Ισοδυναμία Αιτ. Και μη Αιτ. Π.Α.

Δύο Π.Α. M_1 και M_2 είναι **ισοδύναμα αnn** $L(M_1) = L(M_2)$.

Έστω $M = (Q, \Sigma, q_0, \Delta, F)$ μη Αιτ. Π.Α.
Για κάθε κατάσταση $q \in Q$, ορίζουμε ως $E(q) \subseteq Q$ το σύνολο των καταστάσεων του M στις οποίες μπορούμε να φτάσουμε **από την** q **χωρίς να διαβαστεί κανένα σύμβολο** από την είσοδο:

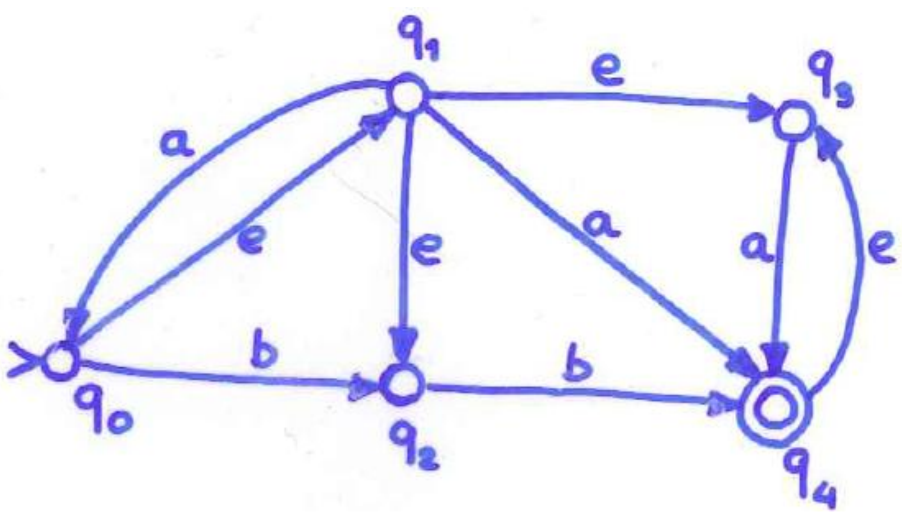
$$E(q) = \{ p \in Q: (q,e) \vdash^* (p,e) \}.$$

Δηλ., το $E(q)$ **περιέχει** την q **και** όλες τις καταστάσεις στις οποίες μπορούμε να φθάσουμε **από την** q ακολουθώντας **μεταβάσεις με επιγραφή** e.

Ισοδυναμία Αιτ. Και μη Αιτ. Π.Α.

Δηλ., το $E(q)$ **περιέχει** την q **και** όλες τις καταστάσεις στις οποίες μπορούμε να φθάσουμε **από την** q ακολουθώντας **μεταβάσεις με επιγραφή** e.

Π.χ.



$E(q_0) = \{ q_0, q_1, q_2, q_3 \}$

$E(q_1) = \{ q_1, q_2, q_3 \}$

$E(q_2) = \{ q_2 \}$

$E(q_3) = \{ q_3 \}$

$E(q_4) = \{ q_4, q_3 \}$

Ισοδυναμία Αιτ. Και μη Αιτ. Π.Α.

Θεώρημα

Έστω το μη Αιτ. Π.Α. $M = (Q, \Sigma, s, \Delta, F)$.

Το **Αιτιοκρ**.Π.Α. $M' = (Q', \Sigma', s', \delta, F')$ είναι **ισοδύναμο** με το M όπου

- $Q' = 2^Q$
- $\Sigma' = \Sigma$
- $s' = E(s)$
- $F' = \{ S \subseteq Q \mid S \cap F \neq \emptyset \}$
- $\forall\, S \subseteq Q$ και $\forall\, \alpha \in \Sigma$,

$$\delta(S, \alpha) = \cup_{p \in S} \{ E(q) \mid \forall\, (p, \alpha, q) \in \Delta \}$$

Απόδειξη με επαγωγή στο μήκος συμβολοσειράς εισόδου

Εκθετικό πλήθος καταστάσεων!!!

Π.Αυτόματα και Κανονικές Εκφράσεις

Θεώρημα

Η κλάση των γλωσσών που **αναγνωρίζουν τα Π.Α.** είναι **κλειστή** ως προς:

(α) **ένωση**

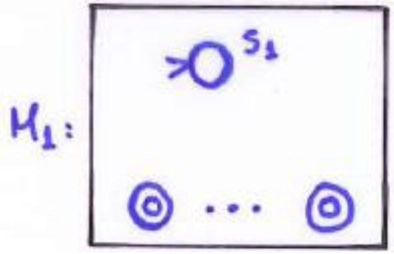
(β) **παράθεση** (συναρμογή)

(γ) **Kleene star** (σώρευση)

