληρη συμβολοσειρά. Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζονται τα διαγράμματα δύο μετατροπέων πεπερασμένων καταστάσεων T_1 και T_2.



T_1 T_2

Κάθε μετάβαση ενός FST επιγράφεται με δύο σύμβολα, τα οποία χωρίζονται με μια κάθετο /: το πρώτο αντιπροσωπεύει το σύμβολο εισόδου για τη συγκεκριμένη μετάβαση και το δεύτερο το σύμβολο εξόδου. Παραδείγματος χάριν, η μετάβαση από την q_1 στην q_2 στον μετατροπέα T_1 έχει ως σύμβολο εισόδου το 2 και ως σύμβολο εξόδου το 1. Ορισμένες μεταβάσεις είναι δυνατόν να έχουν περισσότερα από ένα ζεύγη εισόδου-εξόδου, όπως π.χ. η μετάβαση από την q_1 του T_1 στον εαυτό της. Όταν ένας FST υπολογίζει με είσοδο κάποια συμβολοσειρά w, λαμβάνει τα σύμβολα εισόδου $w_1 \cdots w_n$ ένα προς ένα και, με αφετηρία την εναρκτήρια κατάσταση, ακολουθεί τις μεταβάσεις των οποίων τα σύμβολα εισόδου συμπίπτουν με τα σύμβολα της ακολουθίας $w_1 \cdots w_n$. Επιπλέον, κάθε φορά που εκτελεί μια μετάβαση, ο μετατροπέας παράγει στην έξοδο το αντίστοιχο σύμβολο εξόδου. Παραδείγματος χάριν, με είσοδο 2212011, ο T_1 διατρέχει την ακολουθία καταστάσεων q_1, q_2, q_2, q_2, q_2, q_1, q_1, q_1 και παράγει την έξοδο 1111000. Αντίστοιχα, με είσοδο abbb, ο T_2 παράγει την έξοδο 1011. Για καθένα από τα παρακάτω σκέλη, παραθέστε την ακολουθία των καταστάσεων που διατρέχει ο αναφερόμενος μετατροπέας, και την έξοδο που παράγει.

- **α'.** T_1, με είσοδο 011
- **β'.** T_1, με είσοδο 211
- **γ'.** T_1, με είσοδο 121
- **δ'.** T_1, με είσοδο 0202
- **ε'.** T_2, με είσοδο b
- **ϛ'.** T_2, με είσοδο bbab
- **ζ'.** T_2, με είσοδο bbbbbb
- **η'.** T_2, με είσοδο ε

1.26 Αφού διαβάσετε τον άτυπο ορισμό του μετατροπέα πεπερασμένων καταστάσεων (FST) στην Άσκηση 1.25, διατυπώστε έναν τυπικό ορισμό του μοντέλου αυτού, κατά το πρότυπο του Ορισμού 1.1 (σελίδα 40). Υποθέστε ότι ένας FST έχει κάποιο αλφάβητο εισόδου Σ και κάποιο αλφάβητο εξόδου Γ, αλλά δεν έχει καταστάσεις αποδοχής. Διατυπώστε επίσης έναν τυπικό ορισμό για τον υπολογισμό ενός FST. (Υπόδειξη: Ένας FST είναι μια πεντάδα. Η συνάρτηση μεταβάσεών του έχει τη μορφή $\delta\colon Q \times \Sigma \longrightarrow Q \times \Gamma$.)

1.27 Χρησιμοποιώντας την απάντησή σας στην Άσκηση 1.26, παραθέστε έναν τυπικό ορισμό των μηχανών T_1 και T_2 που απεικονίζονται στην Άσκηση 1.25.

1.28 Αφού διαβάσετε τον άτυπο ορισμό του μετατροπέα πεπερασμένων καταστάσεων στην Άσκηση 1.25, σχεδιάστε το διάγραμμα καταστάσεων ενός FST με την ακόλουθη συμπεριφορά. Το αλφάβητο εισόδου και εξόδου είναι το $\{\texttt{0},\texttt{1}\}$. Η συμβολοσειρά εξόδου συμπίπτει με τη συμβολοσειρά εισόδου στις άρτιες θέσεις της και διαφέρει στις περιττές. Παραδείγματος χάριν, με είσοδο 0000111 ο μετατροπέας παράγει έξοδο 1010010.

1.29 Χρησιμοποιώντας το λήμμα της άντλησης, δείξτε ότι οι παρακάτω γλώσσες δεν είναι κανονικές.

^α′. $A_1 = \{\texttt{0}^n\texttt{1}^n\texttt{2}^n \mid n \geq 0\}$

β′. $A_2 = \{www \mid w \in \{\texttt{a},\texttt{b}\}^*\}$

^γ′. $A_3 = \{\texttt{a}^{2^n} \mid n \geq 0\}$ (όπου το $\texttt{a}^{2^n}$ αναπαριστά μια συμβολοσειρά με 2^n σύμβολα a)

1.30 Περιγράψτε το λάθος στην παρακάτω «απόδειξη» ότι η γλώσσα $\texttt{0}^*\texttt{1}^*$ δεν είναι κανονική. (Το ότι υπάρχει λάθος είναι βέβαιο, διότι η $\texttt{0}^*\texttt{1}^*$ *είναι* κανονική.) Η απόδειξη είναι δια της εις άτοπον απαγωγής. Ας υποθέσουμε ότι η $\texttt{0}^*\texttt{1}^*$ είναι κανονική, και έστω p το μήκος άντλησης που προβλέπεται από το λήμμα της άντλησης για την $\texttt{0}^*\texttt{1}^*$. Επιλέγουμε ως s τη συμβολοσειρά $\texttt{0}^p\texttt{1}^p$. Προφανώς, η s ανήκει στην $\texttt{0}^*\texttt{1}^*$ και έχει μήκος τουλάχιστον p. Ωστόσο, από το Παράδειγμα 1.38 γνωρίζουμε ότι η s δεν επιδέχεται άντληση. Άρα, καταλήγουμε σε άτοπο, και επομένως η $\texttt{0}^*\texttt{1}^*$ δεν είναι κανονική.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1.31 Η ***τέλεια ανάμειξη*** δυο γλωσσών A και B είναι η γλώσσα

$$\{w \mid w = a_1b_1\cdots a_kb_k,\ \text{όπου } a_1\cdots a_k \in A,\ b_1\cdots b_k \in B,\ \text{και κάθε } a_i, b_i \in \Sigma\}.$$

Δείξτε ότι η κλάση των κανονικών γλωσσών είναι κλειστή ως προς την τέλεια ανάμειξη.

1.32 Η ***ανάμειξη*** δυο γλωσσών A και B είναι η γλώσσα

$$\{w \mid w = a_1b_1\cdots a_kb_k,\ \text{όπου } a_1\cdots a_k \in A,\ b_1\cdots b_k \in B,\ \text{και κάθε } a_i, b_i \in \Sigma^*\}.$$

Δείξτε ότι η κλάση των κανονικών γλωσσών είναι κλειστή ως προς την ανάμειξη.

1.33 Έστω A μια γλώσσα από κάποιο αλφάβητο Σ. Η γλώσσα ΠΕΡΙΚΟΠΗ(A) περιλαμβάνει όλες τις συμβολοσειρές που μπορούν να προκύψουν από συμβολοσειρές της A με διαγραφή ενός συμβόλου. Όσον αφορά τον τυπικό ορισμό, ΠΕΡΙΚΟΠΗ$(A) = \{xz \mid x, z \in \Sigma^* \text{ και υπάρχει } y \in \Sigma \text{ τέτοιο ώστε } xyz \in A\}$. Δείξτε ότι η κλάση των κανονικών γλωσσών είναι κλειστή ως προς την πράξη ΠΕΡΙΚΟΠΗ. Δώστε αφ' ενός μια απόδειξη μέσω σχήματος, και αφ' ετέρου μια πιο τυπική απόδειξη μέσω κατασκευής, όπως στο Θεώρημα 1.23.

