4-44: Θεωρία Υπολογισμού

Αποδείξτε ότι η γλώσσα

$$L \;=\; \{\, a^i b^j \mid i = kj \text{ για κάποιον θετικό ακέραιο } k \,\}$$

δεν είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα.

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Άντλησης για γλώσσες χωρίς συμφραζόμενα όπως το διατυπώσαμε στις διαλέξεις (δηλ., με τον περιορισμό $|vxy| \le n$ όπου n η σταθερά του Θεωρήματος Άντλησης). Υποθέτουμε ότι η γλώσσα L είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα και έστω n η σταθερά του Θεωρήματος Άντλησης για την L.

Θεωρούμε τη συμβολοσειρά $w = a^{4n^4} b^{2n^2}$ η οποία ανήκει στην L και έχει μήκος μεγαλύτερο από n. Στη συνέχεια, θα λάβουμε υπόψιν μας κάθε πιθανό χωρισμό της w υπό τους περιορισμούς του Θεωρήματος Άντλησης (δηλαδή, $w = uvxyz$ όπου $|vxy| \le n$ και $|vy| \ge 1$), και σε **κάθε** περίπτωση, θα βρούμε κάποιο i τέτοιο ώστε η συμβολοσειρά uv^ixy^iz να **μην** ανήκει στη γλώσσα L.

Θεωρούμε τις εξής περιπτώσεις:

1. *Είτε το v είτε το y περιέχει και a και b*: Χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω ότι το v περιέχει και a και b, δηλαδή, $v = a^t b^{t'}$ όπου $t, t' > 0$ (η περίπτωση το y να περιέχει και a και b είναι ανάλογη). Τότε η συμβολοσειρά uv^2xy^2z περιέχει το $v^2 = a^t b^{t'} a^t b^{t'}$, δηλαδή, περιέχει ba (επειδή $t, t' > 0$), και συνεπώς $uv^2xy^2z \notin L$.

2. *Καθένα από τα v και y περιέχει είτε μόνο a είτε μόνο b*: Έστω ότι τα v και y περιέχουν συνολικά p a και q b, δηλαδή, σε κάθε επανάληψη ("άντληση") των v και y έχουμε p επιπλέον a και q επιπλέον b. Τότε,

$$uv^ixy^iz \;=\; a^{4n^4+(i-1)p}\, b^{2n^2+(i-1)q}, \tag{1}$$

ενώ ο περιορισμός του Θεωρήματος Άντλησης ότι $|vxy| \le n$ συνεπάγεται ότι

$$p + q \le n. \tag{2}$$

Διακρίνουμε τις εξής δύο υποπεριπτώσεις:

(i) *$q > p$:* Τότε, για $i = 4n^4 + 1$, η εξίσωση (1) συνεπάγεται

$$uv^ixy^iz \;=\; a^{4n^4+4n^4p}\, b^{2n^2+4n^4q}.$$

Αλλά, επειδή $q > p$, έχουμε

$$q \ge p+1 \Longrightarrow 4n^4q \ge 4n^4(p+1) \Longrightarrow 4n^4q + 2n^2 > 4n^4 + 4n^4p,$$

δηλαδή, το πλήθος των a είναι μικρότερο από το πλήθος των b. Όμως τότε το πλήθος των a δεν είναι δυνατόν να είναι κάποιο θετικό ακέραιο πολλαπλάσιο του πλήθους των b και άρα η συμβολοσειρά $uv^{4n^4+1}xy^{4n^4+1}z$ δεν ανήκει στη γλώσσα L.

(ii) *$q \le p$:* Τότε, για $i = 2$,

$$uv^ixy^iz \;=\; uv^2xy^2z \;=\; a^{4n^4+p}\,b^{2n^2+q}.$$

Η συμβολοσειρά $a^{4n^4+p}\,b^{2n^2+q}$ ανήκει στη γλώσσα L αν και μόνον αν ο αριθμός $2n^2+q$ διαιρεί ακέραια τον $4n^4+p$. Καθώς ο $2n^2+q$ διαιρεί ακέραια τον $4n^4-q^2 = (2n^2+q)(2n^2-q)$ και ισχύει ότι $4n^4+p = 4n^4-q^2+p+q^2$, συμπεραίνουμε ότι ο $2n^2+q$ διαιρεί ακέραια τον $4n^4+p$ αν και μόνον αν ο $2n^2+q$ διαιρεί ακέραια τον $p+q^2$. Αλλά αυτό είναι αδύνατον, καθώς $p+q \le n$ (εξίσωση (2)) και άρα $p+q^2 < 2n^2 < 2n^2+q$. Συνεπώς, η συμβολοσειρά uv^2xy^2z δεν ανήκει στη γλώσσα L.

Άρα, σε κάθε μία από τις περιπτώσεις που θεωρήσαμε (και οι οποίες καλύπτουν όλους τους πιθανούς χωρισμούς της συμβολοσειράς w υπό τους περιορισμούς του Θεωρήματος Άντλησης), βρήκαμε κάποιο i για το οποίο η συμβολοσειρά uv^ixy^iz δεν ανήκει στην L. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με το Θεώρημα Άντλησης για γλώσσες χωρίς συμφραζόμενα και άρα η υπόθεσή μας ότι η L είναι γλώσσα χωρίς συμφραζόμενα δεν είναι αληθής.