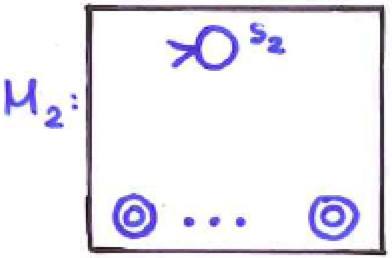
(δ) **συμπλήρωση**

(ε) **τομή**

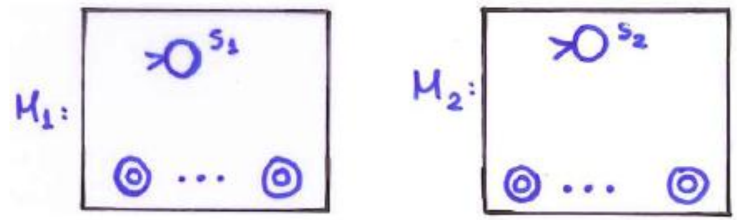
Για την απόδειξη, έστω



και

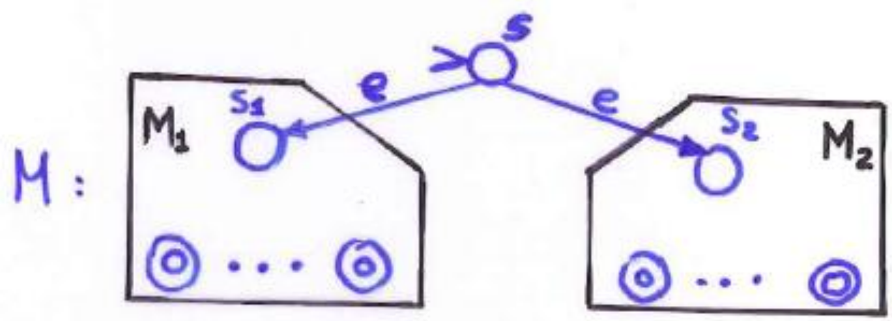


Π.Αυτόματα και Κανονικές Εκφράσεις



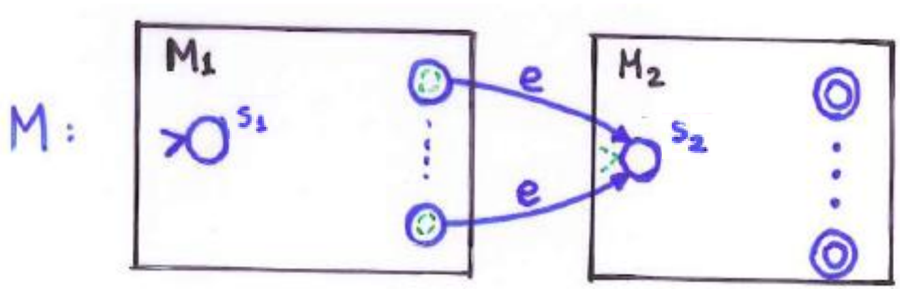
Απόδειξη

(α) **ένωση**



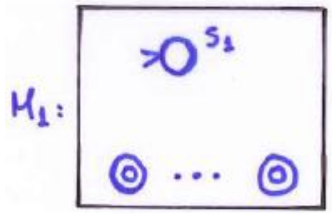
$$L(M) = L(M_1) \cup L(M_2)$$

(β) **παράθεση**



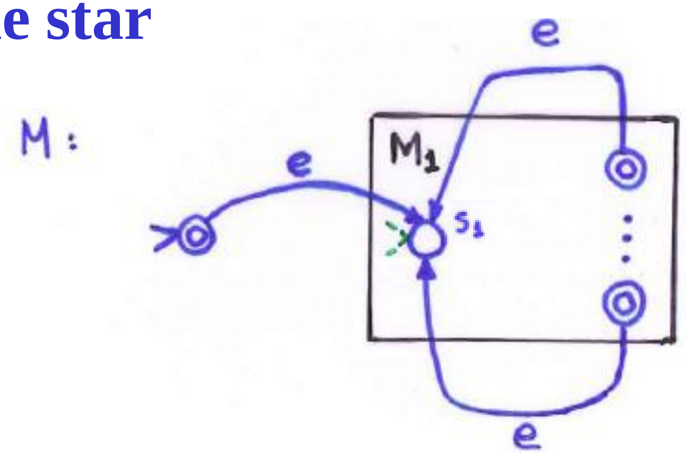
$$L(M) = L(M_1)\, L(M_2)$$

Π.Αυτόματα και Κανονικές Εκφράσεις



Απόδειξη

(γ) **Kleene star**



$L(M) = L(M_1)^*$

(δ) **συμπλήρωση**

Εάν $M = (Q, \Sigma, s, \delta, F)$ είναι **Αιτιοκρατικό** Π.Α. τότε για το Αιτ.Π.Α. $M' = (Q, \Sigma, s, \delta, Q - F)$ ισχύει ότι $L(M') = \Sigma^* - L(M)$.

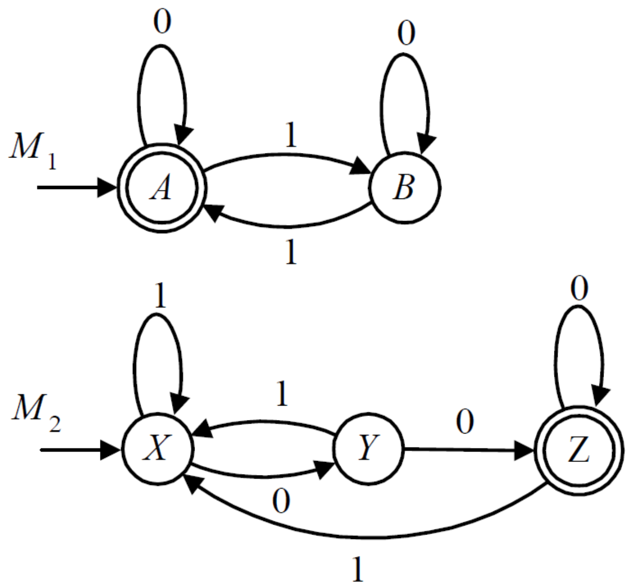
(ε) **τομή**

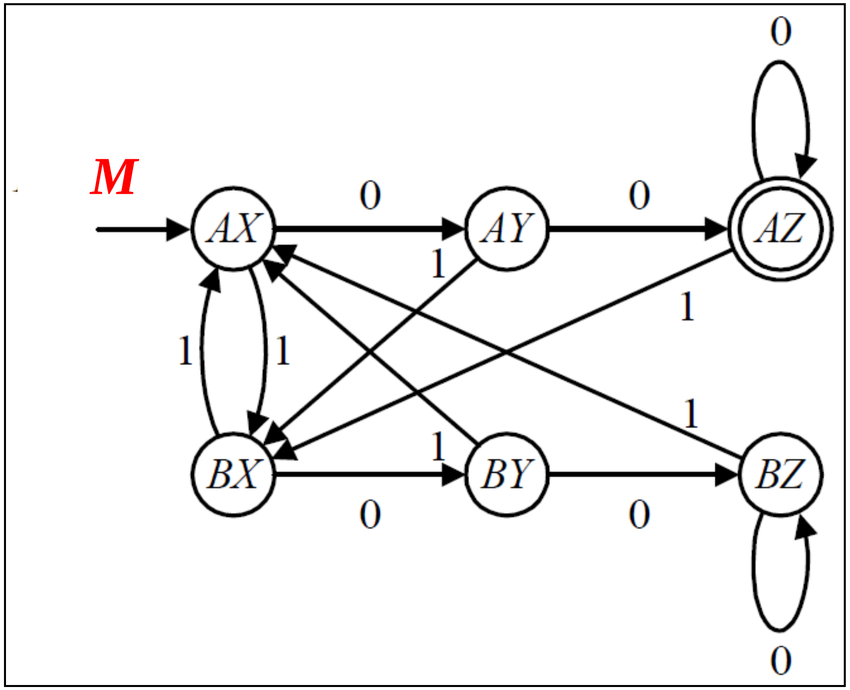
Ισχύει καθώς $A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$.