^1.34 Για οποιεσδήποτε γλώσσες B και C από το $\{0,1\}$, ορίζουμε τη γλώσσα

$$B \overset{1}{\leftarrow} C = \{w \in B \mid \text{ για κάποια } y \in C, \text{ οι } w \text{ και } y \text{ έχουν ίδιο πλήθος από } 1\}.$$

Δείξτε ότι η κλάση των κανονικών γλωσσών είναι κλειστή ως προς την πράξη $\overset{1}{\leftarrow}$.

***1.35** Για οποιεσδήποτε γλώσσες A και B, ορίζουμε τη γλώσσα $A/B = \{w \mid$ υπάρχει $x \in B$ τέτοιο ώστε $wx \in A\}$. Δείξτε ότι, εάν η A είναι κανονική, τότε το ίδιο ισχύει και για την A/B, ανεξαρτήτως της B.

1.36 Για οποιαδήποτε συμβολοσειρά $w = w_1 w_2 \cdots w_n$, η ***ανάστροφή*** της, η οποία συμβολίζεται $w^{\mathcal{R}}$, είναι η συμβολοσειρά $w_n \cdots w_2 w_1$ που προκύπτει από την w εάν αντιστρέψουμε τη σειρά των συμβόλων της. Για οποιαδήποτε γλώσσα A, έστω $A^{\mathcal{R}} = \{w^{\mathcal{R}} \mid w \in A\}$. Δείξτε ότι, εάν η A είναι κανονική, τότε το ίδιο ισχύει και για την $A^{\mathcal{R}}$.

1.37 Έστω το αλφάβητο

$$\Sigma_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 0\\0\\0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\\0\\1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\\1\\0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 1\\1\\1 \end{bmatrix} \right\}$$

όλων των στηλών από 0 και 1 με ύψος 3. Κάθε συμβολοσειρά από το Σ_3 ορίζει τρεις σειρές από 0 και 1, τις οποίες ερμηνεύουμε ως δυαδικούς αριθμούς. Υπό την ερμηνεία αυτή, ορίζουμε τη γλώσσα

$$B = \{w \in \Sigma_3^* \mid \text{ η κατώτερη σειρά της } w \text{ είναι το άθροισμα των δύο ανωτέρων}\}.$$

Παραδείγματος χάριν,

$$\begin{bmatrix} 0\\0\\1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1\\0\\0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1\\1\\0 \end{bmatrix} \in B, \qquad \text{ενώ} \qquad \begin{bmatrix} 0\\0\\1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1\\0\\1 \end{bmatrix} \notin B.$$

Δείξτε ότι η B είναι κανονική. (Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το συμπέρασμα του Προβλήματος 1.36.)

1.38 Έστω το αλφάβητο

$$\Sigma_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0\\0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\\1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1\\0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1\\1 \end{bmatrix} \right\}$$

όλων των στηλών από 0 και 1 με ύψος 2. Κάθε συμβολοσειρά από το Σ_2 ορίζει δύο σειρές από 0 και 1, τις οποίες ερμηνεύουμε ως δυαδικούς αριθμούς. Υπό την ερμηνεία αυτή, ορίζουμε τη γλώσσα

$$C = \{w \in \Sigma_2^* \mid \text{ η κάτω σειρά της } w \text{ είναι το τριπλάσιο της άνω σειράς}\}.$$

Παραδείγματος χάριν, $\begin{bmatrix} 0\\0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0\\1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1\\1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0\\0 \end{bmatrix} \in C$, ενώ $\begin{bmatrix} 0\\1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0\\1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1\\0 \end{bmatrix} \notin C$. Δείξτε ότι η C είναι κανονική. (Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το συμπέρασμα του Προβλήματος 1.36.)

1.39 Έστω Σ_2 το αλφάβητο του Προβλήματος 1.38. Ερμηνεύοντας και πάλι τις σειρές των συμβολοσειρών από το Σ_2 ως δυαδικούς αριθμούς, ορίζουμε τη γλώσσα

$$D = \{w \in \Sigma_2^* \mid \text{ ο αριθμός στην κάτω σειρά της } w \text{ είναι μικρότερος από αυτόν στην άνω σειρά}\}.$$

Παραδείγματος χάριν, $\begin{bmatrix} 0\\0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1\\0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1\\1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0\\0 \end{bmatrix} \in D$, ενώ $\begin{bmatrix} 0\\0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0\\1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1\\1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0\\0 \end{bmatrix} \notin D$. Δείξτε ότι η D είναι κανονική.

1.40 Έστω Σ_2 το αλφάβητο του Προβλήματος 1.38. Ερμηνεύοντας τις σειρές των συμβολοσειρών από το Σ_2 ως συμβολοσειρές από 0 και 1, ορίζουμε τη γλώσσα

$$E = \{w \in \Sigma_2^* \mid \text{ η κάτω σειρά της } w \text{ είναι η ανάστροφη της άνω σειράς}\}.$$

Δείξτε ότι η E δεν είναι κανονική.

1.41 Έστω $B_n = \{\mathtt{a}^k |$ το k είναι πολλαπλάσιο του $n\}$. Δείξτε ότι η γλώσσα B_n είναι κανονική, για κάθε $n \geq 1$.

1.42 Έστω $C_n = \{x|$ ο δυαδικός αριθμός x είναι πολλαπλάσιο του $n\}$. Δείξτε ότι η γλώσσα C_n είναι κανονική, για κάθε $n \geq 1$.

1.43 Σύμφωνα με τον ορισμό μας, ένα απλό NFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ αποδέχεται μια συμβολοσειρά $w \in \Sigma^*$ εάν *κάποια* από τις καταστάσεις στις οποίες είναι δυνατόν να βρεθεί μετά την ανάγνωση της w ανήκει στο σύνολο F. Ορίζουμε ως ***ολοκρατικό*** NFA μια παρόμοια μηχανή, η οποία όμως αποδέχεται μια συμβολοσειρά μόνο εάν *όλες* αυτές οι καταστάσεις ανήκουν στο F. Δείξτε ότι τα ολοκρατικά NFA αναγνωρίζουν ακριβώς τις κανονικές γλώσσες.

1.44 Σύμφωνα με την κατασκευή από την απόδειξη του Λήμματος 1.32, για κάθε GNFA υπάρχει ένα ισοδύναμο GNFA με 2 μόνο καταστάσεις. Για τα DFA ισχύει μια αντίθετη ιδιότητα: για κάθε $k > 1$, υπάρχει γλώσσα $A_k \subseteq \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^*$ η οποία αναγνωρίζεται από κάποιο DFA με k καταστάσεις, αλλά δεν μπορεί να αναγνωριστεί από κανένα DFA με $k - 1$ μόνο καταστάσεις. Αποδείξτε αυτόν τον ισχυρισμό.

1.45 Υπενθυμίζουμε ότι μια συμβολοσειρά x ονομάζεται ***πρόθεμα*** μιας συμβολοσειράς y αν υπάρχει συμβολοσειρά z τέτοια ώστε $xz = y$. Εάν επιπλέον $x \neq y$, η x ονομάζεται ***γνήσιο πρόθεμα*** της y. Σε καθένα από τα παρακάτω σκέλη, ορίζουμε μια μονομελή πράξη σε γλώσσες. Δείξτε ότι η κλάση των κανονικών γλωσσών είναι κλειστή ως προς αυτήν την πράξη.

^**α'.** ΑΠΡΟΘΕΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ$(A) = \{w \in A |$καμία συμβολοσειρά της A δεν είναι γνήσιο πρόθεμα της $w\}$.

