Διαγνωσιμότητα

Ιδιότητες Διαγνώσιμων & Αναγνωρίσιμων Γλωσσών
Διαγνώσιμες Γλώσσες
Το Πρόβλημα του Τερματισμού
Μια Μη Διαγνώσιμη Γλώσσα
Μια Μη Αναγνωρίσιμη Γλώσσα

Ιδιότητες Γλωσσών

Θεώρημα

Κάθε **διαγνώσιμη** γλώσσα είναι και **αναγνωρίσιμη**.

***Προσοχή*: υπάρχουν** αναγνωρίσιμες γλώσσες που **δεν** είναι διαγνώσιμες.

Θεώρημα

Το **συμπλήρωμα κάθε διαγνώσιμης** γλώσσας L είναι **διαγνώσιμη**.

***Απόδειξη*:** σε **διαγνώστη** της L, **εναλλάσσουμε** τις $q_{αποδοχής}$ και $q_{απόρριψης}$.

Θεώρημα

Μια γλώσσα L είναι **διαγνώσιμη** **αν και μόνον αν**

η L **και** το **συμπλήρωμά** της L είναι **αναγνωρίσιμες** γλώσσες.

***Απόδειξη*:**

(⇒) L διαγνώσιμη $\Rightarrow$ L αναγνωρίσιμη

L διαγνώσιμη $\Rightarrow$ $\overline{L}$ διαγνώσιμη $\Rightarrow$ $\overline{L}$ αναγνωρίσιμη

(⇐) εκτελούμε τις αντίστοιχες Μ.Τ. **παράλληλα**.

Ιδιότητες Γλωσσών

Συνεπώς, για **κάθε** γλώσσα L, **ακριβώς 1** από τα εξής ισχύει:

1. **τόσο** η L **όσο και** η $\overline{L}$ είναι **διαγνώσιμη**
2. **ούτε** η L **ούτε** η $\overline{L}$ είναι **αναγνωρίσιμη** (π.χ. η Ισοδυναμία/TM)
3. **μία** από τις L, $\overline{L}$ είναι **αναγνωρίσιμη αλλά όχι διαγνώσιμη** ενώ η **άλλη** **δεν είναι αναγνωρίσιμη** (π.χ. η Αποδοχή/TM)

L και $\overline{L}$	$\overline{L}$ *διαγνώσιμη*	$\overline{L}$ *αναγνωρίσιμη & όχι διαγνώσιμη*	$\overline{L}$ *όχι αναγνωρίσιμη*
L *διαγνώσιμη*	①		
L *αναγνωρίσιμη & όχι διαγνώσιμη*			③
L *όχι αναγνωρίσιμη*		③	②

Ιδιότητες Γλωσσών

Θεώρημα

Οι **διαγνώσιμες** γλώσσες είναι **κλειστές** ως προς την **ένωση** και την **τομή**.

Οι **αναγνωρίσιμες** γλώσσες είναι **κλειστές** ως προς την **ένωση** και την **τομή**.

***Απόδειξη*:** εκτελούμε τις αντίστοιχες Μ.Τ. **παράλληλα**.

Επίσης, μπορούμε να δείξουμε ότι:

Οι **διαγνώσιμες** και οι **αναγνωρίσιμες** γλώσσες είναι **κλειστές** ως προς την **παράθεση** (συναρμογή) και
την **πράξη άστρο** (Kleene star).

***Απόδειξη*:** μη αιτιοκρατικός χωρισμός της συμβολοσειράς εισόδου.

Κατηγοριοποίηση Προβλημάτων *(ως προς είδος)*

Προβλήματα Απόφασης

έχουν **απάντηση ΝΑΙ / ΌΧΙ**

Π.χ. ***G***, ***u***, ***v***: **υπάρχει** διαδρομή στο ***G*** από τον κόμβο ***u*** στον ***v***;

Προβλήματα Αναζήτησης

έχουν ως απάντηση μια δομή που **πληροί κάποιες απαιτήσεις**

Π.χ. ***G***, ***u***, ***v***: **βρες** διαδρομή στο ***G*** από τον κόμβο ***u*** στον ***v***.