Π.Α. για την Τομή των Γλωσσών Π.Α.

Έστω Αιτ. Π. Α. $M_1 = (P, \Sigma, p_0, \delta_1, F_1)$ και $M_2 = (Q, \Sigma, q_0, \delta_2, F_2)$.
Το αυτόματο $M = (P\times Q, \ \Sigma, [p_0,q_0], \ \delta, F_1\times F_2)$ όπου
$\delta : (P\times Q) \times \Sigma \rightarrow (P\times Q)$ με $\delta([p,q], a) = [\delta_1(p, a), \delta_2(q, a)]$
αναγνωρίζει την **τομή** $L(M_1) \cap L(M_2)$.

Παράδειγμα





Π.Αυτόματα και Κανονικές Εκφράσεις

Δεδομένου ότι οι γλώσσες που αναγνωρίζονται από **Π.Α.** είναι **κλειστές ως προς την ένωση, παράθεση και Kleene star** **και** το ότι υπάρχουν **Π.Α.** για

- τη γλώσσα $\varnothing$ και
- τη γλώσσα $\{ \alpha \}$ για κάθε $\alpha \in \Sigma$,

$\Rightarrow$ **Θεώρημα Kleene**

Κάθε κανονική γλώσσα αναγνωρίζεται από κάποιο **Π.Α**

***Παράδειγμα*:** Π.Α. για **$(01)^* \cup 1^*$**

Επίσης, θα δείξουμε και το **αντίστροφο**, οπότε ισχύει ότι:

> Μια γλώσσα είναι **κανονική** **εάν και μόνον εάν** αναγνωρίζεται από κάποιο **πεπερασμένο αυτόματο**.

Ισοδυναμία Κ.Ε. και Π.Α.

Θεώρημα (***Θεώρημα Kleene***)

Έστω **ΠΑ** $M = (Q, \Sigma, p_1, \delta, F)$ με $Q=\{ p_1,\ldots, p_n \}$, $F=\{ p_{f_1},\ldots, p_{f_m} \}$.

Τότε υπάρχει κανονική έκφραση R που **περιγράφει την** $L(M)$.

Απόδειξη

$R_k(i,j) = \{ x \in \Sigma^* \mid$ η x αντιστοιχεί σε μια **διαδρομή** από την p_i στην p_j που **δεν περνά** από κατάσταση με αριθμό **μεγαλύτερο του** k $\}$

Επαγωγή στο $k = 0, 1, \ldots, |Q| = n$.

Βάση (**k=0**):

$$R_0(i,j) = \begin{cases} \bigcup_{\delta(p_i,a)=p_j} a & \text{αν } i \neq j \\ \left(\bigcup_{\delta(p_i,a)=p_j} a \right) \cup \varnothing^* & \text{αν } i = j \end{cases}$$

Ισοδυναμία Κ.Ε. και Π.Α.

Θεώρημα (***Θεώρημα Kleene***)

Έστω **ΠΑ** $M = (Q, \Sigma, p_1, \delta, F)$ με $Q=\{ p_1,\ldots, p_n \}$, $F=\{ p_{f_1},\ldots, p_{f_m} \}$.

Τότε υπάρχει κανονική έκφραση R που **περιγράφει την** $L(M)$.

Απόδειξη

$R_k(i,j) = \{ x \in \Sigma^* \mid$ η x αντιστοιχεί σε μια **διαδρομή** από την p_i στην p_j που **δεν περνά** από κατάσταση με αριθμό **μεγαλύτερο του** k $\}$

Επαγωγή στο $k = 0,1, \ldots, |Q|=n$.

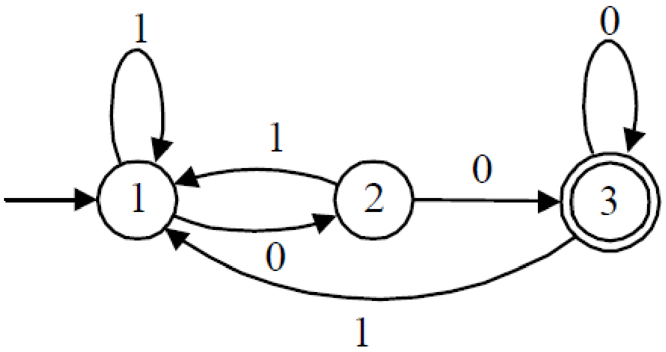
***Βάση* (k=0):** …

Επαγ. Βήμα: $R_{k+1}(i,j) = R_k(i,j) \cup R_k(i, k+1) \left(R_k(k+1, k+1) \right)^* R_k(k+1, j)$

Κ.Έκφραση $R = R_n(1, f_1) \cup R_n(1, f_2) \cup \ldots \cup R_n(1, f_m)$

Ισοδυναμία Κ.Ε. και Π.Α.