β'. ΜΗ-ΕΠΕΚΤΑΣΙΜΟΤΗΤΑ$(A) = \{w \in A |$ η w δεν είναι γνήσιο πρόθεμα καμίας συμβολοσειράς της $A\}$.

^**1.46** Αφού διαβάσετε τον άτυπο ορισμό του μετατροπέα πεπερασμένων καταστάσεων που παρατίθεται στην Άσκηση 1.25, δείξτε ότι, όταν το αλφάβητο εισόδου και εξόδου είναι το $\{\mathtt{0},\mathtt{1}\}$, κανένας FST δεν μπορεί να παράγει ως έξοδο την $w^{\mathcal{R}}$ για κάθε είσοδο w.

1.47 Έστω x και y δύο συμβολοσειρές, και L οποιαδήποτε γλώσσα από κάποιο αλφάβητο Σ. Λέμε ότι οι x και y είναι ***διακριτές μέσω της L*** εάν υπάρχει συμβολοσειρά z τέτοια ώστε μία και μόνο μία από τις συμβολοσειρές xz και yz να ανήκει στην L. Διαφορετικά, δηλαδή εάν για κάθε z ισχύει ότι $xz \in L$ όταν και μόνο όταν $yz \in L$, λέμε ότι οι x και y είναι ***μη διακριτές μέσω της L***, και γράφουμε $x \equiv_L y$. Δείξτε ότι η σχέση $\equiv_L$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο Σ^*.

^*__1.48__ **Θεώρημα των Myhill-Nerode.** Ανατρέξτε στο Πρόβλημα 1.47. Για οποιαδήποτε γλώσσα L και για οποιοδήποτε σύνολο συμβολοσειρών X, λέμε ότι το X είναι ***κατά ζεύγη διακριτό μέσω της L*** εάν όλα τα ζεύγη διαφορετικών συμβολοσειρών του είναι διακριτά μέσω της L. Ορίζουμε ως ***δείκτη της L*** το μέγιστο δυνατό πλήθος συμβολοσειρών σε ένα σύνολο που είναι κατά ζεύγη διακριτό μέσω της L. Σημειωτέον ότι ο δείκτης μιας γλώσσας μπορεί να είναι πεπερασμένος ή άπειρος.

α'. Δείξτε ότι, εάν η L αναγνωρίζεται από κάποιο DFA με k καταστάσεις, τότε έχει δείκτη μικρότερο ή ίσο του k.

β'. Δείξτε ότι, εάν η L έχει δείκτη κάποιον (πεπερασμένο) αριθμό k, τότε αναγνωρίζεται από κάποιο DFA με k καταστάσεις.

γ'. Συμπεράνετε ότι η L είναι κανονική εάν και μόνο εάν έχει πεπερασμένο δείκτη. Επιπλέον, ο πεπερασμένος αυτός δείκτης συμπίπτει με το μέγεθος του μικρότερου DFA που την αναγνωρίζει.

1.49 Έστω η γλώσσα $F = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^j\mathtt{c}^k \mid i, j, k \geq 0 \text{ και εάν } i = 1 \text{ τότε } j = k\}$.

α′. Δείξτε ότι η F δεν είναι κανονική.

β′. Δείξτε ότι η F συμπεριφέρεται σαν κανονική γλώσσα όσον αφορά το λήμμα της άντλησης. Με άλλα λόγια, βρείτε ένα μήκος άντλησης p και δείξτε ότι η F ικανοποιεί τις τρεις συνθήκες του λήμματος για το συγκεκριμένο p.

γ′. Εξηγήστε γιατί τα σκέλη (α′) και (β′) δεν αντιφάσκουν προς το λήμμα της άντλησης.

1.50 Σύμφωνα με το λήμμα της άντλησης, για κάθε κανονική γλώσσα υπάρχει κάποιο μήκος άντλησης p τέτοιο ώστε οποιαδήποτε συμβολοσειρά της γλώσσας με μήκος p ή μεγαλύτερο να επιδέχεται άντληση. Προφανώς, εάν το p είναι κάποιο μήκος άντλησης για τη γλώσσα A, τότε το ίδιο ισχύει και για οποιοδήποτε μήκος $p' \geq p$. Ορίζουμε ως ***ελάχιστο μήκος άντλησης*** για την A το μικρότερο p που συνιστά μήκος άντλησης για την A. Παραδείγματος χάριν, για $A = \mathtt{01}^*$, το ελάχιστο μήκος άντλησης είναι 2. Ο λόγος είναι ότι η συμβολοσειρά $s = \mathtt{0}$ έχει μήκος 1 και ανήκει στην A, αλλά δεν επιδέχεται άντληση. Αντιθέτως, οποιαδήποτε συμβολοσειρά της A με μήκος μεγαλύτερο ή ίσο του 2 περιέχει ένα 1, και άρα επιδέχεται άντληση διαιρούμενη έτσι ώστε $x = \mathtt{0}$, $y = \mathtt{1}$, και z η υπόλοιπη συμβολοσειρά.

Για καθεμία από τις παρακάτω γλώσσες, βρείτε το ελάχιστο μήκος άντλησης και δικαιολογήστε την απάντησή σας.

$^\wedge$α′. $\mathtt{0001}^*$

$^\wedge$β′. $\mathtt{0}^*\mathtt{1}^*$

γ′. $\mathtt{001} \cup \mathtt{0}^*\mathtt{1}^*$

$^\wedge$δ′. $\mathtt{0}^*\mathtt{1}^+\mathtt{0}^+\mathtt{1}^* \cup \mathtt{10}^*\mathtt{1}$

ε′. $(\mathtt{01})^*$

ϛ′. ε

ζ′. $\mathtt{1}^*\mathtt{01}^*\mathtt{01}^*$

η′. $\mathtt{10}(\mathtt{11}^*\mathtt{0})^*\mathtt{0}$

θ′. $\mathtt{1011}$

ι′. Σ^*

1.51 Δείξτε ότι οι παρακάτω γλώσσες δεν είναι κανονικές. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το λήμμα της άντλησης και την κλειστότητα της κλάσης των κανονικών γλωσσών ως προς την ένωση, την τομή, και το συμπλήρωμα.

α′. $\{\mathtt{0}^n\mathtt{1}^m\mathtt{0}^n \mid m, n \geq 0\}$

$^\wedge$β′. $\{\mathtt{0}^m\mathtt{1}^n \mid m \neq n\}$

γ′. $\{w \in \{\mathtt{0,1}\}^* \mid \text{ η } w \text{ δεν είναι καρκινική}\}$[7]

*δ′. $\{wtw \mid w, t \in \{\mathtt{0,1}\}^+\}$

1.52 Από το αλφάβητο $\{\mathtt{1}, \mathtt{\#}\}$, έστω η γλώσσα

$$Y = \{w \mid w = x_1\mathtt{\#}x_2\mathtt{\#}\cdots\mathtt{\#}x_k \text{ όπου } k \geq 0, \text{ κάθε } x_i \in \mathtt{1}^*, \text{ και } x_i \neq x_j \text{ για } i \neq j\}.$$

Δείξτε ότι η Y δεν είναι κανονική.

1.53 Από το αλφάβητο $\{\mathtt{0,1}\}$, έστω η γλώσσα

$$D = \{w \mid \text{η } w \text{ περιέχει τις υποσυμβολοσειρές } \mathtt{01} \text{ και } \mathtt{10} \text{ ακριβώς τις ίδιες φορές}\}.$$

Παραδείγματος χάριν, $\mathtt{101} \in D$, διότι η 101 περιέχει μία φορά την 01 και μία φορά την 10. Αντιθέτως, $\mathtt{1010} \notin D$, διότι η 1010 περιέχει δύο φορές την 10 και μόνο μία φορά την 01. Δείξτε ότι η γλώσσα D είναι κανονική.