Προβλήματα Βελτιστοποίησης

έχουν ως απάντηση μια δομή που **πληροί κάποιες απαιτήσεις** και **βελτιστοποιεί κάποιο κριτήριο**

Π.χ. ***G***, ***u***, ***v***: **βρες** μια **συντομότερη** διαδρομή στο ***G*** από τον κόμβο ***u*** στον ***v***.

Τα προβλήματα απόφασης δεν είναι πιο εύκολα από τα άλλα είδη προβλημάτων.

Διαγνώσιμες Γλώσ. - Επιλύσιμα Προβλήματα

Θα ασχοληθούμε με **Προβλήματα Απόφασης**.

Για **κάθε** πρόβλημα **απόφασης Π** για **αντικείμενα τύπου** A:

L_{Π} = { a | το a είναι αντικείμενο **τύπου** A **και**
το πρόβλημα **Π** για το a έχει **απάντηση ΝΑΙ** }

π.χ., για το πρόβλημα «***G***, ***u***, ***v***: **υπάρχει** διαδρομή στο ***G*** από τον ***u*** στον ***v*;**», η σχετική γλώσσα περιέχει τις **κωδικοποιήσεις γραφήματος *G*** και **κόμβων *u*, *v*** που **συνδέονται με διαδρομή** στο ***G***.

Με βάση τη Θέση Church-Turing

Επιλύσιμο πρόβλημα Π ⇔ **Διαγνώσιμη γλώσσα** L_{Π}

⇕

υπάρχει **αλγόριθμος** για το πρόβλημα

Διαγνώσιμες Γλώσσες για Κανονικές Γλώσσες

Θεώρημα

Η γλώσσα **Αποδοχή/DFA** είναι **διαγνώσιμη** όπου

Αποδοχή/DFA = { $\langle \boldsymbol{B}, \boldsymbol{w} \rangle$ | το $\boldsymbol{B}$ είναι **Αιτ.Π.Α.** που αποδέχεται το $\boldsymbol{w}$ }.

***Απόδειξη*: προσομοίωση** του B.

Θεώρημα

Η γλώσσα **Αποδοχή/NFA** είναι **διαγνώσιμη** όπου

Αποδοχή/NFA = { $\langle \boldsymbol{B}, \boldsymbol{w} \rangle$ | το $\boldsymbol{B}$ είναι **μη Αιτ.Π.Α.** που αποδέχεται το $\boldsymbol{w}$ }.

***Απόδειξη*:** $\boldsymbol{B} \rightarrow$ **Αιτ.**Π.Α. $\boldsymbol{B'} \rightarrow$ **προσομοίωση** του $\boldsymbol{B'}$.

Διαγνώσιμες Γλώσσες για Κανονικές Γλώσσες

Θεώρημα

Η γλώσσα **Παραγωγή/REX** είναι **διαγνώσιμη** όπου

Παραγωγή/REX = { $\langle R, w \rangle$ | η R είναι **Κ.Ε.** που παράγει το w }.

***Απόδειξη*:** R → **μη Αιτ.**Π.Α. B → **Αιτ.**Π.Α. B' → **προσομοίωση** του B'.

Θεώρημα

Η γλώσσα **Κενότητα/DFA** είναι **διαγνώσιμη** όπου

Κενότητα/DFA = { $\langle B \rangle$ | το B είναι **Αιτ.Π.Α.** και $L(B) = \varnothing$ }.

***Απόδειξη*:** **σήμανση** των καταστάσεων στις οποίες πηγαίνουμε **από την αρχική κατάσταση** του B και έλεγχος εάν υπάρχει **σημασμένη τελική** κατάσταση.

Διαγνώσιμες Γλώσσες για Κανονικές Γλώσσες

Θεώρημα

Η γλώσσα **Ισοδυναμία/ DFA** είναι **διαγνώσιμη** όπου

$$\textbf{Ισοδυναμία/ DFA} = \{ \langle A, B\rangle \mid \text{τα } A, B \text{ είναι } \textbf{Αιτ.Π.Α.} \text{ και } L(A) = L(B) \}.$$

Απόδειξη*:** από τα Αιτ.Π.Α. ***A και ***B***, κατασκευή Αιτ.Π.Α. που αναγνωρίζει τη γλώσσα

$$L(C) = (L(A) - L(B)) \cup (L(B) - L(A))$$
$$= (L(A) \cap \overline{L(B)}) \cup (L(B) \cap \overline{L(A)})$$

και έλεγχος εάν $L(C) = \varnothing$.