Παράδειγμα



$(r \cup \varnothing^*)^* = r^*$

$(r \cup \varnothing^*)\, r^* = r^*\, (r \cup \varnothing^*) = r^*$

$r_1 \cup r_1\, (r_2)^* = r_1\, (r_2)^*$

	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$
$R_k(1,1)$	$1 \cup \varnothing^*$	1^*	$1^*(011^*)^*$
$R_k(1,2)$	0	1^*0	$1^*0(11^*0)^*$
$R_k(1,3)$	$\varnothing$	$\varnothing$	$1^*0(11^*0)^*0$
$R_k(2,1)$	1	11^*	$(11^*0)^*11^*$
$R_k(2,2)$	$\varnothing^*$	$11^*0 \cup \varnothing^*$	$(11^*0)^*$
$R_k(2,3)$	0	0	$(11^*0)^*0$
$R_k(3,1)$	1	11^*	$(11^*0)^*11^*$
$R_k(3,2)$	$\varnothing$	11^*0	$(11^*0)^*11^*0$
$R_k(3,3)$	$0 \cup \varnothing^*$	$0 \cup \varnothing^*$	$(11^*0)^*0 \cup \varnothing^*$

$$R = R_3(1,3) = R_2(1,3) \;\cup\; R_2(1,3)\,(R_2(3,3))^*\, R_2(3,3)$$

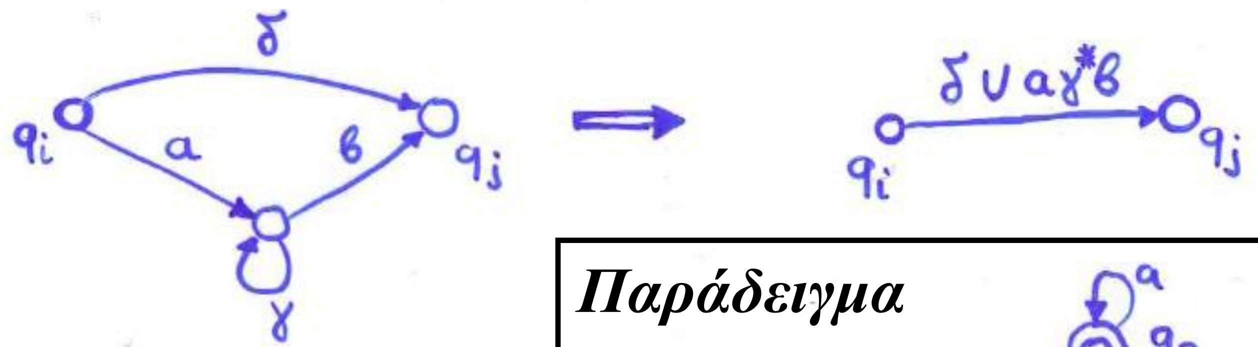
$$= 1^*0(11^*0)^*0 \;\cup\; 1^*0(11^*0)^*0\,((11^*0)^*0 \cup e)^*\,((11^*0)^*0 \cup e)$$

$$= 1^*0(11^*0)^*0\,((11^*0)^*0)^*$$

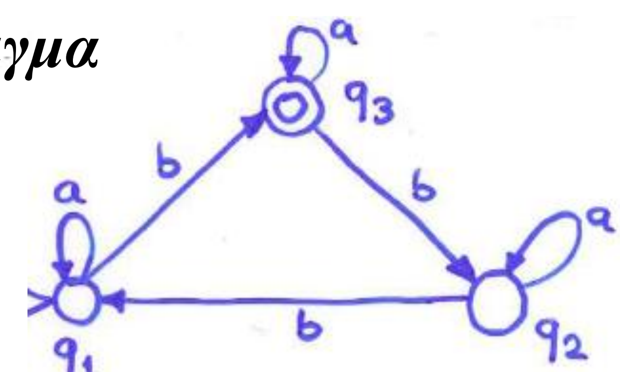
Ισοδυναμία Κ.Ε. και Π.Α.

Μια **Κ.Ε.** για τη γλώσσα ενός Π.Α. ***M*** μπορεί επίσης να υπολογιστεί

- αρχικά μετατρέποντας το ***M*** ώστε
  να έχει **ακριβώς μία τελική κατάσταση** και
  να **μην υπάρχουν** μεταβάσεις **προς την αρχική κατάσταση** ή **από την τελική κατάσταση** και
- κατόπιν κατασκευάζοντας **γενικευμένο Π.Α.** χρησιμοποιώντας



Παράδειγμα



Αποδεικνύοντας την Κανονικότητα Γλώσσας

Για να δείξουμε ότι μια γλώσσα είναι **κανονική**, χρησιμοποιούμε:

- **κανονικές εκφράσεις**
- **πεπερασμένα αυτόματα** (αιτιοκρατικά ή μη)
- τις **ιδιότητες κλειστότητας** των κανονικών γλωσσών.

Παράδειγμα

Δείξτε ότι η γλώσσα των **μη αρνητικών ακεραίων** στο **δεκαδικό** σύστημα (**χωρίς άχρηστα μηδενικά** στην αρχή) που **διαιρούνται ακριβώς με το 2 ή το 3** είναι μια **κανονική** γλώσσα.

L_1: ακέραιοι χωρίς άχρηστα 0. **Κ.Ε.=** $\mathbf{0 \cup (1\cup 2\cup \ldots \cup 9)(0\cup 1\cup \ldots \cup 9)^*}$

L_2: θετικά πολλαπλάσια του 2. **Κ.Ε.=** $\mathbf{(0\cup 1\cup \ldots \cup 9)^* (0\cup 2\cup 4\cup 6\cup 8)}$

L_3: θετικά πολλαπλάσια του 3. ***αναγνωρίζεται από Π.Α.***

Η **ζητούμενη γλώσσα** είναι: $(L_1\cap L_2) \cup (L_1\cap L_3) \Rightarrow$ **κανονική**

Μη Κανονικές Γλώσσες

Για να δείξουμε ότι μια γλώσσα **δεν είναι κανονική**, χρησιμοποιούμε το **Λήμμα Άντλησης για Κανονικές Γλώσσες**.