[7] Μια συμβολοσειρά λέγεται ***καρκινική*** ή ***παλίνδρομη*** εάν συμπίπτει με την ανάστροφή της (βλ. Πρόβλημα 1.36).

1.54 Έστω $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$. Για κάθε $k \geq 1$, έστω C_k η γλώσσα που αποτελείται από όλες τις συμβολοσειρές οι οποίες περιέχουν ένα a ακριβώς k θέσεις πριν από το δεξί τους άκρο. Με άλλα λόγια, $C_k = \Sigma^*\mathsf{a}\Sigma^{k-1}$. Περιγράψτε, τόσο σε τυπική μορφή όσο και μέσω του διαγράμματος καταστάσεων, ένα NFA με $k+1$ καταστάσεις που να αναγνωρίζει τη γλώσσα C_k.

1.55 Θεωρήστε τις γλώσσες C_k που ορίσαμε στο Πρόβλημα 1.54. Αποδείξτε ότι για κάθε k, δεν υπάρχει DFA με λιγότερες από 2^k καταστάσεις που να μπορεί να αναγνωρίσει τη γλώσσα C_k.

1.56 Έστω $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$. Για κάθε $k \geq 1$, έστω D_k η γλώσσα που αποτελείται από όλες τις συμβολοσειρές οι οποίες έχουν τουλάχιστον ένα a μεταξύ των k τελευταίων συμβόλων τους. Με άλλα λόγια, $D_k = \Sigma^*\mathsf{a}(\Sigma \cup \varepsilon)^{k-1}$. Περιγράψτε, τόσο σε τυπική μορφή όσο και μέσω του διαγράμματος καταστάσεων, ένα DFA με $k+1$ το πολύ καταστάσεις που να αναγνωρίζει τη γλώσσα D_k.

*1.57 α'. Έστω A μια άπειρη κανονική γλώσσα. Δείξτε ότι η A μπορεί να χωριστεί σε δύο άπειρα ξένα κανονικά υποσύνολα.

β'. Έστω B και D δύο γλώσσες. Γράφουμε $B \Subset D$ εάν $B \subseteq D$ και η D περιέχει απειράριθμες συμβολοσειρές που δεν ανήκουν στη B. Δείξτε ότι, εάν οι B και D είναι δύο κανονικές γλώσσες τέτοιες ώστε $B \Subset D$, τότε υπάρχει κανονική γλώσσα C τέτοια ώστε $B \Subset C \Subset D$.

1.58 Έστω N ένα NFA με k καταστάσεις το οποίο αναγνωρίζει κάποια γλώσσα A.

α'. Δείξτε ότι, εάν η A είναι μη κενή, τότε περιέχει κάποια συμβολοσειρά με μήκος μικρότερο ή ίσο του k.

β'. Δείξτε, μέσω ενός παραδείγματος, ότι εάν στο σκέλος (α') αντικαταστήσουμε την A με την $\overline{A}$ η πρόταση δεν παραμένει απαραιτήτως αληθής.

γ'. Δείξτε ότι εάν η $\overline{A}$ είναι μη κενή, τότε περιέχει κάποια συμβολοσειρά με μήκος μικρότερο ή ίσο του 2^k.

δ'. Δείξτε ότι το φράγμα του προηγούμενου σκέλους είναι σχεδόν αυστηρό: για κάθε k, βρείτε ένα NFA που να αναγνωρίζει κάποια γλώσσα A, τέτοια ώστε η $\overline{A}$ να είναι μη κενή και το μήκος των μικρότερων συμβολοσειρών της να είναι εκθετικό ως προς k. Προσπαθήστε να προσεγγίσετε το φράγμα του σκέλους (γ') όσο το δυνατόν περισσότερο.

*1.59 Δείξτε ότι για κάθε $n > 0$ υπάρχει γλώσσα B_n για την οποία ισχύουν τα εξής:

α'. η B_n αναγνωρίζεται από κάποιο NFA με n καταστάσεις, και

β'. εάν $B_n = A_1 \cup \cdots \cup A_k$ για κάποιες κανονικές γλώσσες A_i, τότε, για μία τουλάχιστον από τις A_i, το μέγεθος του μικρότερου DFA που την αναγνωρίζει είναι εκθετικό ως προς n.

1.60 Ένας ***ομομορφισμός*** είναι μια συνάρτηση $f\colon \Sigma \longrightarrow \Gamma^*$ από ένα αλφάβητο σε συμβολοσειρές από ένα άλλο αλφάβητο. Μπορούμε να επεκτείνουμε τον f ώστε να δρα πάνω σε συμβολοσειρές ορίζοντας $f(w) = f(w_1)f(w_2)\cdots f(w_n)$, όπου $w = w_1w_2\cdots w_n$ και $w_i \in \Sigma$ για κάθε w_i. Επεκτείνουμε περαιτέρω τον f ώστε να δρα πάνω σε γλώσσες ορίζοντας $f(A) = \{f(w) \mid w \in A\}$, για οποιαδήποτε γλώσσα A.

α'. Δείξτε, μέσω μιας τυπικής κατασκευής, ότι η κλάση των κανονικών γλωσσών είναι κλειστή ως προς τον ομομορφισμό. Με άλλα λόγια, για ένα δεδομένο DFA M που αναγνωρίζει την B και έναν δεδομένο ομομορφισμό f, κατασκευάστε ένα πεπερασμένο αυτόματο M' που να αναγνωρίζει την $f(B)$. Εξετάστε τη μηχανή M' που κατασκευάσατε. Αποτελεί DFA σε κάθε περίπτωση;

β′. Δείξτε, μέσω ενός παραδείγματος, ότι η κλάση των μη κανονικών γλωσσών δεν είναι κλειστή ως προς τον ομομορφισμό.

*1.61 Έστω $\mathrm{P}(A) = \{yx \mid xy \in A\}$ η ***περιστροφική κλειστότητα*** της γλώσσας A.

α′. Δείξτε ότι για οποιαδήποτε γλώσσα A, έχουμε ότι $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(\mathrm{P}(A))$.

β′. Δείξτε ότι η κλάση των κανονικών γλωσσών είναι κλειστή ως προς την περιστροφική κλειστότητα.

1.62 Από το αλφάβητο $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}, \mathtt{+}, \mathtt{=}\}$, έστω η γλώσσα

$$\textsc{Προσθεση} = \{x\mathtt{=}y\mathtt{+}z \mid \text{οι συμβολοσειρές } x, y, z \text{ είναι δυαδικοί ακέραιοι, και η } x \text{ είναι το άθροισμα των } y \text{ και } z\}.$$

Δείξτε ότι η Προσθεση δεν είναι κανονική.

*1.63 Για κάθε σύνολο φυσικών αριθμών A και κάθε φυσικό αριθμό k μεγαλύτερο του 1, έστω η γλώσσα

$$B_k(A) = \{w \mid \text{η } w \text{ είναι η αναπαράσταση κάποιου αριθμού του } A \text{ σε βάση } k\}.$$

Παραδείγματος χάριν, $B_2(\{3,5\}) = \{11, 101\}$ και $B_3(\{3,5\}) = \{10, 12\}$. Σημειωτέον ότι η αναπαράσταση ενός αριθμού δεν επιτρέπεται να αρχίζει από 0. Βρείτε ένα σύνολο A για το οποίο η γλώσσα $B_2(A)$ να είναι κανονική, αλλά η $B_3(A)$ να μην είναι. Αποδείξτε ότι το σύνολό σας έχει τη ζητούμενη ιδιότητα.

*1.64 Για οποιαδήποτε γλώσσα A, έστω $A_{\frac{1}{2}-}$ το σύνολο όλων των αρχικών «ημισυμβολοσειρών» της A, δηλαδή

$$A_{\frac{1}{2}-} = \{x \mid \text{υπάρχει συμβολοσειρά } y \text{ τέτοια ώστε } |x| = |y| \text{ και } xy \in A\}.$$

Δείξτε ότι, εάν η A είναι κανονική, τότε το ίδιο ισχύει και για την $A_{\frac{1}{2}-}$.

