Αναγωγές

Αναγωγές

Μη Διαγνώσιμες Γλώσσες

Αναγωγές

Ανάγοντας ένα πρόβλημα σε ένα άλλο μάς επιτρέπει να **αποδείξουμε ιδιότητες** του ενός προβλήματος από το άλλο.

Αναγωγή

Έστω γλώσσες $L_1 \in \Sigma_1^*$ και $L_2 \in \Sigma_2^*$.
Μια **αναγωγή** από την L_1 στην L_2 είναι μια **συνάρτηση** $f : \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_2^*$
η οποία μπορεί να **υπολογιστεί από Μ.Τ.** και
τέτοια ώστε $x \in L_1$ **αν και μόνο αν** $f(x) \in L_2$.

Θεώρημα

Έστω **αναγωγή** f από μια γλώσσα L_1 σε μια άλλη L_2.

- Εάν η L_2 είναι διαγνώσιμη (αντίστοιχα, αναγνωρίσιμη) τότε **και** η L_1 είναι διαγνώσιμη (αντίστοιχα, αναγνωρίσιμη) .
- Εάν η L_1 **δεν** είναι διαγνώσιμη (αντίστοιχα, αναγνωρίσιμη) τότε **ούτε** και η L_2 είναι διαγνώσιμη (αντίστ., αναγνωρίσιμη).

Μη Διαγνώσιμες Γλώσσες

Μη διαγνώσιμες γλώσσες (Μη επιλύσιμα προβλήματα)

- $\{ \langle M , w \rangle \mid$ η Μ.Τ. ***M*** **αποδέχεται** την είσοδο ***w*** $\}$
- $\{ \langle M \rangle \mid$ για τη Μ.Τ. ***M***, $L(M) = \varnothing$ $\}$
- $\{ \langle M \rangle \mid$ η Μ.Τ. ***M*** **αποδέχεται** την **κενή συμβολοσειρά** $\}$
- $\{ \langle M \rangle \mid$ η Μ.Τ. ***M*** **αποδέχεται κάθε** είσοδο $\}$
- $\{ \langle M_1, M_2 \rangle \mid$ για τις Μ.Τ. M_1 **και** M_2, $L(M_1) = L(M_2)$ $\}$
- $\{ \langle M \rangle \mid$ η γλώσσα $L(M)$ της Μ.Τ. ***M*** είναι **κανονική** ή **ανεξάρτητη συμφραζομένων** ή **διαγνώσιμη** $\}$
- …

Απόδειξη Μη Διαγνωσιμότητας με Αναγωγή

Μεθοδολογία

Για να **αποδείξουμε** ότι μια γλώσσα L_1 **δεν** είναι **διανώσιμη**:

- **υποθέτουμε** ότι η L_1 είναι **διαγνώσιμη**,
- χρησιμοποιούμε τον **υποτιθέμενο διαγνώστη** της L_1 για να **κατασκευάσουμε έναν διαγνωστη** για κάποια **γνωστή μη διαγνώσιμη** γλώσσα L_2 (δηλαδή ανάγουμε την L_2 στην L_1)
- καταλήγουμε σε **άτοπο** $\Rightarrow$ η L_1 **δεν** είναι **διαγνώσιμη**.

***Προσοχή*:** ανάγουμε μία **γνωστή μη διαγνώσιμη** γλώσσα **στη** γλώσσα που θέλουμε να δείξουμε ότι **δεν είναι διαγνώσιμη**.

Παραδείγματα Αναγωγών

Παράδειγμα.

Η γλώσσα **Κενότητα/ΤΜ** = { $\langle M \rangle$ | η M είναι Μ.Τ. με $L(M) = \varnothing$ } **δεν** είναι **διαγνώσιμη**.

Υποθέτουμε ότι η **Κενότητα/ΤΜ** είναι **διαγνώσιμη** και έστω R **διαγνώστης** για αυτήν.