Λήμμα Άντλησης για Κανονικές Γλώσσες

Για **κάθε** **άπειρη** **κανονική** γλώσσα L,

υπάρχει ακέραιος $n \geq 1$ τέτοιος ώστε

για **κάθε** συμβολοσειρά $w \in L$ με $|w| \geq n$

υπάρχουν συμβολοσειρές x, y, z:

$$w = x\,y\,z, \quad |x\,y| \leq n, \quad y \neq e$$

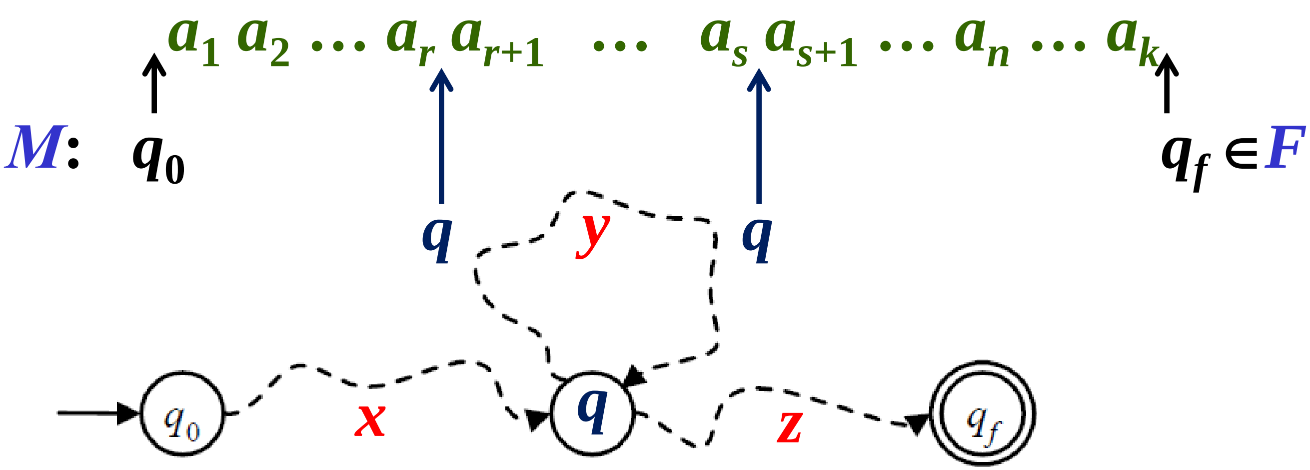
και για **κάθε** ακέραιο $i \geq 0$, $x\,y^i\,z \in L$.

Μη Κανονικές Γλώσσες

Απόδειξη του Λήμματος Άντλησης για Κανονικές Γλώσσες

Θεωρούμε Αιτ.Π.Α. $M = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ που αναγνωρίζει την L, και έστω $n = |Q|$ = το πλήθος καταστάσεων του M.

Έστω $w = a_1\, a_2 \ldots a_k \in \Sigma^*$ όπου $k \geq n$.



Τότε όμως $\forall i \geq 0$, $a_1\, a_2 \ldots a_r\, (a_{r+1} \ldots a_s)^i\, a_{s+1} \ldots a_n \ldots a_k \in L$.

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα Άντλησης

Λήμμα Άντλησης για Κανονικές Γλώσσες

Για **κάθε** **άπειρη** **κανονική** γλώσσα L,
υπάρχει ακέραιος $n \geq 1$ τέτοιος ώστε
για **κάθε** συμβολοσειρά $w \in L$ με $|w| \geq n$
υπάρχουν συμβολοσειρές x, y, z:

$$w = x\,y\,z, \quad |x\,y| \leq n, \quad y \neq e$$

και για **κάθε** ακέραιο $i \geq 0$, $x\,y^i\,z \in L$.

Μέθοδος **απόδειξης** ότι μια **άπειρη** γλώσσα L **δεν είναι κανονική**

Εις άτοπον απαγωγή

- Υποθέτουμε ότι η L είναι **κανονική** και έστω n η σταθερά του Λ.Α. για κανονικές γλώσσες για την L.
- **Επιλέγουμε** συμβολοσειρά $w \in L$ με $|w| \geq n$.
- Για **κάθε** χωρισμό της w σε $w = x\,y\,z$ με $|x\,y| \leq n$, $y \neq e$ βρίσκουμε $i \geq 0$ τ.ώ. $x\,y^i\,z \notin L$.
- **Άτοπο** $\Rightarrow$ η L **δεν** είναι **κανονική**.

***Σημείωση*:** $i \neq 1$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα Άντλησης

Παράδειγμα

Δείξτε ότι η $L = \{ 0^k 1^k \mid k \geq 0 \}$ **δεν** είναι κανονική.

Εις άτοπον απαγωγή.

- Υποθέτουμε ότι η L είναι **κανονική** και
  έστω n η σταθερά του Λ.Α. για κανονικές γλώσσες για την L.
- **Επιλέγουμε** συμβολοσειρά $w = 0^n 1^n \in L$ και $|w| \geq n$.
- **Κάθε** χωρισμός της w σε $w = x\,y\,z$ με $|x\,y| \leq n$, $y \neq e$
  περιγράφεται από: $x = 0^p$, $y = 0^q$, $z = 0^{n-p-q}\, 1^n$ $(p \geq 0,\ q \geq 1)$
- Τότε $x\,y^i\,z = 0^p\, (\, 0^q\,)^i\, 0^{n-p-q}\, 1^n = 0^{n+(i-1)q}\, 1^n$
- Για $i = 2$, $x\,y^2\,z = 0^{n+(2-1)q}\, 1^n = 0^{n+q}\, 1^n$
  και επειδή $n+q > n$, $x\,y^2\,z = 0^{n+q}\, 1^n \notin L$.
- **Άτοπο** $\Rightarrow$ η L **δεν** είναι **κανονική**.

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα Άντλησης

Παρατήρηση στο παράδειγμα για την $L = \{\, 0^k 1^k \mid k \geq 0 \,\}$.

Εάν επιλέξουμε $w = 0^s 1^s \in L$ για $s = \lceil n/2 \rceil$ οπότε $|w| \geq n$, τότε, για να καλύψουμε **κάθε** χωρισμό της w σε $w = x\,y\,z$ όπου $|x\,y| \leq n$, $y \neq e$, χρειάζεται να διακρίνουμε **3 περιπτώσεις**:

- $x = 0^p$, $\boxed{y = 0^q}$, $z = 0^{s-p-q}\, 1^s$ $(p \geq 0,\ q \geq 1)$
  Τότε για $i = 0$, $x\,y^0\,z = x\,z = 0^p\, 0^{s-p-q}\, 1^s = 0^{s-q}\, 1^s \notin L$.
- $x = 0^{s-p}$, $\boxed{y = 0^p 1^q}$, $z = 1^{s-q}$ $(p \geq 1,\ q \geq 1)$
  Τότε για $i = 2$, $x\,y^2\,z = 0^{s-p}\, 0^p 1^q\, 0^p 1^q\, 1^{s-q} = 0^s 1^q 0^p 1^s \notin L$.
- $x = 0^s 1^p$, $\boxed{y = 1^q}$, $z = 1^{s-p-q}$ $(p \geq 0,\ q \geq 1)$
  Τότε για $i = 2$, $x\,y^2\,z = 0^s 1^p\, 1^q\, 1^q\, 1^{s-p-q} = 0^s\, 1^{s+q} \notin L$.