*1.65 Για οποιαδήποτε γλώσσα A, έστω $A_{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}$ το σύνολο των συμβολοσειρών που προκύπτουν από τις συμβολοσειρές της A όταν αφαιρεθεί από αυτές το μεσαίο τους ένα τρίτο, δηλαδή

$$A_{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}} = \{xz \mid \text{υπάρχει συμβολοσειρά } y \text{ τέτοια ώστε } |x| = |y| = |z| \text{ και } xyz \in A\}.$$

Δείξτε ότι, ακόμη και αν η A είναι κανονική, η $A_{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}$ ενδέχεται να μην είναι.

*1.66 Έστω $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ένα DFA. Λέμε ότι κάποια συμβολοσειρά $s \in \Sigma^*$ ***επαναφέρει*** το M σε κάποια κατάστασή του h, η οποία ονομάζεται «έδρα» του, εάν για κάθε $q \in Q$ ισχύει ότι $\delta(q, s) = h$. (Σημειωτέον ότι εδώ έχουμε επεκτείνει τη συνάρτηση δ σε συμβολοσειρές, οπότε η $\delta(q, s)$ αντιπροσωπεύει την κατάσταση στην οποία καταλήγει το M εάν ξεκινώντας από την q διαβάσει τη συμβολοσειρά s.) Η συμβολοσειρά s λέγεται ***ακολουθία επαναφοράς*** για το M και την h. Γενικότερα, λέμε ότι ένα DFA επιδέχεται ***επαναφορά*** εάν υπάρχει για αυτό ακολουθία επαναφοράς για κάποια κατάστασή του h. Δείξτε ότι για κάθε DFA με k καταστάσεις που επιδέχεται επαναφορά, υπάρχει ακολουθία επαναφοράς με μήκος μικρότερο ή ίσο του k^3. Μπορείτε να βελτιώσετε αυτό το φράγμα;

1.67 Έστω η πράξη ***αποφεύγει***, η οποία ορίζεται ως εξής για δύο γλώσσες A και B:

$$A \textsc{ αποφευγει } B = \{w \mid w \in A \text{ και η } w \text{ δεν περιέχει ως υποσυμβολοσειρά καμία συμβολοσειρά της } B\}.$$

Αποδείξτε ότι η κλάση των κανονικών γλωσσών είναι κλειστή ως προς την πράξη *αποφεύγει*.

1.68 Έστω $\Sigma = \{0,1\}$.

α'. Έστω $A = \{0^k u 0^k |\ k \geq 1 \text{ και } u \in \Sigma^*\}$. Δείξτε ότι η A είναι κανονική.

β'. Έστω $B = \{0^k 1 u 0^k |\ k \geq 1 \text{ και } u \in \Sigma^*\}$. Δείξτε ότι η B δεν είναι κανονική.

1.69 Έστω δύο DFAs M_1 και M_2 που έχουν k_1 και k_2 καταστάσεις, αντίστοιχα, και έστω επίσης $U = L(M_1) \cup L(M_2)$.

α'. Δείξτε ότι αν $U \neq \emptyset$, τότε η U περιλαμβάνει κάποια συμβολοσειρά s, όπου $|s| < \max(k_1, k_2)$.

β'. Δείξτε ότι αν $U \neq \Sigma^*$, τότε η U δεν περιλαμβάνει κάποια συμβολοσειρά s, όπου $|s| < k_1 k_2$.

1.70 Έστω $\Sigma = \{0,1,\#\}$. Έστω $C = \{x\#x^{\mathcal{R}}\#x | x \in \{0,1\}^*\}$. Δείξτε ότι η γλώσσα $\overline{C}$ είναι ασυμφραστική.

1.71 **α'.** Έστω $B = \{1^k y |\ k \geq 1, y \in \{0,1\}^*$, και η y περιέχει τουλάχιστον k 1, όπου $k \geq 1\}$. Δείξτε ότι η γλώσσα B είναι κανονική.

β'. Έστω $C = \{1^k y |\ k \geq 1, y \in \{0,1\}^*$, και η y περιέχει το πολύ k 1, όπου $k \geq 1\}$. Δείξτε ότι η γλώσσα C δεν είναι κανονική.

***1.72** Στην κλασική μέθοδο κοψίματος μιας τράπουλας, η τράπουλα χωρίζεται με τυχαίο τρόπο σε δύο μέρη, τα οποία αλλάζουν θέση μεταξύ τους. Σε ένα πιο σύνθετο κόψιμο, το λεγόμενο «κόψιμο Scarne», η τράπουλα χωρίζεται σε τρία μέρη και το μεσαίο μέρος τοποθετείται πρώτο στη νέα διάταξη. Θα χρησιμοποιήσουμε το κόψιμο Scarne ως έμπνευση για μια πράξη πάνω σε γλώσσες. Για μια γλώσσα A, έστω ΚΟΨΙΜΟ$(A) = \{yxz |\ xyz \in A\}$.

α'. Παραθέστε μια γλώσσα B για την οποία να ισχύει ότι ΚΟΨΙΜΟ$(B) \neq$ ΚΟΨΙΜΟ(ΚΟΨΙΜΟ(B)).

β'. Δείξτε ότι η κλάση των κανονικών γλωσσών είναι κλειστή ως προς την πράξη ΚΟΨΙΜΟ.

1.73 Έστω $\Sigma = \{0,1\}$. Έστω $\Omega\Omega_k = \{ww |\ w \in \Sigma^* \text{ και η } w \text{ έχει μήκος } k\}$.

α'. Δείξτε ότι για κάθε k, δεν υπάρχει DFA που να μπορεί να αναγνωρίσει την $\Omega\Omega_k$ με λιγότερες από 2^k καταστάσεις.

β'. Περιγράψτε ένα πολύ μικρότερο NFA για την $\overline{\Omega\Omega_k}$, το συμπλήρωμα της $\Omega\Omega_k$.

ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

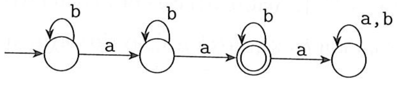
1.1 Για το M_1: (α') q_1. (β') $\{q_2\}$. (γ') q_1, q_2, q_3, q_1, q_1. (δ') Όχι. (ε') Όχι.
Για το M_2: (α') q_1. (β') $\{q_1, q_4\}$. (γ') q_1, q_1, q_1, q_2, q_4. (δ') Ναι. (ε') Ναι.

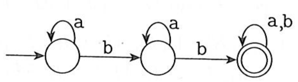
1.2 $M_1 = (\{q_1, q_2, q_3\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, \delta_1, q_1, \{q_2\})$ και $M_2 = (\{q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, \delta_2, q_1, \{q_1, q_4\})$, με συναρτήσεις μεταβάσεων τις:

δ_1	a	b
q_1	q_2	q_1
q_2	q_3	q_3
q_3	q_2	q_1

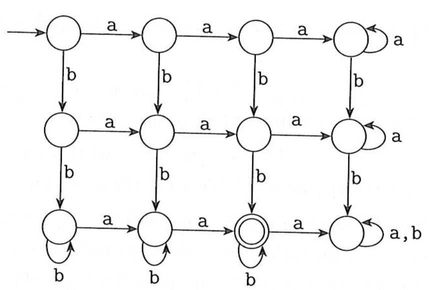
δ_2	a	b
q_1	q_1	q_2
q_2	q_3	q_4
q_3	q_2	q_1
q_4	q_3	q_4

1.4 (β′) Τα παρακάτω δύο DFA αναγνωρίζουν αντίστοιχα τις γλώσσες $\{w \mid$ η w έχει ακριβώς δύο a$\}$ και $\{w \mid$ η w έχει τουλάχιστον δύο b$\}$:

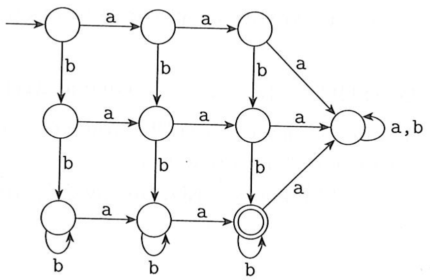




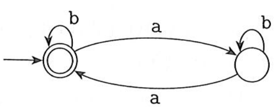
Ενώνοντάς τα μέσω της κατασκευής για την τομή, παίρνουμε το ακόλουθο DFA.