Αναγωγή από τη γλώσσα **Αποδοχή/ΤΜ**

Δι αγ ν ώ στ η ς

Θεωρούμε Μ.Τ. S η οποία: για δοθείσα Μ.Τ. M και είσοδο w,

- σχηματίζει την κωδικοποίηση **Μ.Τ.** M_1 η οποία: για είσοδο x, αν $x = w$, **προσομοιώνει την** M, αλλιώς **απορρίπτει**
- δίδει την **κωδικοποίηση της** M_1 ως είσοδο στον **διαγνώστη** R
- **αποδέχεται αν ο** R **απορρίψει** αλλιώς **απορρίπτει.**

Η S **αποδέχεται** **ανν** ο R απορρίψει $\Leftrightarrow$ $L(M_1) \neq \varnothing$ $\Leftrightarrow$ $w \in L(M)$

$\Rightarrow$ η Μ.Τ. S είναι **διαγνώστης** για τη γλώσσα **Αποδοχή/ΤΜ**. **Άτοπο**.

$\Rightarrow$ **η Κενότητα/ΤΜ δεν είναι διαγνώσιμη**

Παραδείγματα Αναγωγών

Παράδειγμα.

Η γλώσσα **Ισοδυναμία/TM** **δεν** είναι **διαγνώσιμη** όπου

Ισοδυναμία/TM $= \{ \langle M_1, M_2 \rangle \mid M_1, M_2$ είναι Μ.Τ. & $L(M_1) = L(M_2) \}$

Υποθέτουμε ότι η **Ισοδυναμία/TM** είναι **διαγνώσιμη** και έστω R **διαγνώστης** για αυτήν.

Αναγωγή από τη γλώσσα **Κενότητα/TM**

Διαγνώστης

Θεωρούμε Μ.Τ. S η οποία: για δοθείσα Μ.Τ. M,

- στον **διαγνώστη** R, δίδει

  ως είσοδο M_1 την **κωδικοποίηση της** M και

  ως είσοδο M_2 την **κωδικοποίηση** Μ.Τ. M_0 με $L(M_0) = \varnothing$

- **αποδέχεται αν ο** R **αποδεχθεί** αλλιώς **απορρίπτει.**

Αποδοχή **ανν** ο R αποδεχθεί **ανν** $L(M_1) = L(M_2) \Leftrightarrow L(M) = L(M_0) = \varnothing$

$\Rightarrow$ η Μ.Τ. S είναι **διαγνώστης** για τη γλώσσα **Κενότητα/TM**. **Άτοπο.**

$\Rightarrow$ **η Ισοδυναμία/TM δεν είναι διαγνώσιμη**

Παραδείγματα Αναγωγών

Παράδειγμα.

Η γλώσσα **~~Τερματισμός~~/TM** = { ⟨***M*, *w***⟩ | η ***M*** είναι Μ.Τ που με είσοδο ***w*** μπαίνει στην $q_{\text{αποδοχής}}$ ή $q_{\text{απόρριψης}}$ } **δεν** είναι **διαγνώσιμη**.

Υποθέτουμε ότι η **~~Τερματισμός~~/TM** είναι **διαγνώσιμη** και έστω ***R*** **διαγνώστης** για αυτήν.

Αναγωγή από τη γλώσσα **Αποδοχή/TM**

Διαγνώστης

Θεωρούμε Μ.Τ. ***S*** η οποία: για δοθείσα Μ.Τ. ***M*** και είσοδο ***w***,

- **εκτελεί** τον **διαγνώστη *R*** για ***M*, *w***
- εάν **ο *R* απορρίψει, απορρίπτει** *{η **M** για **w** λειτουργεί ατέρμονα}*
- αλλιώς η ***S*** **προσομοιώνει** τη Μ.Τ. ***M*** με είσοδο ***w*** και
- **αποδέχεται αν η *M* αποδεχθεί** αλλιώς **απορρίπτει.**

⇒ η Μ.Τ. ***S*** είναι **διαγνώστης** για τη γλώσσα **Αποδοχή/TM**. **Άτοπο**.