Άτοπο $\Rightarrow$ η L **δεν** είναι **κανονική**.

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα Άντλησης

Προσοχή: Πρέπει να ελέγξουμε **κάθε χωρισμό** της w σε $w = x\,y\,z$ όπου $|x\,y| \le n$, $y \ne e$.

***Παράδειγμα*:** η $L = \{\, u \in \{0,1\}^* \mid |u| = \text{άρτιο} \,\}$ **δεν** είναι κανονική.

- Έστω L **κανονική** και n η σταθερά του Λ.Α. για Κ.Γλ. για την L.
- Επιλέγουμε συμβολοσειρά $w = 0^{2n} \in L$ με $|w| \ge n$ **y: μόνο 0**

  $\Rightarrow$ **κάθε** χωρισμός: $x = 0^p$, $y = 0^q$, $z = 0^{2n-p-q}$ $(p \ge 0,\ q \ge 1,\ p+q \le n)$

  και $\forall\, i \ge 0$, $x\,y^i\,z = 0^p\,(0^q)^i\,0^{2n-p-q} = 0^{2n+(i-1)q}$.
- Αν $|y|$ = **περιττός** αριθμός, τότε

  για $i = 2$, $x\,y^2\,z = 0^p\,0^{2q}\,0^{2n-p-q} = 0^{2n+q} \notin L$ γιατί $2n+q$ = ***περιττός***.

Άτοπο? ***Όχι ακόμη…***

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα Άντλησης

Προσοχή: Πρέπει να ελέγξουμε **κάθε χωρισμό** της w σε $w = x\,y\,z$

όπου $|x\,y| \le n$, $y \ne e$.

***Παράδειγμα*:** η $L = \{ u \in \{0,1\}^* \mid |u| = \text{άρτιο} \}$ **δεν** είναι κανονική.

- Έστω L **κανονική** και n η σταθερά του Λ.Α. για Κ.Γλ. για την L.
- Επιλέγουμε συμβολοσειρά $w = 0^{2n} \in L$ με $|w| \ge n$ **y: μόνο 0**

  $\Rightarrow$ **κάθε** χωρισμός: $x = 0^p$, $y = 0^q$, $z = 0^{2n-p-q}$ $(p \ge 0,\ q \ge 1,\ p+q \le n)$

  και $\forall\, i \ge 0$, $x\,y^i\,z = 0^p\,(0^q)^i\,0^{2n-p-q} = 0^{2n+(i-1)q}$.
- Αν $|y|$ = **περιττός** αριθμός, τότε

  για $i = 2$, $x\,y^2\,z = 0^p\,0^{2q}\,0^{2n-p-q} = 0^{2n+q} \notin L$ γιατί $2n+q$ = ***περιττός***.
- Αν $|y|$ = **άρτιος** αριθμός, τότε

  η $x\,y^i\,z = 0^{2n+(i-1)q}$ **ανήκει** στην L $\forall\, i \ge 0$…

Δεν μπορούμε να καταλήξουμε σε Άτοπο!

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα Άντλησης

Προσοχή: Δεν "δουλεύει" κάθε συμβολοσειρά w.

Παράδειγμα: η $L = \{ u \in \{0,1\}^* \mid$ η u έχει **ίσο πλήθος από 0 και 1** $\}$ **δεν** είναι κανονική.

- Έστω L **κανονική** και n η σταθερά του Λ.Α. για Κ.Γλ. για την L.
- **Επιλέγουμε** συμβολοσειρά $w = 0^n 1^n \in L$ και $|w| \geq n$.
- **Κάθε** χωρισμός της w σε $w = x\, y\, z$ με $|x\, y| \leq n$, $y \neq e$ περιγράφεται από: $x = 0^p$, $y = 0^q$, $z = 0^{n-p-q}\, 1^n$ $(p \geq 0,\ q \geq 1)$
- Τότε $x\, y^i\, z = 0^p\, (\, 0^q\,)^i\, 0^{n-p-q}\, 1^n = 0^{n+(i-1)q}\, 1^n$
- Για $i = 2$, $x\, y^2\, z = 0^{n+(2-1)q}\, 1^n = 0^{n+q}\, 1^n$ και επειδή $n+q > n$, $x\, y^2\, z = 0^{n+q}\, 1^n \notin L$.
- **Άτοπο** $\Rightarrow$ η L **δεν** είναι **κανονική**.

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα Άντλησης

Προσοχή: Δεν “δουλεύει” κάθε συμβολοσειρά $\boldsymbol{w}$.

Παράδειγμα: η $L = \{ u \in \{0,1\}^* \mid$ η u έχει **ίσο πλήθος από 0 και 1** $\}$ **δεν** είναι κανονική.

Εάν όμως επιλέξουμε $w = 0^s 1^s \in L$ για $s = \lceil n/2 \rceil$ τότε $|w| \geq n$ και:

- $x = 0^p$, $\boxed{y = 0^q}$, $z = 0^{s-p-q}\, 1^s$ $(p \geq 0,\ q \geq 1)$
  Τότε για $i = 0$, $x\, y^0 z = x\, z = 0^p\, 0^{s-p-q}\, 1^s = 0^{s-q}\, 1^s \notin L$.
- $x = 0^s 1^p$, $\boxed{y = 1^q}$, $z = 1^{s-p-q}$ $(p \geq 0,\ q \geq 1)$
  Τότε για $i = 2$, $x\, y^2 z = 0^s 1^p\, 1^q\, 1^q\, 1^{s-p-q} = 0^s\, 1^{s+q} \notin L$.
- $x = 0^{s-p}$, $\boxed{y = 0^p 1^q}$, $z = 1^{s-q}$ $(p \geq 1,\ q \geq 1)$
  Τότε, αν $p = q$, η $x\, y^i z$ <u>**ανήκει**</u> στην L για <u>**κάθε $i \geq 0$**</u>.