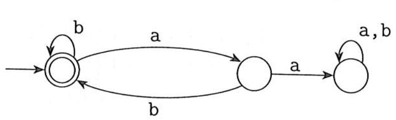


Αν και το πρόβλημα δεν σας ζητά να απλοποιήσετε το αποτέλεσμα, κάποιες καταστάσεις μπορούν να συγχωνευθούν, οπότε παίρνουμε το ακόλουθο DFA.

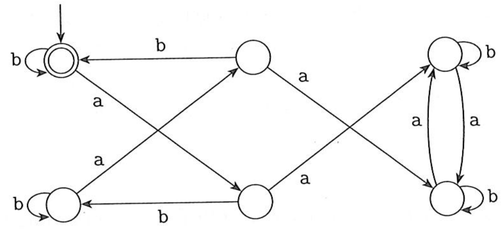


(δ′) Τα παρακάτω δύο DFA αναγνωρίζουν αντίστοιχα τις γλώσσες $\{w \mid$ η w έχει άρτιο πλήθος από a$\}$ και $\{w \mid$ κάθε a στην w ακολουθείται από τουλάχιστον ένα b$\}$:

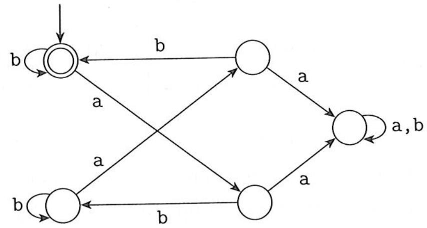




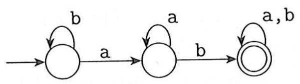
Ενώνοντάς τα μέσω της κατασκευής για την τομή, παίρνουμε το DFA:

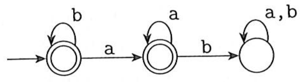


Και πάλι, το πρόβλημα δεν σας ζητά να απλοποιήσετε το αποτέλεσμα. Ωστόσο, κάποιες καταστάσεις μπορούν να συγχωνευθούν, οπότε παίρνουμε το ακόλουθο DFA.

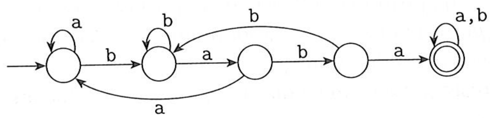


1.5 (α′) Το DFA στα αριστερά αναγνωρίζει τη γλώσσα $\{w \mid$ η w περιέχει την υποσυμβολοσειρά ab$\}$. Το DFA στα δεξιά αναγνωρίζει το συμπλήρωμά της, δηλαδή τη γλώσσα $\{w \mid$ η w δεν περιέχει την υποσυμβολοσειρά ab$\}$.

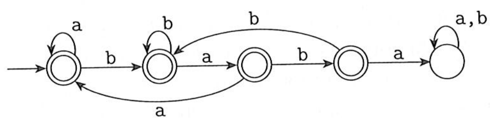




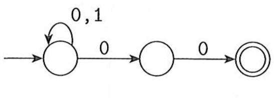
(β′) Το παρακάτω DFA αναγνωρίζει τη γλώσσα $\{w \mid$ η w περιέχει την υποσυμβολοσειρά baba$\}$.



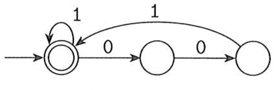
Το παρακάτω DFA αναγνωρίζει τη γλώσσα $\{w \mid$ η w δεν περιέχει την υποσυμβολοσειρά baba$\}$.



1.7 (α′)



(ς′)



1.11 Έστω $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ τυχόν NFA. Θα κατασκευάσουμε ένα NFA N' που να αναγνωρίζει την ίδια γλώσσα με το N και να έχει μία μόνο κατάσταση αποδοχής. Σε περιγραφικό επίπεδο, το N' είναι πανομοιότυπο με το N, με τη διαφορά ότι περιλαμβάνει μια νέα κατάσταση αποδοχής $q_{\text{αποδοχής}}$, η οποία είναι προσπελάσιμη από τις παλιές καταστάσεις αποδοχής μέσω μεταβάσεων ε, και από την οποία δεν ξεκινά καμία μετάβαση. Όσον αφορά την τυπική περιγραφή, έχουμε $N' = (Q \cup \{q_{\text{αποδοχής}}\}, \Sigma, \delta', q_0, \{q_{\text{αποδοχής}}\})$, όπου για κάθε $q \in Q$ και $a \in \Sigma_\varepsilon$

$$\delta'(q,a) = \begin{cases} \delta(q,a) & \text{εάν } q \notin F \text{ ή } a \neq \varepsilon \\ \delta(q,a) \cup \{q_{\text{αποδοχής}}\} & \text{εάν } q \in F \text{ και } a = \varepsilon, \end{cases}$$

και για κάθε $a \in \Sigma_\varepsilon$, $\delta'(q_{\text{αποδοχής}}, a) = \emptyset$.

1.24 Θα αποδείξουμε και τις δύο κατευθύνσεις του «εάν και μόνο εάν».

($\Rightarrow$) Με δεδομένο ότι $B = B^+$, θα δείξουμε ότι $BB \subseteq B$: Για οποιαδήποτε γλώσσα B, ισχύει ότι $BB \subseteq B^+$. Επομένως, εάν $B = B^+$, έπεται ότι $BB \subseteq B$.

($\Leftarrow$) Με δεδομένο ότι $BB \subseteq B$, θα δείξουμε ότι $B = B^+$: Για οποιαδήποτε γλώσσα B, ισχύει ότι $B \subseteq B^+$. Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι $B^+ \subseteq B$. Έστω $w \in B^+$. Στην περίπτωση αυτή, $w = x_1x_2 \cdots x_k$, όπου $k \geq 1$ και κάθε $x_i \in B$. Δεδομένου ότι οι x_1 και x_2 ανήκουν στη B και $BB \subseteq B$, γνωρίζουμε ότι $x_1x_2 \in B$. Παρομοίως, δεδομένου ότι οι x_1x_2 και x_3 ανήκουν στη B και $BB \subseteq B$, γνωρίζουμε ότι $x_1x_2x_3 \in B$. Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, έχουμε τελικά ότι $x_1 \cdots x_k \in B$. Επομένως, $w \in B$, οπότε συμπεραίνουμε ότι $B^+ \subseteq B$.

Το σκεπτικό αυτό μπορεί να εκφραστεί και σε τυπική μορφή, στο πλαίσιο της ακόλουθης επαγωγικής απόδειξης:

Υποθέτουμε ότι $BB \subseteq B$.

Ισχυρισμος: Για κάθε $k \geq 1$, εάν $x_1, \ldots, x_k \in B$, τότε $x_1 \cdots x_k \in B$.

Αποδειξη: Με επαγωγή ως προς k.

Βάση: Για $k = 1$, η πρόταση αληθεύει κατά προφανή τρόπο.