⇒ η ~~Τερματισμός~~/TM δεν είναι διαγνώσιμη

Παραδείγματα Αναγωγών

Παράδειγμα.

Η γλώσσα **Κανονικότητα/TM** = { $\langle M \rangle$ | η M είναι Μ.Τ και η $L(M)$ είναι **κανονική γλώσσα** } **δεν** είναι **διαγνώσιμη**.

Υποθέτουμε ότι η **Κανονικότητα/TM** είναι **διαγνώσιμη** και έστω ***R*** **διαγνώστης** για αυτήν.

Αναγωγή από τη γλώσσα **Αποδοχή/TM**

Δι αγ ν ώ στ η ς

Θεωρούμε Μ.Τ. S η οποία: για δοθείσα Μ.Τ. M και είσοδο w,

- σχηματίζει την κωδικοποίηση **Μ.Τ.** M_2 η οποία: για είσοδο x, αν $x \in \{0^n 1^n\}$, **αποδέχεται αλλιώς** προσομοιώνει την M για w
- δίδει την **κωδικοποίηση της** M_2 ως είσοδο στον **διαγνώστη** R
- **αποδέχεται αν ο** R **αποδεχθεί** αλλιώς **απορρίπτει.**

Η S **αποδέχεται αννν** ο R αποδεχθεί $\Leftrightarrow$ $L(M_2)$ **κανονική** $\Leftrightarrow$ $w \in L(M)$

$\Rightarrow$ η Μ.Τ. S είναι **διαγνώστης** για τη γλώσσα **Αποδοχή/TM**. **Άτοπο**.

$\Rightarrow$ **η Κανονικότητα/TM δεν είναι διαγνώσιμη**

Πιο Απτά Μη Επιλύσιμα Προβλήματα

Το Πρόβλημα της Πλακόστρωσης

Είναι δυνατόν να πλακοστρώσουμε το **1ο τεταρτημόριο** με **άπειρο** απόθεμα από δοθέν **πεπερασμένο σύνολο πλακιδίων**;

Το Πρόβλημα Αντιστοιχίας του Post

Δίδεται **άπειρο** απόθεμα από δοθέν **πεπερασμένο σύνολο πλακιδίων** που έχουν μία **συμβολοσειρά** (*από κάποιο αλφάβητο*) στο **επάνω** μέρος και μία στο **κάτω** μέρος.

Υπάρχει **ακολουθία πλακιδίων** στην οποία η παράθεση των συμβολοσειρών στο **επάνω** μέρος **ισούται** με την παράθεση των συμβολοσειρών στο **κάτω** μέρος;

Π.χ., $\left\{ \boxed{\begin{matrix} a \\ ab \end{matrix}}, \boxed{\begin{matrix} b \\ ca \end{matrix}}, \boxed{\begin{matrix} ca \\ a \end{matrix}}, \boxed{\begin{matrix} abc \\ c \end{matrix}} \right\}$

***Λύση*:** 1ο-2ο-3ο-1ο-4ο

Για αυτά τα προβλήματα **δεν ξέρουμε πότε να απαντήσουμε ΌΧΙ**.

Το Θεώρημα του Rice

εκτός ύλης

Θεώρημα του Rice

Έστω $\boldsymbol{T}$ **μη κενό**, **γνήσιο** **υποσύνολο** της κλάσης των **αναγνωρίσιμων** γλωσσών. Τότε, η ακόλουθη γλώσσα **δεν** είναι **διαγνώσιμη**:

$$\boldsymbol{L_T} = \{\, \langle \boldsymbol{M} \rangle \mid \text{η } \boldsymbol{M} \text{ είναι μηχανή Turing } \textbf{ και } \boldsymbol{L(M) \in T} \,\}$$

Παράδειγμα

Αποδείξτε ότι η $\boldsymbol{L} = \{\, \langle \boldsymbol{M} \rangle \mid \boldsymbol{\varepsilon} \in \boldsymbol{L(M)} \,\}$ **δεν** είναι **διαγνώσιμη**.