Δεν μπορούμε να καταλήξουμε σε Άτοπο!

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα Άντλησης

Ένας **άλλος τρόπος** για να δείξουμε ότι **δεν** είναι κανονική η γλώσσα $L = \{ u \in \{0,1\}^* \mid$ η u έχει **ίσο πλήθος από 0 και 1** $\}$.

Εις άτοπον απαγωγή

- Έστω L **κανονική**.
- Έστω **R = η γλώσσα με Κ.Ε. $0^* 1^*$** $\Rightarrow$ R **κανονική**.
- Τότε η γλώσσα $L \cap R$ είναι **κανονική** όπου $L \cap R = \{ 0^k 1^k \mid k \geq 0 \}$.
- Όμως γνωρίζουμε (ή δείχνουμε με χρήση του Λήμμ. Άντλησης) ότι η $\{ 0^k 1^k \mid k \geq 0 \}$ **δεν** είναι κανονική.
- **Άτοπο** $\Rightarrow$ η L **δεν** είναι **κανονική**.

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα Άντλησης

Παρατήρηση

Για κάθε άπειρη κανονική γλώσσα L, το Λήμμα Άντλησης συνεπάγεται ότι **υπάρχουν** συμβολοσειρές $w_i \in L$ $(i \geq 0)$ τέτοιες ώστε $\boxed{|w_i| = \lambda + i\,\mu}$ για ακέραιους λ, μ. (*τα* ***μήκη: αριθμητική πρόοδος***)

Λήμμα Άντλησης

Για **κάθε άπειρη κανονική** γλώσσα L,
υπάρχει ακέραιος $n \geq 1$ τέτοιος ώστε
για **κάθε** συμβολοσειρά $w \in L$ με $|w| \geq n$
υπάρχουν συμβολοσειρές x, y, z:

$$w = x\,y\,z, \quad |x\,y| \leq n, \quad y \neq e$$

και για **κάθε** ακέραιο $i \geq 0$, $x\,y^i\,z \in L$.

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα Άντλησης

Παρατήρηση

Για κάθε άπειρη κανονική γλώσσα L, το Λήμμα Άντλησης συνεπάγεται ότι **υπάρχουν** συμβολοσειρές $w_i \in L$ $(i \geq 0)$ τέτοιες ώστε $\boxed{|w_i| = \lambda + i\,\mu}$ για ακέραιους λ, μ. (τα ***μήκη***: ***αριθμητική πρόοδος***)

Με βάση αυτήν την παρατήρηση, μπορούμε να δείξουμε ότι

η $L' = \{\, a^k \mid k = j^2 \text{ για ακέραιο } j \,\} = \{\, e, a, a^4, a^9, a^{16}, a^{25}, a^{36}, \ldots \}$

δεν είναι κανονική.

Υποθέτουμε ότι η L' είναι **κανονική**.

Επιλέγουμε $w = a^{n^2}$ όπου n η σταθερά του Λ.Α. για την L'.

Τότε, $y = a^q$ (όπου $1 \leq q \leq n$) και για $i=2$, $x\,y^2\,z = a^{n^2+q}$.

Όμως, $n^2 < n^2 + 1 \leq n^2 + q \leq n^2 + n < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$

$\Rightarrow$ $x\,y^2\,z = a^{n^2+q} \notin L'$. **Άτοπο** $\Rightarrow$ η L' δεν είναι κανονική.

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα Άντλησης

Γλώσσες που **δεν είναι κανονικές**

“τα Π.Α. δεν μετρούν”

- Γλώσσες με συμβολοσειρές **τουλάχιστον 2 μέρη των οποίων συσχετίζονται** ως προς το μήκος ή τα σύμβολα
  Π.χ., $\{\, \mathbf{0}^{k}\, \mathbf{1}^{k} \mid \boldsymbol{k} \geq 0 \,\}$, $\{\, \boldsymbol{u}\,\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{u} \in \{0,1\}^* \,\}$, $\{\, \boldsymbol{u}\,\boldsymbol{u}^{R} \mid \boldsymbol{u} \in \{0,1\}^* \,\}$
  $\{\, \boldsymbol{u} \in \{0,1\}^* \mid$ η $\boldsymbol{u}$ έχει **ίσο πλήθος από 0 και 1** $\}$
- Γλώσσες στις οποίες **η διαφορά μηκών διαδοχικών συμβολοσειρών** (σε μια διάταξη κατά **αύξον μήκος**) συνεχώς **αυξάνει**
  Π.χ., $\{\, \boldsymbol{a}^{k} \mid \boldsymbol{k} = \boldsymbol{j}^{2}$ για ακέραιο $j \,\}$, $\{\, \boldsymbol{babaab\ldots ba^{k}b} \mid \boldsymbol{k} \geq 1 \,\}$
- **Άλλες** γλώσσες
  Π.χ., $\{\, \boldsymbol{a}^{p} \mid \boldsymbol{p}$ πρώτος αριθμός $\}$

Προσοχή: η $\{\, \boldsymbol{u}\,\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{u} \in \{0\}^* \,\}$ είναι κανονική.

Το Θεώρημα Myhill-Nerode

Το **Λήμμα Άντλησης** δεν είναι αρκετά ισχυρό, καθώς **δεν** επιτρέπει να δείξουμε ότι **κάθε μη κανονική γλώσσα είναι μη κανονική**.

Θεώρημα Myhill-Nerode (1958): μια γλώσσα $\boldsymbol{L}$ είναι **κανονική** **αν και μόνο αν** **κάθε** σύνολο συμβολοσειρών οι οποίες **ανά δύο** **διακρίνονται** ως προς την $\boldsymbol{L}$ είναι **πεπερασμένο**.