Επαγωγικό βήμα: Για κάθε $k \geq 1$, υποθέτουμε ότι ο ισχυρισμός αληθεύει για k, και θα αποδείξουμε ότι αληθεύει και για $k+1$: Έστω $x_1, \ldots, x_k, x_{k+1} \in B$. Από την επαγωγική υπόθεση, και δεδομένου ότι $x_1, \ldots, x_k \in B$, έπεται ότι $x_1 \cdots x_k \in B$. Αφού λοιπόν οι $x_1 \cdots x_k$ και x_{k+1} ανήκουν στη B και $BB \subseteq B$, έχουμε ότι $x_1 \cdots x_k x_{k+1} \in B$. Άρα, έχουμε αποδείξει το επαγωγικό βήμα, και επομένως και τον ισχυρισμό, από τον οποίο συνεπάγεται ότι $B^+ \subseteq B$. Συνεπώς, συμπεραίνουμε ότι εάν $BB \subseteq B$ τότε $B^+ \subseteq B$.

1.29 **(α′)** Ας υποθέσουμε ότι η $A_1 = \{0^n1^n2^n \mid n \geq 0\}$ είναι κανονική. Έστω p το μήκος άντλησης που προβλέπεται από το λήμμα της άντλησης. Επιλέγουμε ως s τη συμβολοσειρά $0^p1^p2^p$. Δεδομένου ότι η s ανήκει στην A_1 και έχει μήκος μεγαλύτερο από p, το λήμμα εγγυάται ότι μπορεί να χωριστεί σε τρία μέρη, $s = xyz$, τέτοια ώστε για κάθε $i \geq 0$ η συμβολοσειρά xy^iz να ανήκει στην A_1. Εξετάζουμε τις εξής δύο περιπτώσεις:

1. Η συμβολοσειρά y περιέχει μόνο 0, μόνο 1, ή μόνο 2. Στην περίπτωση αυτή η $xyyz$ δεν είναι δυνατόν να περιέχει το ίδιο πλήθος από 0, 1, και 2, και άρα δεν ανήκει στην A_1, όπερ άτοπον.
2. Η συμβολοσειρά y περιέχει περισσότερα από ένα είδη συμβόλων. Στην περίπτωση αυτή, η $xyyz$ έχει τα σύμβολα 0, τα 1, ή τα 2 της σε λάθος διάταξη, και άρα δεν ανήκει στην A_1, όπερ άτοπον.

Δεδομένου ότι σε κάθε περίπτωση καταλήγουμε σε άτοπο, έπεται ότι η A_1 δεν είναι κανονική.

(γ′) Ας υποθέσουμε ότι η $A_3 = \{\mathtt{a}^{2^n} \mid n \geq 0\}$ είναι κανονική. Έστω p το μήκος άντλησης που προβλέπεται από το λήμμα της άντλησης. Επιλέγουμε ως s τη συμβολοσειρά $\mathtt{a}^{2^p}$. Δεδομένου ότι η s ανήκει στην A_3 και έχει μήκος μεγαλύτερο από p, το λήμμα εγγυάται ότι μπορεί να χωριστεί σε τρία μέρη, $s = xyz$, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι τρεις συνθήκες του.

Η τρίτη συνθήκη προβλέπει ότι $|xy| \leq p$. Όμως $p < 2^p$, και άρα $|y| < 2^p$. Επομένως, $|xyyz| = |xyz| + |y| < 2^p + 2^p = 2^{p+1}$. Η δεύτερη συνθήκη απαιτεί να ισχύει $|y| > 1$. Συνολικά, λοιπόν, έχουμε $2^p < |xyyz| < 2^{p+1}$. Συνεπώς, το μήκος της $xyyz$ δεν μπορεί να ισούται με κάποια δύναμη του 2, και άρα η συμβολοσειρά αυτή δεν ανήκει στην A_3, όπερ άτοπον. Συνεπώς, η A_3 δεν είναι κανονική.

1.34 Έστω $M_B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, q_B, F_B)$ και $M_C = (Q_C, \Sigma, \delta_C, q_C, F_C)$ δύο DFA τα οποία αναγνωρίζουν τις B και C, αντίστοιχα. Θα κατασκευάσουμε ένα NFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ που να αναγνωρίζει την $B \overset{1}{\leftarrow} C$. Για να κρίνει εάν κάποια είσοδος w ανήκει στην $B \overset{1}{\leftarrow} C$, το M ελέγχει εάν $w \in B$ και, παράλληλα, μαντεύει μη αιτιοκρατικά μια συμβολοσειρά y που περιέχει το ίδιο πλήθος από 1 με την w ελέγχοντας εάν $y \in C$. Η τυπική περιγραφή του M έχει ως εξής:

1. $Q = Q_B \times Q_C$,
2. για κάθε $(q, r) \in Q$ και $a \in \Sigma_\varepsilon$, η δ ορίζεται ως εξής

$$\delta\big((q,r),a\big) = \begin{cases} \big\{\big(\delta_B(q,0), r\big)\big\} & \text{εάν } a = 0 \\ \big\{\big(\delta_B(q,1), \delta_C(r,1)\big)\big\} & \text{εάν } a = 1 \\ \big\{\big(q, \delta_C(r,0)\big)\big\} & \text{εάν } a = \varepsilon, \end{cases}$$

3. $q_0 = (q_B, q_C)$, και
4. $F = F_B \times F_C$.

1.45 (α′) Έστω A οποιαδήποτε κανονική γλώσσα, και $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ένα DFA που την αναγνωρίζει. Ένα NFA που αναγνωρίζει τη γλώσσα ΑΠΡΟΘΕΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ(A) είναι το $M' = (Q, \Sigma, \delta', q_0, F)$, όπου δ' η συνάρτηση που για κάθε $r \in Q$ και $a \in \Sigma$ επιστρέφει την τιμή

$$\delta'(r,a) = \begin{cases} \{\delta(r,a)\} & \text{εάν } r \notin F \\ \emptyset & \text{εάν } r \in F. \end{cases}$$

1.46 Υποθέστε ότι, αντιθέτως, υπάρχει FST T που παράγει ως έξοδο την $w^{\mathcal{R}}$ για κάθε είσοδο w. Έστω οι συμβολοσειρές εισόδου 00 και 01. Με είσοδο 00, ο T θα πρέπει να δίνει έξοδο 00, και με είσοδο 01 θα πρέπει να δίνει έξοδο 10. Παρατηρήστε ότι, ενώ και στις δύο περιπτώσεις το πρώτο δυφίο εισόδου είναι το 0, τα πρώτα δυφία εξόδου διαφέρουν. Ένας FST όμως, είναι αδύνατον να λειτουργεί με αυτόν τον τρόπο, διότι κάθε τέτοια μηχανή παράγει το πρώτο δυφίο εξόδου προτού διαβάσει το δεύτερο δυφίο εισόδου. Επομένως, είναι αδύνατον να υπάρχει τέτοιος FST.

1.48 (α′) Θα αποδείξουμε την πρόταση δια της εις άτοπον απαγωγής. Έστω M κάποιο DFA k καταστάσεων που αναγνωρίζει την L. Ας υποθέσουμε, αντίθετα προς το αποδεικτέο, ότι ο δείκτης της L είναι μεγαλύτερος του k. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει σύνολο X με περισσότερα από k στοιχεία το οποίο είναι κατά ζεύγη διακριτό μέσω της L. Δεδομένου ότι το M έχει k καταστάσεις, η αρχή του περιστερώνα συνεπάγεται ότι το X περιέχει δύο διαφορετικές συμβολοσειρές x και y για τις οποίες $\delta(q_0, x) = \delta(q_0, y)$. (Η $\delta(q_0, x)$ είναι η κατάσταση στην οποία φτάνει το M όταν ξεκινώντας από την q_0 διαβάσει ως είσοδο τη συμβολοσειρά x.) Επομένως, για οποιαδήποτε συμβολοσειρά $z \in \Sigma^*$ ισχύει ότι $\delta(q_0, xz) = \delta(q_0, yz)$. Άρα, είτε αμφότερες οι xz και yz ανήκουν στην L, είτε καμία δεν ανήκει στην L. Στην περίπτωση αυτή, όμως, οι x και y δεν είναι διακριτές από την L, το οποίο αντιβαίνει προς την υπόθεσή μας ότι το X είναι κατά ζεύγη διακριτό μέσω της L.