Με βάση το Θεώρημα του Rice, αρκεί να θεωρήσουμε το:

$$\boldsymbol{T} = \{\, \boldsymbol{L(M)} : \text{ η } \boldsymbol{M} \text{ είναι Μ.Τ. } \textbf{ και } \boldsymbol{\varepsilon \in L(M)} \,\}.$$

Όμως υπάρχουν μηχανές Turing M_1, M_2:

$$L(M_1) = \Sigma^* \in \boldsymbol{T} \quad \text{και} \quad L(M_2) = \varnothing \notin \boldsymbol{T}.$$

Δηλαδή, το $\boldsymbol{T}$ είναι ένα **μη κενό**, **γνήσιο υποσύνολο** της κλάσης των **αναγνωρίσιμων** γλωσσών $\Rightarrow$ η $\boldsymbol{L}$ **δεν** είναι **διαγνώσιμη**.

L: ούτε η L ούτε η $\overline{L}$ είναι αναγνωρίσιμη

εκτός ύλης

Θεώρημα

Υπάρχουν γλώσσες L τέτοιες ώστε **ούτε η L ούτε** το **συμπλήρωμα της** L είναι **αναγνωρίσιμες**.

Λήμμα

Έστω $L_=$ = **Ισοδυναμία/ΤΜ** = $\{ \langle M_1, M_2 \rangle \mid L(M_1) = L(M_2) \}$.

Ούτε η $L_=$ ούτε το **συμπλήρωμα της** $L_=$ είναι **αναγνωρίσιμη** γλώσ.

Απόδειξη

$\overline{A}$ = $\overline{\textbf{Αποδοχή/ΤΜ}}$ **δεν** είναι **αναγνωρίσιμη**

Για δοθείσα Μ.Τ. M και συμβολοσειρά w,

έστω $N_{M,w}$ Μ.Τ. (με αλφάβητο Σ) η οποία

σβήνει την είσοδό της, **γράφει w** και **προσομοιώνει την M**.

Τότε $L(N_{M,w}) = \Sigma^*$ αν $w \in L(M)$

και $L(N_{M,w}) = \varnothing$ αν $w \notin L(M)$.

L: ούτε η L ούτε η $\overline{L}$ είναι αναγνωρίσιμη

εκτός ύλης

$\overline{A} = \overline{\text{Αποδοχή/TM}}$ **δεν** είναι **αναγνωρίσιμη**

Απόδειξη (συνέχεια)

$L(N_{M,w}) = \Sigma^*$ αν $w \in L(M)$

$L(N_{M,w}) = \varnothing$ αν $w \notin L(M)$

- **$L_=$ όχι αναγνωρίσιμη**

  Αναγωγή $\overline{A}$ σε $L_=$: έστω R Μ.Τ. που αναγνωρίζει την $L_=$.

  Θεωρούμε Μ.Τ. X με **είσοδο M, w** η οποία

  καλεί την R με είσοδο $M_\varnothing$ & $N_{M,w}$ όπου $L(M_\varnothing) = \varnothing$.

  Τότε: η X αποδέχεται M, w $\Leftrightarrow$ $L(M_\varnothing) = L(N_{M,w})$ $\Leftrightarrow$ $w \notin L(M)$

  $\Rightarrow$ *η X αναγνωρίζει την $\overline{A}$. Άτοπο.*

- **$\overline{L_=}$ όχι αναγνωρίσιμη**

  Αναγωγή $\overline{A}$ σε $\overline{L_=}$: έστω S Μ.Τ. που αναγνωρίζει την $\overline{L_=}$.

  Θεωρούμε Μ.Τ. Y με **είσοδο M, w** η οποία

  καλεί την S με είσοδο $M_\forall$ & $N_{M,w}$ όπου $L(M_\forall) = \Sigma^*$.

  Τότε: η Y αποδέχεται M, w $\Leftrightarrow$ $L(M_\forall) \neq L(N_{M,w})$ $\Leftrightarrow$ $w \notin L(M)$

  $\Rightarrow$ *η Y αναγνωρίζει την $\overline{A}$. Άτοπο.*