Δύο συμβολοσειρές $\boldsymbol{x}$ και $\boldsymbol{y}$ **διακρίνονται** ως προς μια γλώσσα $\boldsymbol{L}$ εάν υπάρχει συμβολοσειρά $\boldsymbol{z}$ τέτοια ώστε η **μία** από τις $\boldsymbol{xz}$, $\boldsymbol{yz}$ **ανήκει** στην $\boldsymbol{L}$ ενώ η **άλλη δεν ανήκει** στην $\boldsymbol{L}$.

Π.χ.: αν $\boldsymbol{L = \{ 0^k \mid k = }$ **άρτιος** $\boldsymbol{\}}$,

οι **00**, **000** **διακρίνονται** ως προς την $\boldsymbol{L}$ ($\boldsymbol{z} = e$ ή 0 ή 00 ή …)

ενώ οι **00**, **0000** **δεν** **διακρίνονται** ως προς την $\boldsymbol{L}$.

Αλγόριθμοι και Πεπερασμένα Αυτόματα

Αλγόριθμοι

- Υπάρχει **αλγόριθμος** (εκθετικού χρόνου) ο οποίος, δοθέντος ενός **μη Αιτ. Π.Α.**, κατασκευάζει **ισοδύναμο Αιτιοκρατικό Π.Α.**
- Υπάρχει **αλγόριθμος** (πολυωνυμικού χρόνου) ο οποίος, για δοθείσα **Κανονική Έκφραση *r***, κατασκευάζει **μη Αιτ. Π.Α.** που **αναγνωρίζει τη γλώσσα** που περιγράφει η ***r***.
- Υπάρχει **αλγόριθμος (*πολυωνυμικού*** χρόνου) ο οποίος, δοθέντος ενός **Π.Α. *M***, κατασκευάζει **Κανονική Έκφραση** για την ***L*(*M*)**.
- Υπάρχει **αλγόριθμος** (πολυωνυμικού χρόνου), ο οποίος δοθέντος ενός **Αιτ. Π.Α.**, κατασκευάζει **ισοδύναμο Αιτ. Π.Α.** με το **ελάχιστο πλήθος καταστάσεων**. **[Moore** (1956)**, Hopcroft** (1971)**]**

Αλγόριθμοι και Πεπερασμένα Αυτόματα

Θεώρημα (***βασίζεται στο Λ.Α. για κανονικές γλώσσες***)

Για **Π.Α.** ***M*** με ***n*** **καταστάσεις**, η γλώσσα ***L*(*M*)**:

- **δεν είναι κενή** **αν και μόνο αν** υπάρχει **συμβολοσειρά** $w \in L$ με **μήκος** $|w| < n$,
- είναι **άπειρη** **αν και μόνο αν** υπάρχει **συμβολοσειρά** $w \in L$ με **μήκος** $n \leq |w| \leq 2n$.

Πρακτικοί Αλγόριθμοι

- Η γλώσσα ***L*(*M*)** **δεν είναι κενή** **αν και μόνο αν** **υπάρχει κατευθυνόμενη διαδρομή** στο διάγραμμα μεταβάσεων του ***M*** από την **αρχική** κατάσταση σε κάποια **τελική** κατάσταση.

συνέχεια

Αλγόριθμοι και Πεπερασμένα Αυτόματα

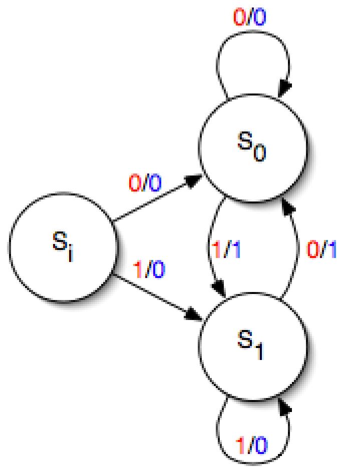
Πρακτικοί Αλγόριθμοι (*συνέχεια*)

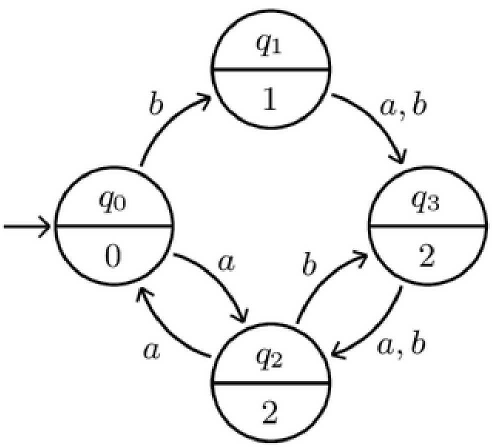
- Η γλώσσα $\boldsymbol{L(M)}$ είναι **άπειρη** **αν και μόνο αν** **υπάρχει κατευθυνόμενος κύκλος με τουλάχιστον μία επιγραφή** $\neq e$ σε κάποια **διαδρομή** στο διάγραμμα μεταβάσεων του $\boldsymbol{M}$ από την **αρχική** κατάσταση σε κάποια **τελική** κατάσταση.
- Υπάρχει **αλγόριθμος** (πολυωνυμικού χρόνου) ο οποίος, ελέγχει εάν δύο **Αιτιοκρατικά Π.Α.** είναι **ισοδύναμα**.

  Αρκεί $\left(L(M_1) - L(M_2)\right) \cup \left(L(M_2) - L(M_1)\right) = \emptyset$.
- Υπάρχει **αλγόριθμος** (εκθετικού χρόνου) ο οποίος, ελέγχει εάν δύο **μη Αιτιοκρατικά Π.Α.** είναι **ισοδύναμα**.
- Υπάρχει **αλγόριθμος** ο οποίος, για **Π.Α.** $\boldsymbol{M}$ και **συμβολοσειρά** $\boldsymbol{w}$, ελέγχει εάν $\boldsymbol{w \in L(M)}$.

Επεκτάσεις Πεπερασμένων Αυτομάτων

Πεπερασμένα Αυτόματα με Έξοδο





Μηχανές Mealy (1955)
έξοδος σε κάθε **μετάβαση**

Μηχανές Moore (1956)
έξοδος σε κάθε **κατάσταση**

Δικατευθυνόμενα (two-way) Πεπερασμένα Αυτόματα

Η κεφαλή ανάγνωσης κινείται προς τα δεξιά **και αριστερά**.

Ισοδύναμα προς το βασικό μοντέλο.