Διαγνώσιμες Γλώσσες για Γλώσσες Ανεξ. Συμφ.

Θεώρημα

Η γλώσσα **Παραγωγή/CFG** είναι **διαγνώσιμη** όπου

Παραγωγή/CFG = { $\langle G, w \rangle$ | η G είναι **Γρ.Α.Σ.** που παράγει το w }.

Απόδειξη*: G → Γ.Α.Σ. G'** σε **κανονική μορφή Chomsky,** εκτέλεση **όλων** των παραγωγών της G' **με 2 |*w*| - 1 βήματα** και έλεγχος εάν **παράγεται η *w.

Θεώρημα

Η γλώσσα **Κενότητα/CFG** είναι **διαγνώσιμη** όπου

Κενότητα/CFG = { $\langle G \rangle$ | η G είναι **Γρ.Α.Σ.** και $L(G) = \varnothing$ }.

***Απόδειξη*: σήμανση** των **τερματικών συμβόλων**, επαναληπτική **σήμανση μεταβλητών** με **σημασμένο δεξί μέλος** κανόνα και έλεγχος εάν έχει **σημανθεί** η **αρχική μεταβλητή**.

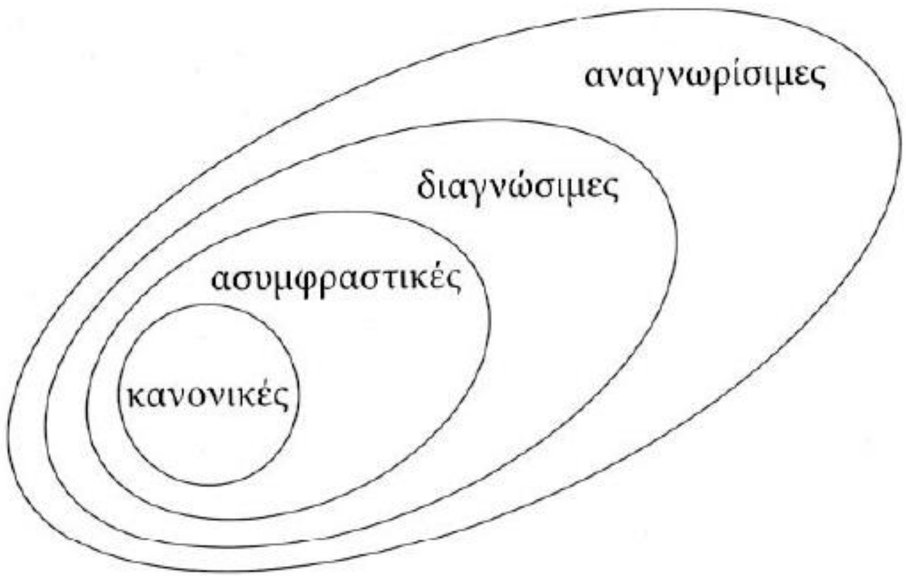
Διαγνώσιμες Γλώσσες για Γλώσσες Ανεξ. Συμφ.

Θεώρημα

Κάθε γλώσσα ανεξάρτητη συμφραζομένων είναι **διαγνώσιμη**.

Απόδειξη*:** Έστω ***G **Γρ.Α.Σ.** για τη γλώσσα ανεξάρτητη συμφραζομένων. Για είσοδο ***w***, εκτελούμε τη μηχανή Turing που **διαγιγνώσκει** τη γλώσσα **Παραγωγή/CFG** για $\langle G, w \rangle$.