(β′) Έστω ένα σύνολο $X = \{s_1, \ldots, s_k\}$ κατά ζεύγη διακριτό μέσω της L. Θα κατασκευάσουμε ένα DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ με k καταστάσεις που να αναγνωρίζει την L. Θέτουμε $Q = \{q_1, \ldots, q_k\}$, και ορίζουμε ως $\delta(q_i, a)$ την κατάσταση q_j, όπου j ο δείκτης για τον οποίο $s_j \equiv_L s_i a$ (η σχέση $\equiv_L$ ορίζεται στο Πρόβλημα 1.47). Τέτοιος δείκτης είναι βέβαιο ότι υπάρχει, διότι διαφορετικά το $X \cup \{s_i a\}$ θα είχε $k + 1$ στοιχεία και θα ήταν κατά ζεύγη διακριτό μέσω της L, αντίθετα προς την υπόθεσή μας ότι η L έχει δείκτη k. Ως καταστάσεις αποδοχής επιλέγουμε τις $F = \{q_i | \, s_i \in L\}$. Ως εναρκτήρια κατάσταση q_0 επιλέγουμε την q_i, όπου i ο δείκτης για τον οποίο $s_i \equiv_L \varepsilon$. Από τον τρόπο κατασκευής του M, έχουμε ότι για κάθε κατάσταση q_i ισχύει $\{s | \, \delta(q_0, s) = q_i\} = \{s | \, s \equiv_L s_i\}$. Επομένως, το M αναγνωρίζει την L.

(γ′) Ας υποθέσουμε ότι η L είναι κανονική, και έστω k το πλήθος των καταστάσεων σε κάποιο DFA που την αναγνωρίζει. Τότε, σύμφωνα με το σκέλος (α′) η L έχει δείκτη μικρότερο ή ίσο του k. Αντιστρόφως, εάν η L έχει δείκτη k, τότε από το σκέλος (β′) έπεται ότι αναγνωρίζεται από κάποιο DFA με k καταστάσεις, και άρα είναι κανονική. Για να δείξουμε ότι ο δείκτης της L ισούται με το μέγεθος του μικρότερου DFA που την αναγνωρίζει, ας υποθέσουμε ότι ο δείκτης της L ισούται *ακριβώς* με k. Στην περίπτωση αυτή, από το σκέλος (β′) έπεται ότι υπάρχει DFA k καταστάσεων που να την αναγνωρίζει. Επιπλέον, το μέγεθός του είναι το ελάχιστο δυνατό διότι, εάν υπήρχε μικρότερο DFA για την L, τότε επικαλούμενοι το σκέλος (α′) θα μπορούσαμε να δείξουμε ότι ο δείκτης της L είναι μικρότερος από k.

1.50 (α′) Το ελάχιστο μήκος άντλησης είναι 4. Κατ' αρχάς, κάθε συμβολοσειρά s με μήκος 4 ή μεγαλύτερο περιέχει δυφία 1. Εάν λοιπόν τη χωρίσουμε σε τμήματα xyz με $x = 000$, $y = 1$ και z την υπόλοιπη συμβολοσειρά, τότε προφανώς οι τρεις συνθήκες του λήμματος της άντλησης ικανοποιούνται. Επιπλέον, το μήκος άντλησης για τη γλώσσα δεν είναι το 3, αφού η συμβολοσειρά 000, παρ' ότι ανήκει στη γλώσσα, δεν επιδέχεται άντληση.

(β′) Το ελάχιστο μήκος άντλησης είναι 1. Κατ' αρχάς, δεν μπορεί να είναι 0, διότι η κενή συμβολοσειρά ε, παρ' ότι ανήκει στη γλώσσα, δεν επιδέχεται άντληση. Επιπλέον, κάθε μη κενή συμβολοσειρά της γλώσσας μπορεί να χωριστεί σε τμήματα xyz με $x = \varepsilon$, y το πρώτο σύμβολο, και z την υπόλοιπη συμβολοσειρά, και η διαίρεση αυτή ικανοποιεί τις τρεις συνθήκες.

(δ′) Το ελάχιστο μήκος άντλησης είναι 3. Κατ' αρχάς, δεν μπορεί να είναι 2 διότι η συμβολοσειρά 11, παρ' ότι ανήκει στη γλώσσα, δεν επιδέχεται άντληση. Έστω τώρα οποιαδήποτε συμβολοσειρά s της γλώσσας με μήκος τουλάχιστον 3. Εάν η s παράγεται από την έκφραση $0^*1^+0^+1^*$ και αρχίζει με 0 ή 11, τότε μπορούμε να την γράψουμε ως xyz με $x = \varepsilon$, y το πρώτο σύμβολό της, και z την υπόλοιπη συμβολοσειρά. Εάν η s παράγεται από την $0^*1^+0^+1^*$ και αρχίζει με 10, τότε μπορούμε να την γράψουμε ως xyz με $x = 10$, y το τρίτο σύμβολό της, και z την υπόλοιπη συμβολοσειρά. Αντίστοιχα, εάν η s παράγεται από την έκφραση 10^*1, τότε μπορούμε να τη γράψουμε ως xyz με $x = 1$, $y = 0$, και z την υπόλοιπη συμβολοσειρά. Σε όλες τις περιπτώσεις, η διαίρεση ικανοποιεί τις τρεις συνθήκες.

1.51 (β′) Έστω $B = \{0^m1^n \mid m \neq n\}$. Παρατηρήστε ότι $\overline{B} \cap 0^*1^* = \{0^k1^k \mid k \geq 0\}$. Εάν η B ήταν κανονική, τότε το ίδιο θα ίσχυε και για την $\overline{B}$, και επομένως και για την $\overline{B} \cap 0^*1^*$. Γνωρίζουμε όμως ήδη ότι η $\{0^k1^k \mid k \geq 0\}$ δεν είναι κανονική. Άρα η B δεν μπορεί να είναι κανονική.

Εναλλακτικά, μπορούμε να αποδείξουμε τη μη κανονικότητα της B χρησιμοποιώντας απευθείας το λήμμα της άντλησης, αν και αυτός ο τρόπος απόδειξης είναι πιο περίπλοκος. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι η $B = \{0^m1^n \mid m \neq n\}$ είναι κανονική. Έστω p το μήκος άντλησης που προβλέπεται από το λήμμα της άντλησης. Θεωρήστε τη συμβολοσειρά $s = 0^p1^{p+p!}$, όπου $p! = p(p-1)(p-2)\cdots 1$. Προφανώς, $s \in B$ και $|s| \geq p$. Επομένως, το λήμμα της άντλησης συνεπάγεται ότι η s επιδέχεται άντληση γραφόμενη στη μορφή xyz, με $x = 0^a$, $y = 0^b$, και $z = 0^c1^{p+p!}$, όπου $a+b+c = p$ και $b \geq 1$. Δεδομένου ότι ο αριθμός $p!$ διαιρείται από όλους τους ακεραίους μεταξύ 1 και p, γνωρίζουμε ότι διαιρείται από το b. Έστω λοιπόν $i = p!/b$, και s' η συμβολοσειρά $xy^{i+1}z$. Στην περίπτωση αυτή, $y^i = 0^{p!}$, και άρα $y^{i+1} = 0^{b+p!}$, οπότε $s' = 0^{a+b+c+p!}1^{p+p!}$. Άρα, έχουμε ότι $s' = 0^{p+p!}1^{p+p!} \notin B$, όπερ άτοπον.