Συνεπώς:



Καθολική Μηχανή Turing

Η μηχανή Turing ***U*** καλείται **καθολική μηχανή Turing** εάν κατά την προσομοίωση **οποιασδήποτε** μηχανής Turing *M* δίνει τα **ίδια αποτελέσματα** με την *M*.
Δηλαδή, κατά την **προσομοίωση** μιας Μ.Τ. ***M***, για είσοδο ***w***,
η ***U*** **αποδέχεται / απορρίπτει / λειτουργεί ατέρμονα** **αν και μόνο αν**
η ***M*** **αποδέχεται / απορρίπτει / λειτουργεί ατέρμονα** για είσοδο ***w*.**

A. Turing **(1936)**

3 ταινίες

1η ταινία: **ταινία εργασίας**, περιέχει κωδικοποιημένο το **περιεχόμενο της ταινίας** της ***M***

2η ταινία: κωδικοποιημένη η **τρέχουσα κατάσταση** της ***M***

3η ταινία: **κωδικοποίηση** της ***M***

Καθολική Μηχανή Turing

Κωδικοποίηση $\langle M \rangle$ οποιασδήποτε Μ.Τ. M

∃ κωδικοποίηση μόνο με 2 σύμβολα

Θεώρημα
Υπάρχουν γλώσσες που **δεν είναι αναγνωρίσιμες**.
Απόδειξη
Το σύνολο των **δυνατών γλωσσών** **δεν είναι αριθμήσιμο** (με χρήση διαγωνιοποίησης), ενώ
το σύνολο των **μηχανών Turing** (ισοδύναμα, των **κωδικοποιή-σεών** τους) είναι **αριθμήσιμο**.

Το Πρόβλημα του Τερματισμού

Πρόβλημα του Τερματισμού

Τερματίζει (μπαίνει στην $q_{αποδοχής}$ ή $q_{απόρριψης}$)

δοθείσα μηχανή Turing *M* για **δοθείσα είσοδο *w***;

Ας θεωρήσουμε το πρόβλημα αν ένα **πρόγραμμα τερματίζει (ολο-κληρώνεται ομαλά)**. Αν υπάρχει αλγόριθμος, έστω πρόγραμμα **halts(*P*,*X*)** που επιστρέφει **ΝΑΙ** εάν το ***πρόγραμμα P*** **τερματίζει** για **είσοδο *X*** και **ΌΧΙ** σε αντίθετη περίπτωση.

Τότε ορίζουμε **_D_(_P_)**

begin

while (το **halts(*P*,*P*)** επιστρέφει **ΝΑΙ**) **do**

;

end

Τι κάνει το ***D*(*D*)**;

Το Πρόβλημα του Τερματισμού

Αποδοχή/ΤΜ = { ⟨M, w⟩ | η Μ.Τ. M **αποδέχεται την είσοδο** w }

Το Πρόβλημα του Τερματισμού δεν είναι επιλύσιμο

Θεώρημα
Η γλώσσα **Αποδοχή/ΤΜ δεν είναι διαγνώσιμη**.

Απόδειξη
Έστω ότι η **Αποδοχή/ΤΜ** είναι **διαγνώσιμη** και
έστω L_S = { ⟨M⟩ | η Μ.Τ. M **αποδέχεται** την είσοδο ⟨M⟩ }
⇒ L_S **διαγνώσιμη** ⇒ **συμπλήρωμα της L_S διαγνώσιμη**.
Έστω D Μ.Τ. που **διαγιγνώσκει** το **συμπλήρωμα της L_S**.

Τι κάνει η Μ.Τ. D με είσοδο ⟨D⟩;

Η Μ.Τ. D **αποδέχεται** την είσοδο ⟨D⟩
⇔ ⟨D⟩ ∈ **συμπλήρωμα της L_S** (*από ορισμό* D)
⇔ η Μ.Τ. D **δεν αποδέχεται** την είσοδο ⟨D⟩. (*από ορισμό* L_S)

Άτοπο

Αναγνωρίσιμες – Διαγνώσιμες Γλώσσες

Σημείωση

με χρήση της **καθολικής μηχανής Turing**, δείχνουμε ότι η **γλώσσα Αποδοχή/ΤΜ** είναι **αναγνωρίσιμη**.

Πορίσματα

- Η κλάση των **διαγνώσιμων** γλωσσών είναι **γνήσιο υποσύνολο** των **αναγνωρίσιμων** γλωσσών.
- Το **συμπλήρωμα της γλώσσας Αποδοχή/ΤΜ** **δεν** είναι **αναγνωρίσιμη**.
- Η κλάση των **αναγνωρίσιμων** γλωσσών **δεν** είναι **κλειστή** ως προς τη **συμπλήρωση**.